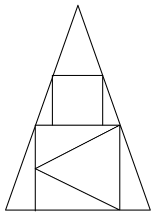
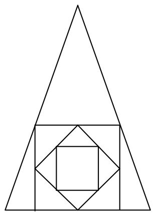
Bevezetés a Számításelméletbe II.

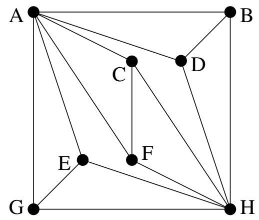
Negyedik gyakorlat, 2022. március 8.

1. Ha lehet, rajzoljuk le az alábbi ábrákat egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül.

a) 

b) 

2. Legkevesebb hány élt kell hozzávenni az alábbi gráfhoz ahhoz, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör? (ZH, 2011. március 17.)



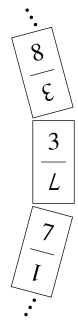
3. A 101 csúcsú G egyszerű gráf egyik csúcsának a foka 50, az összes többi csúcsának a foka legalább 51. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-kör. ($\approx$ ZH, 2003. március 27.)

---

4. Az $r = 1, 2, \ldots, 9$ értékek közül melyikre/melyekre igaz, hogy minden 10 csúcsú, r-reguláris, egyszerű gráfban van Euler-körséta? (Egy gráf r-reguláris, ha minden csúcsának foka r.) (ZH, 2019. május 3.)

5. Bejárható-e egy 4×4-es sakktábla lóval úgy, hogy minden mezőre éppen egyszer lépünk rá?

6. Egy dominókészlet minden dominójának két felén két különböző, 1 és n közötti egész szám áll (ahol $n > 1$ egész). Tudjuk, hogy bárhogyan választunk két különböző 1 és n közötti egészt, pontosan egy olyan dominó van a készletben, aminek két felén épp a két kiválasztott szám áll. A feladatunk az, hogy a készlet összes dominóját elhelyezzük egyetlen körben úgy, hogy az egymás mellé kerülő dominófeleken azonos szám álljon (lásd az ábrát). Határozzuk meg, hogy mely n-ek esetén létezik ilyen elhelyezés. (ZH, 2007. március 29.)



7. Egy 20 tagú társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer a többiek közül. Bizonyítsuk be, hogy le tudnak ülni egy kör alakú asztal köré vagy úgy, hogy mindenki mindkét szomszédját ismeri, vagy úgy, hogy senki sem ismeri egyik szomszédját sem.

8. Mutassuk meg, hogy ha G egy 16 csúcsú, 9-reguláris, egyszerű gráf, akkor G-ből elhagyható 8 él úgy, hogy a maradék gráfnak legyen Euler-körsétája. (ZH, 2008. május 22.)

---

9. Van-e Hamilton-kör az alábbi G gráfokban? És Hamilton-út?

a) Egy 5×5-ös sakktábla egyik sarkát kivágjuk. A maradék 24 mező alkotja G csúcsait és két különböző csúcs akkor van összekötve G-ben, ha a megfelelő mezők él mentén szomszédosak. (ZH, 2013. március 21.)

b) Ugyanaz, mint az a) feladat, csak két átellenes sarkot hagyunk el. (ZH, 2013. március 21.)

10. Van-e Euler-séta, illetve Euler-körséta az alábbi G gráfokban?

a) G csúcsai egy 6 elemű halmaz 3 elemű részhalmazai; két csúcs akkor szomszédos, ha a megfelelő halmazoknak legfeljebb 1 közös eleme van. (ZH, 2019. május 20.)

b) G csúcsai a 100 hosszú $0-1$ sorozatok; két csúcs akkor szomszédos, ha a megfelelő sorozatok pontosan 2 helyen térnek el.

11. A 101 csúcsú G egyszerű gráf pontosan két csúcsának a foka 50, az összes többi csúcsának a foka legalább 51. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út.

12. Bejárható-e egy 3×5-ös sakktábla lóval úgy, hogy minden mezőn éppen egyszer tartózkodik a ló? (ZH, 2019. május 20.)

13. Egy képzeletbeli nyelv hangkészlete 10 magánhangzóból és 21 mássalhangzóból áll. Ezen a nyelven nincsenek kettős hangzók és tilos a mássalhangzótorlódás; vagyis sem két azonos hang, sem két különböző mássalhangzó soha nem állhat egymás mellett. (Viszont minden más lehetséges: bármely két különböző hang állhat egymás után, ha legalább az egyikük magánhangzó.) Legföljebb milyen hosszú megengedett hangsor készíthető ezen a nyelven, ha bármely hang többször is felhasználható, de további feltétel, hogy bármely két különböző hang legföljebb egyszer állhat egymás mellett a hangsorban? (ZH, 2012. március 12.)

14. Egy banketten 50 vendég vesz részt, mindegyikük legalább 5 embert ismer a többiek közül. (Az ismeretségek kölcsönösek.) A vendégek közül bárhogyan is választunk 3-at vagy 4-et, ezek nem tudnak leülni egy kör alakú asztal köré úgy, hogy mindenki mindkét szomszédját ismerje. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az összes vendég le tud ülni egy 50 fős, kör alakú asztal köré úgy, hogy bármely két, egymás mellett ülő, de egymást nem ismerő embernek legyen a vendégek közt közös ismerőse. (ZH, 2011. május 9. alapján)

15. Legyen G egy 101 csúcsú egyszerű gráf, amelyben az egyik pont foka 50, az összes többi pont foka 49. Bizonyítsuk be, hogy G-hez hozzá lehet venni 50 darab élet úgy, hogy a kapott gráf továbbra is egyszerű gráf legyen és tartalmazzon Euler-körsétát. (ZH, 2009. március 23.)

16. A $2k+1$ pontú G egyszerű gráf minden pontjának foka legalább k. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton-út.