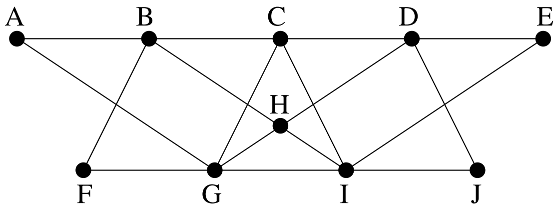
Bevezetés a Számításelméletbe II.

Harmadik gyakorlat, 2021. február 23.

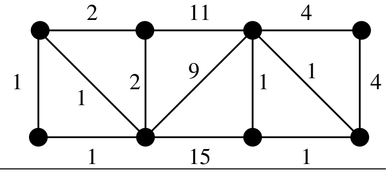
1. Bejárhatja-e a BFS algoritmus a jobbra látható gráf csúcsait az alábbi sorrendben? Ahol a válasz igen, ott adjuk meg az algoritmus futása során keletkező összes adatot (vagyis minden v csúcsra v távolságát a kezdőponttól, azt a csúcsot, ahonnan az eljárás v-t elérte, valamint a bejáráshoz tartozó BFS-fát).

a) H, B, D, G, I, C, A, F, J, E

b) F, B, A, G, C, H, I, D, E, J



2. Határozzunk meg egy minimális összsúlyú feszítőfát a jobbra látható élsúlyozott gráfban.



3. Oldjuk meg az **1.** feladatot a csúcsok alábbi sorrendjeire is.

a) J, D, I, C, E, G, H, A, F, B

b) A, B, G, C, H, F, I, D, E, J

4. Legyen G a 100 csúcsú teljes gráf a $V(G) = \{1, 2, \ldots, 100\}$ csúcshalmazon. Minden $1 \le i, j \le 100$, $i \ne j$ esetén legyen az $\{i, j\}$ él súlya az i és j értékek közül a nagyobb. Mennyi erre a súlyfüggvényre nézve egy minimális összsúlyú feszítőfa súlya G-ben? Adjunk meg egy ilyen fát.

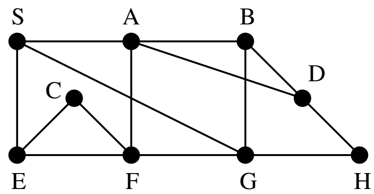
5. a) Olyan algoritmust kell terveznünk, amely egy adott G gráf és annak egy e éle esetén eldönti, hogy G-ben van-e e-t tartalmazó kör és ha igen, akkor megtalálja az ilyen körök közül a legrövidebbek egyikét. Hogyan lehetne a BFS algoritmust ennek a feladatnak a hatékony megoldására felhasználni?

b) Mi a helyzet akkor, ha adott él helyett egy adott csúcsot tartalmazó legrövidebb kört kell találnunk?

6. Egy élsúlyozott, összefüggő G gráfban minden él súlya legföljebb 100. Tudjuk, hogy G-ben van olyan minimális összsúlyú feszítőfa, ami tartalmaz 100 súlyú élt. Mutassuk meg, hogy ekkor G minden (nem feltétlen minimális összsúlyú) feszítőfája is tartalmaz 100 súlyú élet.

7. a) A BFS algoritmus a jobbra látható ábra gráfjának csúcsait a következő sorrendben járta be: S, $\square$, $\square$, $\square$, H, $\square$, F, C, $\square$. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel (ezeket $\square$ jelöli) és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.

b) Tartalmazhatja-e a $\{D, H\}$ élet a gráf egy S-ből indított (tetszőleges) BFS bejárásához tartozó BFS-fája? (ZH, 2015. március 19.)



8. Legyen G a 100 csúcsú teljes gráf a $V(G) = \{1, 2, \ldots, 100\}$ csúcshalmazon. Minden $1 \le i, j \le 100$, $i \ne j$ esetén legyen az $\{i, j\}$ él súlya 1, ha $i \le 50$ és $j \le 50$; legyen az $\{i, j\}$ él súlya 2, ha $i \ge 51$ és $j \ge 51$; végül minden más él súlya legyen 3. Mennyi erre a súlyfüggvényre nézve egy minimális összsúlyú feszítőfa súlya G-ben? Adjunk meg egy ilyen fát.

9. Legyen G egyszerű, irányítatlan gráf, a és b pedig G két különböző csúcsa. Igaz-e, hogy ha G-nek egy, az a-ból indított szélességi bejárása a b csúcsot ötödiknek találja meg, akkor biztosan létezik G-nek olyan, b-ből indított szélességi bejárása, mely az a csúcsot ötödiknek találja meg? (ZH, 2020. május 25.)

10.a) Legyen G összefüggő, egyszerű gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Tegyük fel, hogy G-ben az e él egyik végpontja v és a v-re illeszkedő minden f élre $w(e) \le w(f)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami tartalmazza e-t. (ZH, 2015. március 19.)

b) Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Legyen továbbá C egy kör G-ben és e a C egy éle. Tegyük fel, hogy a C kör minden f élére $w(f) \le w(e)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami nem tartalmazza e-t. (ZH, 2015. május 4.)

11. Egy összefüggő G gráf egy F feszítőfáját nevezzük a gráf v csúcsára *illeszkedőnek*, ha G-nek van olyan, a v csúcsból indított BFS bejárása, amihez tartozó BFS-fa éppen F. Legföljebb hány éle lehet egy 100 csúcsú G összefüggő, egyszerű gráfnak, ha van olyan feszítőfája, ami G minden csúcsára illeszkedik? (ZH, 2015. május 20.)

12*. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Mutassuk meg, hogy G minden (w-re nézve) minimális összsúlyú feszítőfája megkapható, mint a Kruskal-algoritmus egyik lehetséges futásának az eredménye.