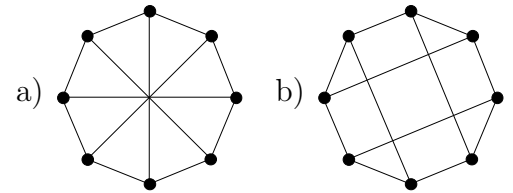


1. Egy G gráf pontjai legyenek egy kocka csúcsai; két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a kockában él mentén szomszédosak. A jobbra látható két gráf közül melyik (melyek) izomorf(ak) G -vel?



2. Van-e olyan fa, amelyben a pontok foka rendre

a) 1,1,1,1,1,3,4;

b) 1,1,1,1,2,3,3,4?

3. Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Mutassuk meg, hogy a gráf összefüggő.

4. Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre

a) $n = 4, e = 5$

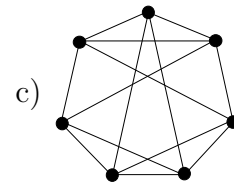
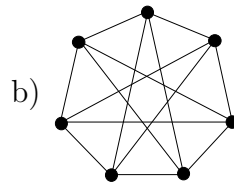
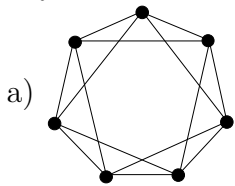
b) $n = 5, e = 3$

c) $n = 5, e = 7$

d) $n = 5, e = 8$

ahol n jelöli a pontok számát, e az élek számát.

5. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



6. a) Egy fában minden pont foka 1, 2 vagy 3. Hány 1 fokú pontja van, ha a 3 fokúak száma 5?

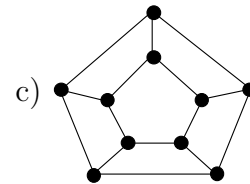
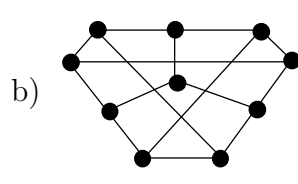
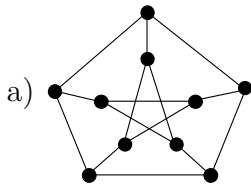
b) Rajzoljunk két olyan, a feltételeknek megfelelő fát, amelyekben a 2 fokú pontok száma különböző.

7. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élet úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen. (ZH, 2006. december 7.)

8. Milyen n pozitív egészekre létezik olyan n csúcsú egyszerű gráf, amelyben bármely két csúcs foka különböző?

9. Rajzoljuk fel az összes, legfőljebb 5 csúcsú fát. (Az izomorfakat csak egyszer.)

10. A G gráf pontjai legyenek az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz 2 elemű részhalmazai; két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. Az alábbi gráfok közül melyik (melyek) izomorf(ak) G -vel?



11. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre

a) 1,2,2,3,3,3;

b) 1,1,2,2,3,4,4;

c) 2,3,3,4,5,6,7;

d) 1,3,3,4,5,6,6.

12. a) Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám? (ZH, 2010. november 25.)

b) Rajzoljunk le (vázlatosan) egy, a feltételeknek megfelelő fát.

13. A 20 csúcsú G egyszerű gráfban 10 csúcs foka legfőljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van G -nek? (ZH, 2015. március 19.)

14. Egy fában a legnagyobb fokú csúcs foka Δ . Bizonyítsuk be, hogy a fának legalább Δ darab 1 fokú csúcsa van.

15. Legyen G egyszerű, összefüggő gráf, e és f pedig G két éle. Mutassuk meg, hogy G -nek van olyan feszítőfája, mely e -t és f -et is tartalmazza.

16. Mutassuk meg, hogy minden összefüggő gráfban van olyan csúcs, melyet a gráfból elhagyva (az összes rá illeszkedő éllel együtt) összefüggő gráfot kapunk.

17. Létezik-e olyan 4, 5, illetve 6 csúcsú egyszerű gráf, amely izomorf a saját komplementerével?

18. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintjük azonosnak.) (ZH, 2008. december 2.)

19. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő.