

1. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élt úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen. (ZH, 2006. december 7.)
2. Hány csúcsa lehet egy olyan fának, amiben a csúcsok fokszámai között pontosan kétféle érték fordul elő és mindkettő ugyanannyiszor? (ZH, 2019. május 20. alapján)

3. Egy 23 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 7. Mutassuk meg, hogy bárhogy választunk ki a gráf csúcsai közül hármat, lesz köztük két olyan, amik között van a gráfban út. (ZH, 2017. május 15.)
4. A 10 csúcsú G egyszerű gráfban teljesül, hogy bárhogyan is soroljuk fel a $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ csupa különböző csúcsokat, ahol $3 \leq k \leq 10$, a $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\dots$, $\{v_{k-1}, v_k\}$ és $\{v_k, v_1\}$ párok közül legalább az egyik benne van G élhalmazában. Mutassuk meg, hogy ekkor G -nek legalább 36 éle van. (ZH, 2023. május 18.)
5. A G gráfnak 20 csúcsa, 18 éle és 3 komponense van. Hány fa lehet G komponensei között?
6. Adjuk meg az összes olyan 25 csúcsú F fát, amelyre létezik olyan $m \geq 2$ egész, hogy F minden pontjának a foka azonos maradékot ad m -mel osztva. (ZH, 2018. május 23.)
7. Egy egyszerű gráfban minden pont foka legalább k , ahol $k \geq 2$ egész. Bizonyítsuk be, hogy a gráfban található legalább $k + 1$ pontú kör.
8. Létezik-e olyan (legalább két csúcsú) összefüggő gráf, aminek tetszőleges csúcsát törölve (annak összes élével együtt) a kapott gráf már nem összefüggő?

9. Hány 3 fokú csúcsa lehet egy olyan húsz csúcsú fának, aminek pontosan tíz 1 fokú és pontosan egy 10 fokú csúcsa van? (ZH, 2024. május 28.)
10. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám? (ZH, 2010. november 25.)
11. Egy 100 csúcsú egyszerű, összefüggő gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a gráfnak van három különböző feszítőfája. (ZH, 2017. május 8.)
12. Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 102 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző kör. (Két kör akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.) (ZH, 2017. március 16.)
13. A G egyszerű gráfban minden pont foka legalább 3. Mutassuk meg, hogy G -ben van páros hosszú kör.
14. Egy fában a legnagyobb fokú csúcs foka Δ . Bizonyítsuk be, hogy a fának legalább Δ darab 1 fokú csúcsa van.
15. Legyen G egyszerű, összefüggő gráf, e és f pedig G két éle. Mutassuk meg, hogy G -nek van olyan feszítőfája, ami e -t és f -et is tartalmazza.
16. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintjük azonosnak.) (ZH, 2008. december 2.)
17. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő.
18. Egy kisváros utcáinak hálózata összefüggő, egyszerű gráfot alkot. Mivel az utcák nagyon keskenyek, a polgármester szeretné a város összes utcáját egyirányúsítani – de valami rejtélyes babona miatt úgy, hogy a gráf minden csúcsából páratlan sok utcán lehessen elindulni. Bizonyítsuk be, hogy ilyen irányítás akkor és csak akkor készíthető, ha a csúcsok száma és az élek száma azonos paritású.
- 19*. Valaki felhívja az előző feladatbeli polgármester figyelmét, hogy a furcsa páratlansági feltételénél sokkal fontosabb volna, hogy az egyirányúsítás után is mindenhonnan mindenhová el lehessen jutni. Bizonyítsuk be, hogy ilyen irányítás akkor és csak akkor létezik, ha a gráf tetszőleges élének elhagyása után is összefüggő marad. (Itt tehát már nem feltétel, hogy minden csúcsból páratlan sok utcán lehessen elindulni.)
- 20*. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, minden csúcs foka legfeljebb Δ . Elkészítjük G -ből az $n \times n$ -es A mátrixot úgy, hogy minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén $a_{i,j} = 1$, ha v_i és v_j szomszédosak G -ben, egyébként $a_{i,j} = 0$. (A -t G szomszédsági mátrixának hívják.) Mutassuk meg, hogy A minden λ sajátértékére $\lambda \leq \Delta$ teljesül.