



1. Határozzuk meg az ábrán látható K gráfra a következő értékeket.

- $\lambda_K(B, I)$
- $\lambda_K(C, I)$

2. Határozzuk meg az 1. feladatbeli K gráfra a következő értékeket is.

- $\lambda_K(F, I)$
- $\lambda_K(B, H)$
- $\lambda_K(D, G)$
- $\lambda_K(B, C)$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a G irányított gráfban van u -ból v -be is és v -ből w -be is k darab páronként éldiszjunkt irányított út, akkor G -ben létezik u -ból w -be is k darab páronként éldiszjunkt irányított út.

4. Egy $n \times n$ -es négyzetrács n^2 darab csúcsából m -et pirosra festettünk. Szeretnénk minden piros csúcsot vonallal összekötni a rács szélének valamelyik pontjával úgy, hogy a vonalak csak a rács élein haladjanak és semelyik kettő ne messe egymást. Adjunk (hatékony) algoritmust, amely eldönti, hogy ez lehetséges-e.

5. Egy G (irányítatlan) gráfot k -szorosan éösszefüggőnek nevezünk (ahol $k \geq 1$ egész), ha az élei közül bárhogyan legföljebb $(k - 1)$ -et törölve mindig összefüggő gráfot kapunk. Mutassuk meg, hogy G akkor és csak akkor k -szorosan éösszefüggő, ha $\lambda_G(u, v) \geq k$ teljesül bármely $u, v \in V(G)$, $u \neq v$ csúcsokra.

6. Minimálisan hány éle kell legyen egy 10 csúcsú, háromszorosan éösszefüggő gráfnak?

7. A 15 pontú G gráf egy 4 pontú, egy 5 pontú és egy 6 pontú körből készült úgy, hogy az 5 pontú kör minden csúcsát összeköttöttük (egyetlen éllel) a másik két kör minden csúcsával. Legyen s a 4 pontú kör egyik csúcsa, t pedig a 6 pontú kör egyik csúcsa. Határozzuk meg $\lambda_G(s, t)$ értékét.

8. A G gráfnak létezik olyan csúcsa, melyből bármely más csúcsba vezet három páronként éldiszjunkt út. Mutassuk meg, hogy G bármely két csúcsa között van három páronként éldiszjunkt út. (ZH, 2012. május 15.)

9. Legyen G egy hurokélmentes, irányítatlan gráf és $s \in V(G)$ egy rögzített csúcs. Tegyük fel, hogy valamely $t \in V(G)$ csúcsra $\lambda_G(s, t) = 10$, de minden $v \in V(G)$, $v \neq s, t$ esetén $\lambda_G(s, v) > 10$. Mutassuk meg, hogy ekkor t foka 10. ($\approx$ ZH, 2013. május 16.)

10. A legalább négy pontú G gráf bármely két, nemszomszédos pontja között található G -ben három, páronként éldiszjunkt út. Mutassuk meg, hogy G -nek bármely két szomszédos pontja között is található három, páronként éldiszjunkt út. (ZH, 2013. április 25.)

11. Legyen adott a (G, s, t, c) hálózat (ahol tehát G irányított gráf, $s, t \in V(G)$ csúcsok és $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény). Tegyük fel, hogy az $e = (u, v) \in E(G)$ élt minden maximális folyam „telíti” (vagyis minden f maximális folyamra $f(e) = c(e)$ teljesül). Következik-e ebből, hogy van olyan X minimális vágás, amiből e kilép (vagyis amire $u \in X$ és $v \notin X$ teljesül)?

12*. Legyen adott egy G irányított gráf és annak egy $r \in V(G)$ („gyökér”) csúcsa. Egy $X \subseteq V(G)$ esetén az X befokának nevezzük és $\varrho_G(X)$ -szel jelöljük az X -be belépő élek számát. Hasonlóan, a $v \in V(G)$ csúcs befokát $\varrho_G(v)$ jelöli.

a) Egy $X \subseteq V(G) \setminus \{r\}$ halmazt v -szoros halmaznak nevezünk, ha $v \in X$ és $\varrho_G(X) = \lambda_G(r, v)$. Mutassuk meg, hogy ha X és Y v -szoros halmazok, akkor $X \cup Y$ és $X \cap Y$ is v -szoros halmazok.

b) G -t lánagnak nevezzük (az $r \in V(G)$ gyökérről nézve), ha minden $v \in V(G)$, $v \neq r$ csúcs esetén $\lambda_G(r, v) = \varrho_G(v)$. Mutassuk meg, hogy ha egy lánghoz hozzáveszünk egy olyan e élt, ami egy $v \neq r$ csúcsra belép az összes v -szoros halmaz uniójába, akkor a kapott gráf ismét lág. (e -t meglévő csúcsok közé vesszük fel, vagyis G csúcshalmaza nem változik.)

c) Mutassuk meg, hogy G -nek van olyan F részgráfja, amire $V(G) = V(F)$ és minden $v \neq r$ csúcs esetén $\lambda_F(r, v) = \varrho_F(v) = \lambda_G(r, v)$.