Bevezetés a számításelméletbe II.
1. zh, 2014.03.20.

1. Egy 59 csúcsú egyszerű gráfban bármely két csúcs fokszámösszege 60-nál nagyobb páros szám. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van Euler-körséta?

2. Egy szabályos tízszögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (10 csúcsú, 20 élű) gráf klikkszámát és kromatikus számát.

3. Legyen G 99 csúcsú egyszerű gráf, melyben minden csúcs fokszáma ugyanannyi. Bizonyítsuk be, hogy G élkromatikus száma páratlan.

4. Egy adott intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha az intervallumrendszerből törlünk néhány olyan intervallumot, melyek közt semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor a visszamaradó intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma legalább 8.

5. Egy páros gráf két pontosztálya $\{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $\{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha az alábbi táblázat i. sorának j. eleme 1. Döntsük el, hogy van-e G-ben teljes párosítás.

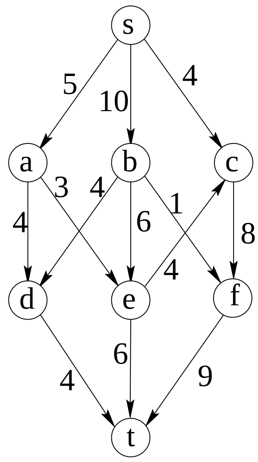
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a hozzájuk tartozó számok szorzata osztható 4-gyel vagy 9-cel (vagy mindkettővel). Határozzuk meg $\alpha(G)$-t (a független pontok maximális számát) és $\varrho(G)$-t (a lefogó élek minimális számát).

Minden feladat 10 pontot ér. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe II.
2. zh, 2014.04.24.

1. Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



2. Húzzunk be 3 élet két diszjunkt 5 csúcsú teljes gráf csúcsai közé úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Igaz-e hogy G minden esetben
   (a) háromszorosan összefüggő?
   (b) háromszorosan élösszefüggő?

3. Oldjuk meg a
$$34x \equiv 6 \pmod{98}$$
lineáris kongruenciát.

4. Határozzuk meg $46^{47^{48}}$ 25-tel vett osztási maradékát.

5. Az n szám kettes számrendszerbeli alakja 11010010110110001101 1. Határozzuk meg n^n kettes számrendszerbeli alakjának utolsó négy jegyét.

6. Legyen $H = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ és $(a,b) * (c,d) = (ac, bd)$. Döntsük el, hogy $(H, *)$ csoport-e.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe II.
1. pótzh, 2014.05.12.

1. Egy egyszerű gráf fokszámsorozata 7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,2. Mutassuk meg, hogy van a gráfban 12 csúcsú kör.

2. Egy egyszerű gráf fokszámsorozata 6,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4. Mutassuk meg, hogy van a gráfban páratlan kör.

3. Egy páros gráf két pontosztálya $\{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $\{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha az alábbi táblázat i-edik sorának j-edik eleme 1. Döntsük el, hogy van-e G-ben teljes párosítás.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Egy 20 csúcsú teljes gráfból töröljük

   (a) egy háromszög

   (b) egy 3 élű párosítás

   éleit. Határozzuk meg mindkét esetben a kapott gráf kromatikus számát.

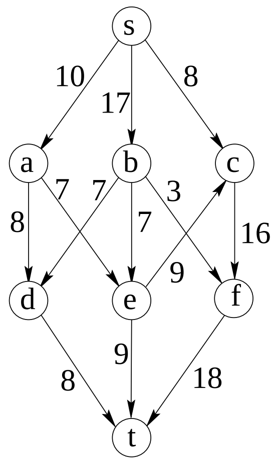
5. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő egészek relatív prímek (vagyis legnagyobb közös osztójuk 1). Határozzuk meg $\nu(G)$-t (a független élek maximális számát), $\rho(G)$-t (a lefogó élek minimális számát), $\alpha(G)$-t (a független pontok maximális számát) és $\tau(G)$-t (a lefogó pontok minimális számát).

6. Egy hat élből álló C kört tartalmazó gráf élkromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha töröljük a gráfból C éleit, akkor a kapott gráf élkromatikus száma legalább 8.

Minden feladat 10 pontot ér. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe II.
2. pótzh, 2014.05.12.

1. Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



2. Egy 10 csúcsú teljes gráfból törlünk két nem csatlakozó élet. Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, melyre a kapott gráf k-szorosan összefüggő.
3. Legyen n tetszőleges egész szám. Határozzuk meg a $3n^2 - 2n + 1$ és $n^2 - n$ számok legnagyobb közös osztóját.
4. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész n-et, melyre $\varphi(n) = 17$.
5. Oldjuk meg az
$$53x \equiv 3 \pmod{89}$$
lineáris kongruenciát.
6. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, melyre $n^7 - n$ osztható 9-cel.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe II.
aláíráspótló vizsga
az 1. zh pótlására, 2014.05.22.

1. Egy egyszerű gráfban a csúcsok fokszámai rendre 6,6,6,6,6,6,6,6,6,5,1. Mutassuk meg, hogy van a gráfban Hamilton-út.

2. Határozzuk meg azt a legnagyobb n számot, melyre előfordulhat, hogy egy n csúcsú egyszerű gráf és a komplementere is páros gráf.

3. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő egészek különbségének abszolút értéke legalább 3 és legfeljebb 9. Határozzuk meg G kromatikus számát.

4. Egy 20 csúcsú teljes gráfból töröljük egy négy csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

5. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő egészek legnagyobb közös osztója pontosan 2. Határozzuk meg $\nu(G)$-t (a független élek maximális számát) és $\tau(G)$-t (a lefogó pontok minimális számát).

6. Egy egyszerű gráfban a csúcsok fokszámai rendre 5,5,5,5,5,5,5,5,5,4,3. Határozzuk meg a gráf élkromatikus számát.

Minden feladat 10 pontot ér. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe II.
aláíráspótló vizsga
a 2. zh pótlására, 2014.05.22.

1. A G gráf háromszorosan összefüggő, de nem négyszeresen összefüggő. Mutassuk meg, hogy létezik két csúcsa, melyek közt a pontdiszjunkt utak maximális száma pontosan három.

2. Egy 10 csúcsú teljes gráfból törlünk két nem csatlakozó élet. Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, melyre a kapott gráf k-szorosan élösszefüggő.

3. Egy n egész szám háromszorosa 5 maradékot ad 20-szal osztva. Milyen maradékokat adhat n 30-cal osztva?

4. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész n-et, melyre $\varphi(n) = 46$.

5. Oldjuk meg a
$$146x \equiv 4 \pmod{234}$$
lineáris kongruenciát.

6. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, melyre $n^{42} - n$ osztható 41-gyel.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. március 20.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy 59 csúcsú egyszerű gráfban bármely két csúcs fokszámösszege 60-nál nagyobb páros szám. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van Euler-körséta?

* * * * *

Először megmutatjuk, hogy a gráfban minden fokszám páros. Ha ugyanis lenne páratlan fokú csúcs, akkor a fokszámösszegek paritására vonatkozó feltétel miatt az összes többi fokszám is páratlan lenne, (2 pont)
ez viszont lehetetlen, hiszen a gráfnak 59 csúcsa van, s így az összes csúcs fokszámösszege (ami a gráf élszámának kétszerese) páratlan lenne. (3 pont)
A gráfra teljesülnek az Ore-tétel feltételei: egyszerű (1 pont)
és bármely két nem szomszédos csúcs fokösszege (sőt, bármely két csúcs fokösszege) legalább a csúcsok száma (sőt, legalább eggyel több is), (1 pont)
így az Ore-tétel szerint létezik Hamilton-köre, (1 pont)
tehát a gráf összefüggő. (1 pont)
A tanultak szerint ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor létezik Euler-körsétája, a válasz a feladat kérdésére tehát igenlő. (1 pont)

2. Egy szabályos tízszögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (10 csúcsú, 20 élű) gráf klikkszámát és kromatikus számát.

* * * * *

Háromszöget könnyű mutatni a gráfban, a klikkszám tehát legalább 3. (1 pont)
Tegyük fel, hogy létezik 4 csúcsú klikk is, legyen ennek egyik csúcsa C. A klikk többi csúcsának C gráfbeli szomszédai közt kell lennie, amik a tízszögön vett két szomszéd és két másodszomszéd. (1 pont)
Az ezen csúcsok által meghatározott feszített részgráf azonban egy 3 élből áló út, ami nem tartalmaz háromszöget, így semelyik három sem lehet közülük benne a feltételezett 4 csúcsú klikkben, ami

ellentmondás. (1 pont)
A gráf klikkszáma tehát pontosan 3. (1 pont)
A gráf kromatikus száma 4, ennek igazolására mutatni kell egy jó 4-színezést és be kell látni, hogy 3 szín nem elég. (1 pont)
Jó 4-színezés: (1 pont)
A tízszögön vett bármely 3 egymás utáni csúcs 3 különböző színt kell kapjon, (1 pont)
így ha meg tudnánk színezni a gráfot 3 színnel, akkor a (tízszögön) harmadszomszédos csúcsok azonos színűek kéne, hogy legyenek, azaz azonos színű lenne az 1.,4.,7. csúcs, a 2.,5.,8. csúcs, illetve a 3.,6.,9. csúcs. (2 pont)
Ekkor azonban a 10. csúcs a 3 szín egyikével sem színezhető, tehát 3 szín nem elég a gráf színezéséhez. (1 pont)

Megjegyzés: a kromatikus számra vonatkozó alsó becslés persze az $\alpha = 3$ belátásán keresztül is egyszerű, de mivel a $\chi \geq \frac{n}{\alpha}$ egyenlőtlenség az előadáson nem szerepelt, aki használja, annak persze igazolnia is kell.

3. Legyen G 99 csúcsú egyszerű gráf, melyben minden csúcs fokszáma $k > 0$. Bizonyítsuk be, hogy G élkromatikus száma páratlan.

* * * * *

Természetesen $\chi_e(G) \geq k$. (1 pont)
Mivel a gráf egyszerű, alkalmazhatjuk Vizing tételét, (1 pont)
azaz $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1 = k + 1$. (1 pont)
Bármely gráfban az összes fokszámot összeadva az élek számának kétszeresét, vagyis páros számot kapunk, (1 pont)
azaz $99k$ páros és így k is az. (1 pont)
Így azt kéne belátnunk, hogy az élkromatikus szám nem k, hanem $k + 1$. (1 pont)
Ha $\chi_e(G) = k$ lenne, akkor minden csúcshoz csatlakozna minden színosztályból él, (2 pont)
hiszen minden csúcshoz k él csatlakozik és ezek közt nem lehet két azonos színű. (1 pont)
Az egy adott színhez (mondjuk az 1-eshez, ha egyáltalán van nem üres színosztály, ami $k > 0$-ból következik – e megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot) tartozó élek által alkotott részgráfban ekkor minden pont foka pontosan egy lenne (vagyis az élek teljes párosítást alkotnának), ami lehetetlen, mert a részgráfban a fokösszeg 99 lenne (avagy páratlan csúcsú gráfban nincs teljes párosítás). (1 pont)

4. Egy adott intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha az intervallumrendszerből törlünk néhány olyan intervallumot, melyek közt semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor a visszamaradó intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma legalább 8.

* * * * *

Tegyük fel indirekten, hogy a kromatikus szám legfeljebb 7 és próbáljuk az eredeti gráfot a maradék gráf egy 7-színezésének segítségével megszínezni. (2 pont)
Ha ezt meg tudjuk tenni úgy, hogy a törölt intervallumoknak megfelelő csúcsoknak elég két szín, melyek az első 7-től különböznek, akkor ellentmondásra fogunk jutni, hiszen ekkor elég lenne 9 szín az eredeti gráf színezéséhez. (3 pont)
A törölt intervallumokhoz tartozó intervallumgráf a feltétel szerint nem tartalmaz háromszöget, a klikkszáma tehát legfeljebb 2. (2 pont)
Mivel az előadáson tanultak szerint az intervallumgráfok kromatikus száma és klikkszáma azonos,

a törölt intervallumoknak megfelelő csúcsok színezéséhez valóban elegendő két szín. (3 pont)

5. Egy páros gráf két pontosztálya $\{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $\{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha az alábbi táblázat i. sorának j. eleme 1. Döntsük el, hogy van-e G-ben teljes párosítás.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrixból látható, hogy az a_1, a_4, a_5, a_7 csúcsok minden szomszédja a b_3, b_5, b_7 csúcsok közül kerül ki, azaz $N(\{a_1, a_4, a_5, a_7\}) \subseteq \{b_3, b_5, b_7\}$ (valójában az egyenlőség is teljesül, persze). (5 pont)
Így nem létezhet a gráfban az összes a_i-t fedő párosítás, hiszen a felsorolt 4 csúcs mindegyike nem kaphat párt a 3 rendelkezésre álló lehetőségből. (4 pont)
Ezek szerint teljes párosítás sem létezik a gráfban. (1 pont)

6. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a hozzájuk tartozó számok szorzata osztható 4-gyel vagy 9-cel (vagy mindkettővel). Határozzuk meg $\alpha(G)$-t (a független pontok maximális számát) és $\varrho(G)$-t (a lefogó élek minimális számát).

* * * * *

Érdemes először a gráf szerkezetét megállapítani. Jelöljük az 1 és 100 közti páros, 3-mal osztható, 4-gyel osztható, 9-cel osztható számok halmazát rendre P-vel, H-val, N-nel, K-val, a többi 1 és 100 közti szám halmazát (vagyis a páratlan, hárommal nem osztható számokat) pedig M-mel. P és H (50, illetve 33 elemű) klikket alkotnak (melyeknek 16 közös eleme van). E két klikken belül az N-beli és a K-beli csúcsok a gráf minden csúcsával össze vannak kötve (önmagukat leszámítva), M elemei pedig (csak) az N-beli és a K-beli csúcsokkal vannak összekötve. (2 pont)
P-ből és H-ból nyilván legfeljebb egy-egy csúcs kerülhet be független ponthalmazba, (1 pont)
M elemei viszont mind bekerülhetnek (ha P-ből és H-ból N-en, illetve K-n kívüli csúcsot választunk), (2 pont)
így a maximális független ponthalmaz mérete $|M| + 2 = 100 - (50 + 33 - 16) + 2 = 35$. (1 pont)
A minimális lefogó élhalmazhoz célszerű minél nagyobb párosítást találnunk. A 33 M-beli pontot csak N és K elemeivel tudjuk párosítani, ezért érdemes megszámolni, hogy ezek hányan vannak: $|N| = 25$, $|K| = 11$, a két halmaz metszetében (36-tal osztható számok) pedig két elem van, vagyis $|N \cup K| = 34$. (1 pont)
Így a 33 M-beli pontot mind össze tudjuk párosítani N és K elemeivel, (2 pont)
a maradék csúcsokon pedig az eddig látottak alapján nyilván lesz teljes párosítás, vagyis a gráfnak magának is van teljes párosítása, azaz $\nu(G) = 50$. Innen Gallai tétele alapján $\varrho(G) = 100 - \nu(G) = 50$. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. április 24.

Általános alapelvek.

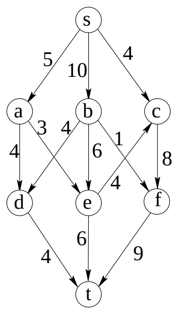
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



* * * * *

Jó folyam, jó indoklás a maximalitásra 5 pont, jó vágás, jó indoklás a minimalitásra szintén 5 pont. Picit hiányos indoklás esetén 1-1 pontot vonjunk le, nagyobb hiány esetén ennél többet (tipikus példa: jó folyam, jó vágás, semmi indoklás - ez max. 6 pont, ha viszont a két érték nem egyezik, akkor ennél jóval kevesebb). Ha valaki a javítóutas algoritmust használja, de hibázik (és ezért nem jön ki megoldás), akkor max. 2-3 pontot kaphat a folyam részre, ha kiderül, hogy hogy keresne minimális vágást, akkor erre is adható max. 2-3 pont. Ha a hibá(k)ról nem derül ki, hogy számolási vagy elvi hiba, akkor szigorúan járjunk el, azaz tekintsük elvinek.

2. Húzzunk be 3 élet két diszjunkt 5 csúcsú teljes gráf csúcsai közé úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Igaz-e hogy G minden esetben
a) háromszorosan összefüggő?
b) háromszorosan élösszefüggő?

* * * * *

a) Ha a három újonnan behúzott élnek van közös csúcsa, akkor ezt a csúcsot elhagyva G nyilván szétesik, tehát nem lehet háromszorosan összefüggő (sőt, kétszeresen összefüggő sem). (3 pont)
Természetesen más jó ellenpélda is van.

b) Megmutatjuk, hogy G összefüggő marad, ha két tetszőleges élét elhagyjuk, a b) állítás tehát igaz. Ha a két élet ugyanabból az 5 csúcsú teljes gráfból hagyjuk el, az akkor is összefüggő marad, hiszen bármely két csúcs közt volt 4 éldiszjunkt út, amiből legalább 2 meg is maradt. (3 pont)
Másrészt a három újonnan behúzott él közül legalább egy minden esetben megmarad, (2 pont)
így a két él elhagyása után a két 5 csúcsú (eredetileg) teljes gráf egy-egy csúcsa között vezet él. (1 pont)
Mivel láttuk, hogy a két rész maga is összefüggő, G tetszőleges két csúcsa között a két él elhagyása után is van út, ezzel az állítást beláttuk. (1 pont)

3. Oldjuk meg a

$$34x \equiv 6 \pmod{98}$$

lineáris kongruenciát.

* * * * *

98 és 34 lnko.-ja 2, ez osztja a 6-ot, így lesz megoldás (mégpedig 2 darab modulo 98, de ezt nem muszáj itt megállapítani). (1 pont)
Osszuk le a kongruenciát 2-vel, ekkor az eredetivel ekvivalens $17x \equiv 3 \pmod{49}$ kongruenciát kapjuk. (1 pont)
Ezt a lineáris kongruenciát Euklideszi algoritmussal oldjuk meg. Tudjuk, hogy $49x \equiv 0 \pmod{49}$. (1 pont)
Innen $15x = 49x - 2 \cdot 17x \equiv 0 - 2 \cdot 3 \pmod{49}$. (2 pont)
Így $2x = 17x - 15x \equiv 3 - (-2 \cdot 3) \pmod{49}$, (2 pont)
ahonnan $x = 15x - 7 \cdot 2x \equiv (-2 \cdot 3) - 7 \cdot (3 - (-2 \cdot 3)) \pmod{49}$, (2 pont)
azaz $x \equiv -69 \equiv 29 \pmod{49}$. (1 pont)

Ha nem esik szó arról, hogy Euklideszi algoritmussal dolgozunk, akkor meg kell indokolni, hogy a kapott megoldás miért jó és miért nincs más megoldás. Ezek hiányáért 1-1 pontot vonjunk le. A megoldást ugyanakkor nem muszáj modulo 98 is megadni, a feladat szövege szerint ez nem elvárás.
Természetesen $17x \equiv 3 \pmod{49}$ megoldása másképp is lehetséges, pl.
mivel 3 és 49 relatív prímek, (1 pont)
a kongruenciát 3-mal szorozva az eredetivel ekvivalens (1 pont)
$51x \equiv 9 \pmod{49}$ kongruenciát kapjuk, ahonnan $2x \equiv 9 \pmod{49}$. (3 pont)
A jobb oldalhoz a modulust hozzáadva $2x \equiv 58 \pmod{49}$. (1 pont)
Mivel 2 és 49 relatív prímek, (1 pont)
az $x \equiv 29 \pmod{49}$ kongruencia is ekvivalens az eredetivel. (2 pont)

4. Határozzuk meg $46^{47^{48}}$ 25-tel vett osztási maradékát.

* * * * *

Mivel 46 és 25 relatív prímek, (1 pont)
az Euler-Fermat tétel szerint $46^{\varphi(25)} \equiv 1 \pmod{25}$. (1 pont)
$\varphi(25) = 25 - 5 = 20$. (1 pont)
Most tehát a 47^{48} szám 20-szal vett osztási maradékára vagyunk kíváncsiak. (1 pont)
Mivel 47 és 20 is relatív prímek, (1 pont)
az Euler-Fermat tétel szerint $47^{\varphi(20)} \equiv 1 \pmod{20}$. (1 pont)
$20 = 2^2 \cdot 5$, így $\varphi(20) = (4-2) \cdot 4 = 8$, (1 pont)
tehát $47^{48} = (47^8)^6$ 20-szal osztva 1 maradékot ad. (1 pont)
Így $46^{47^{48}} \equiv 46^{20k+1} \pmod{25}$ valamely k egészre. (1 pont)

Mivel $46^{20k} \equiv 1 \pmod{25}$, a $46^{47^{48}}$ szám 25-tel vett osztási maradéka kongruens 46-tal modulo 25, azaz a keresett maradék 21. (1 pont)

5. Az n szám kettes számrendszerbeli alakja 110100101101100011011. Határozzuk meg n^n kettes számrendszerbeli alakjának utolsó négy jegyét.

* * * * *

Az utolsó négy jegy meghatározásához az iskolában tanultak szerint a kérdéses szám 16-os osztási maradékát kell megtalálni. (1 pont)
Ha k-val jelöljük n 16-os osztási maradékát, akkor nyilván $k^n \equiv n^n \pmod{16}$. (1 pont)
Esetünkben n kettes számrendszerbeli alakjából $k = 11$, (1 pont)
tehát 11^n 16-os osztási maradékára vagyunk kíváncsiak. Mivel 11 és 16 relatív prímek, (1 pont)
az Euler-Fermat tétel szerint $11^{\varphi(16)} \equiv 1 \pmod{16}$. (1 pont)
$16 = 2^4$, így $\varphi(16) = 8$, tehát az n szám 8-cal vett osztási maradékát kell megkeresni. (1 pont)
A kettes számrendszerbeli alak szerint (vagy a 16-os maradékból) ez 3, (1 pont)
így $11^n \equiv 11^{8k+3} \pmod{16}$ valamely k egészre. Mivel $11^{8k} \equiv 1 \pmod{16}$, a 11^n szám 16-tal vett osztási maradéka kongruens 11^3-nal modulo 16. (1 pont)
Mivel $11^2 = 121$ 9 maradékot ad 16-tal osztva, $11^3 \equiv 11 \cdot 9 = 99 \equiv 3 \pmod{16}$, a keresett maradék tehát 3, (1 pont)
az utolsó négy számjegy pedig így 0011. (1 pont)

6. Legyen $H = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ és $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$. Döntsük el, hogy $(H, *)$ csoport-e.

* * * * *

$(a, b), (c, d) \in H$ esetén $(a, b) * (c, d) \in H$, így $*$ művelet a H halmazon. (2 pont)
$((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (ac, bd) * (e, f) = (ace, bdf)$
és $(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (ce, df) = (ace, bdf)$, így a $*$ művelet asszociatív H-n. (2 pont)
Mivel $(1, 1) * (a, b) = (a, b)$ és $(a, b) * (1, 1) = (a, b)$, az $(1, 1)$ elem egységelem. (2 pont)
Ha $(a, b) \in H$, akkor a és b sem lehet 0, így az $\frac{1}{a}$ és $\frac{1}{b}$ számok léteznek (1 pont)
és $(a, b) * (\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) = (1, 1)$, továbbá $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) * (a, b) = (1, 1)$, tehát egy tetszőleges (a, b) elem inverze $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$. (2 pont)
A fentiek alapján a kérdéses struktúra tehát csoport. (1 pont)

Az egységelem és az inverz esetén is fontos, hogy mindkét oldali szorzásnál teljesüljön az egyenlőség. Aki ezt nem ellenőrzi, attól 1-1 pontot vonjunk le. Ha valaki igazolja a kommutativitást, akkor erre természetesen nincs szükség.

Bevezetés a számításelméletbe II.
1. pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. május 12.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy egyszerű gráf fokszámsorozata 7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,2. Mutassuk meg, hogy van a gráfban 12 csúcsú kör.

* * * * *

Ha töröljük a gráfból a 2 fokú csúcsot, (2 pont)
akkor minden csúcs foka legfeljebb eggyel csökken, (1 pont)
hiszen a gráf egyszerű. (1 pont)
A törlés után tehát minden megmaradt csúcs foka legalább 6. (1 pont)
Mivel ez a gráf is egyszerű, (1 pont)
és 12 csúcsa van, Dirac tétele szerint van benne Hamilton-kör, (2 pont)
ami az eredeti gráf egy 12 csúcsú köre. (2 pont)

2. Egy egyszerű gráf fokszámsorozata 6,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4. Mutassuk meg, hogy van a gráfban páratlan kör.

* * * * *

Egy gráfban pontosan akkor van páratlan kör, ha a gráf nem páros, (2 pont)
ezért elég azt megmutatnunk, hogy a kérdéses gráf nem páros. (1 pont)
Tegyük fel indirekten, hogy ez nem így van. Ekkor a gráf csúcshalmaza két részre osztható úgy, hogy az egyes részeken belül nem megy él. (1 pont)
A két részből kimenő élek száma ekkor azonos (és persze azonos a gráf éleinek számával). (1 pont)
Az egyes részekből kimenő élek száma nem más, mint a részben szereplő csúcsok fokszámainak összege. (1 pont)
A gráfunk fokszámösszege 50, tehát 25 éle van, (1 pont)
így a kérdéses két részre osztás nem lehetséges, hiszen a gráfban minden fok páros, tehát a csúcsok semelyik részhalmazának sem lehet páratlan (így speciálisan 25 sem) a fokszámösszege. (3 pont)

Megjegyzés. Azt, hogy a kérdéses kettéosztás nem lehetséges, természetesen számos más módon is meg lehet mutatni. Pl. egy kivételével minden fokszám osztható 4-gyel, így az egyik oldali fokszám-összeg osztható kéne legyen néggyel, de lehet nagyságrendi megfontolásokra is hivatkozni (6 darab 4-es nem elég a 25 élhez, stb.).

3. Egy páros gráf két pontosztálya $\{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $\{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha az alábbi táblázat i-edik sorának j-edik eleme 1. Döntsük el, hogy van-e G-ben teljes párosítás.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrixból látható, hogy az a_3, a_4, a_5, a_8 csúcsok minden szomszédja a b_2, b_5, b_8 csúcsok közül kerül ki, azaz $N(\{a_3, a_4, a_5, a_8\}) \subseteq \{b_2, b_5, b_8\}$. (5 pont)
Így nem létezhet a gráfban az összes a_i-t fedő párosítás, hiszen a felsorolt 4 csúcs mindegyike nem kaphat párt a 3 rendelkezésre álló lehetőségből. (4 pont)
Ezek szerint teljes párosítás sem létezik a gráfban. (1 pont)

Megjegyzés. Természetesen lehet a Hall- vagy Frobenius-tétellel is érvelni, de itt csak a könnyen belátható irányra van szükség. Jó megoldás az is, ha futtatjuk (és dokumentáljuk) a javítóutas algoritmust és az nem talál teljes párosítást.

4. Egy 20 csúcsú teljes gráfból töröljük

(a) egy háromszög

(b) egy 3 élű párosítás

éleit. Határozzuk meg mindkét esetben a kapott gráf kromatikus számát.

* * * * *

(a) A háromszög csúcsai kaphatják ugyanazt a színt, hiszen semelyik kettő sincs összekötve a gráfban, a többi csúcsot pedig színezzük egy-egy új színnel. (1 pont)
Ekkor a gráf egy 18-színezését kapjuk, így a kromatikus szám legfeljebb 18. (1 pont)
A háromszög egyik csúcsa és a háromszögön kívüli csúcsok egy 18 csúcsú klikket alkotnak, (1 pont)
így a kromatikus szám legalább 18. (1 pont)
Ezek szerint a kromatikus szám pontosan 18. (1 pont)

(b) A párosítás egy-egy élének két végpontja színezhető ugyanazzal a színnel, a párosítás által nem fedett pontokhoz pedig használjunk egy-egy új színt. (1 pont)
Ekkor a gráf egy 17-színezését kapjuk, így a kromatikus szám legfeljebb 17. (1 pont)
A három él egy-egy végpontja és a párosítás által nem fedett csúcsok egy 17 csúcsú klikket alkotnak, (1 pont)
így a kromatikus szám legalább 17. (1 pont)
Ezek szerint a kromatikus szám pontosan 17. (1 pont)

5. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő egészek relatív prímek (vagyis legnagyobb közös osztójuk 1). Határozzuk meg $\nu(G)$-t (a független élek maximális számát), $\rho(G)$-t (a lefogó élek minimális számát), $\alpha(G)$-t (a független pontok maximális számát) és $\tau(G)$-t (a lefogó pontok minimális számát).

* * * * *

A szomszédos egészek mindig relatív prímek (hiszen minden közös osztójuk osztja a különbségüket, azaz az 1-et is), (1 pont)
így a gráfban könnyű megadni egy teljes párosítást ($1-2, 3-4, \ldots, 99-100$), (1 pont)
tehát $\nu(G) = 50$. (1 pont)
A második Gallai-tétel szerint így $\rho(G) = 50$. (1 pont)
A páros számok független halmazt alkotnak, hiszen semelyik kettő sem relatív prím, (1 pont)
így $\alpha(G) \geq 50$. (1 pont)
Az első Gallai-tétel szerint így $\tau(G) \leq 50$. (1 pont)
Másrészt mivel $\tau(G) \geq \nu(G)$ minden G gráfra teljesül, (1 pont)
$\tau(G) = 50$ (1 pont)
és így persze $\alpha(G) = 50$. (1 pont)

$\alpha \leq 50$ mellett persze lehet úgy is érvelni, hogy 51 darab 1 és 100 közti szám közt lesz két szomszédos (pl. a skatulya-elv miatt), ezek pedig relatív prímek lesznek.

6. Egy hat élből álló C kört tartalmazó gráf élkromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha töröljük a gráfból C éleit, akkor a kapott gráf élkromatikus száma legalább 8.

* * * * *

Tegyük fel indirekten, hogy a kapott gráf élkromatikus száma legfeljebb 7 (1 pont)
és használjuk e gráf élszínezését az eredeti gráf éleinek színezéséhez. (2 pont)
Ekkor C élei kivételével minden élt megszíneztünk. (1 pont)
Mivel C egy páros kör, az éleit meg lehet színezni két színnel. (2 pont)
Az eredeti gráfot ekkor tehát legfeljebb 9 színnel meg tudnánk színezni (legfeljebb 7 a törlés utáni gráf éleire és két új C éleire), (3 pont)
ami ellentmondás. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
2. pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. május 12.

Általános alapelvek.

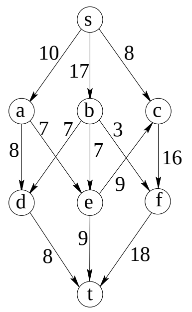
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



* * * * *

Jó folyam, jó indoklás a maximalitásra 5 pont, jó vágás, jó indoklás a minimalitásra szintén 5 pont. Picit hiányos indoklás esetén 1-1 pontot vonjunk le, nagyobb hiány esetén ennél többet (tipikus példa: jó folyam, jó vágás, semmi indoklás - ez max. 6 pont, ha viszont a két érték nem egyezik, akkor ennél jóval kevesebb). Ha valaki a javítóutas algoritmust használja, de hibázik (és ezért nem jön ki megoldás), akkor max. 2-3 pontot kaphat a folyam részre, ha kiderül, hogy hogy keresne minimális vágást, akkor erre is adható max. 2-3 pont. Ha a hibá(k)ról nem derül ki, hogy számolási vagy elvi hiba, akkor szigorúan járjunk el, azaz tekintsük elvinek.

2. Egy 10 csúcsú teljes gráfból törlünk két nem csatlakozó élet. Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, melyre a kapott gráf k-szorosan összefüggő.

* * * * *

Mivel a kapott gráfnak (nevezzük G-nek) van olyan csúcsa, melynek foka 8, a keresett szám 8-nál nem lehet nagyobb. (1 pont)
Megmutatjuk másrészt, hogy G 8-szorosan összefüggő. Ehhez szükséges, hogy G-nek legyen legalább

9 csúcsa, ez természetesen teljesül. (1 pont)
Ezen kívül annak kell teljesülni, hogy bármely legfeljebb 7 csúcsot törölve G összefüggő marad. (1 pont)
Legfeljebb 7 csúcs törlése után visszamarad legalább három csúcs és bármely három csúcs által feszített részgráfnak legalább két éle lesz, (2 pont)
hiszen G-ből két nem csatlakozó élet töröltünk. (2 pont)
Így a visszamaradó gráfban bármely három pont közül bármely kettő közt lesz (legfeljebb 2 hosszú) út, (1 pont)
így a visszamaradó gráf összefüggő (hiszen bármely két csúcshoz választhatunk egy harmadikat tetszőlegesen, majd erre a három csúcsra alkalmazzuk az imént látott állítást.) (1 pont)
Mindezek alapján a keresett szám tehát 8. (1 pont)

Ha valaki nem legfeljebb, hanem pontosan 7 csúcs törlését vizsgálja, akkor (ha egyébként jó a megoldása) 9 pontot adhatunk (azaz az utolsó előtti 1 pont kivételével – indokolt esetben – megadhatjuk a pontokat).

3. Legyen n tetszőleges egész szám. Határozzuk meg a $3n^2 - 2n + 1$ és $n^2 - n$ számok legnagyobb közös osztóját.

* * * * *

Az a és b egészek bármely közös osztója osztja az $a - kb$ számot is tetszőleges k egész esetén. (Lehet hivatkozni ehelyett az Euklideszi algoritmusra is, bár ez itt nem teljesen precíz.) (2 pont)
Ez alapján a keresett lnko. osztja a $(3n^2 - 2n + 1) - 3(n^2 - n) = n + 1$ számot. (2 pont)
Ezt felhasználva, az előbbihez hasonlóan, az lnko. osztja az $(n^2 - n) - (n - 2)(n + 1) = 2$ számot is, (3 pont)
ahonnan az lnko. vagy 1 vagy 2. (2 pont)
Mivel $n^2 - n$ mindig páros, az lnko. pontosan akkor lesz 2, ha $3n^2 - 2n + 1$ páros, azaz ha n páratlan, minden más esetben pedig 1. (1 pont)

4. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész n-et, melyre $\varphi(n) = 17$.

* * * * *

Ismert, hogy ha $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, akkor $\varphi(n) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \dots (p_r^{a_r} - p_r^{a_r-1})$. (1 pont)
Mivel $\varphi(n) = 17$ prím, a fenti szorzat egyik tényezője 17. (2 pont)
Ekkor valamely i-re $a_i \geq 1$ és $p_i^{a_i} - p_i^{a_i-1} = p_i^{a_i-1}(p_i - 1) = 17$. (1 pont)
Így $(p_i - 1)|17$, (2 pont)
ahonnan $p_i = 2$ vagy $p_i = 18$. (2 pont)
Mivel 2^{a_i-1} nem lehet 17, 18 pedig nem prím, p_i sem 2, sem 18 nem lehet, (1 pont)
vagyis a feltételnek megfelelő n szám nem létezik. (1 pont)

5. Oldjuk meg az

$$53x \equiv 3 \pmod{89}$$

lineáris kongruenciát.

* * * * *

53 és 89 lnko.-ja 1, ez osztja a 3-at, így lesz megoldás (mégpedig 1 darab modulo 89, de ezt nem muszáj itt megállapítani). (1 pont)
A kongruenciát Euklideszi algoritmussal oldjuk meg. Tudjuk, hogy $89x \equiv 0 \pmod{89}$. (1 pont)
Innen $36x = 89x - 53x \equiv 0 - 3 \pmod{89}$. (2 pont)

Így $17x = 53x - 36x \equiv 3 - (-3) = 6 \pmod{89}$, (2 pont)
ahonnan $2x = 36x - 2 \cdot 17x \equiv -3 - 2 \cdot 6 = -15 \pmod{89}$, (2 pont)
végül $x = 17x - 8 \cdot 2x \equiv 6 - 8 \cdot (-15) = 126 \equiv 37 \pmod{89}$. (2 pont)

Ha nem esik szó arról, hogy Euklideszi algoritmussal dolgozunk, akkor meg kell indokolni, hogy a kapott megoldás miért jó és miért nincs más megoldás. Ezek hiányáért 1-1 pontot vonjunk le. Természetesen a lineáris kongruencia másképp is megoldható, pl.
mivel 2 és 89 relatív prímek, a kongruenciát 2-vel szorozva az eredetivel ekvivalens (1 pont)
$106x \equiv 6 \pmod{89}$ kongruenciát kapjuk, ahonnan $17x \equiv 6 \pmod{89}$. (2 pont)
Mivel 5 és 89 is relatív prímek, a kongruenciát 5-tel szorozva az eredetivel ekvivalens (1 pont)
$85x \equiv 30 \pmod{89}$ kongruenciát kapjuk, ahonnan $-4x \equiv 30 \pmod{89}$. (2 pont)
A kongruenciát -2-vel osztva $2x \equiv -15 \pmod{89}$. (1 pont)
A modulus nem változott, hiszen -2 és 89 relatív prímek. (1 pont)
A jobb oldalhoz a modulust hozzáadva $2x \equiv 74 \pmod{89}$. (1 pont)
Mivel 2 és 89 még mindig relatív prímek, az $x \equiv 37 \pmod{49}$ kongruencia is ekvivalens az eredetivel. (1 pont)

6. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, melyre $n^7 - n$ osztható 9-cel.

* * * * *

$n^7 - n = n(n^6 - 1)$, így ha n vagy $n^6 - 1$ osztható 9-cel, akkor $n^7 - n$ is. (2 pont)
Így jó lesz minden olyan n egész, mely osztható 9-cel, (1 pont)
és jó lesz minden olyan n, ami relatív prím 9-cel (azaz nem osztható 3-mal), (1 pont)
hiszen ezekre az Euler-Fermat tétel szerint teljesül, hogy $n^6 \equiv 1 \pmod{9}$, (2 pont)
hiszen $\varphi(9) = 6$. (1 pont)
Hátra van azon számok vizsgálata, melyek oszthatók 3-mal, de nem oszthatók 9-cel. Mivel ilyenkor $n^6 - 1$ nem osztható 3-mal, (1 pont)
az $n(n^6 - 1) = n^7 - n$ szorzat nem lesz osztható 9-cel. (1 pont)
A feltételnek megfelelő n számok tehát pontosan a 3-mal nem osztható számok és a 9-cel osztható számok. (1 pont)