Bevezetés a számításelméletbe II.
pótzárthelyi feladatok
pontozási útmutató
2022. május 24.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, gondolatért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül hivatkozni azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet.

1. Piréziában a rendszámok 5 karakterből állnak, az angol abc 26 betűjét és a 10 számjegyet lehet használni. Ezen kívül csak két szabály van: az első és az utolsó helyen nem állhat számjegy és semelyik két egymás melletti karakter sem lehet számjegy. Hány rendszám készíthető Piréziában? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

Első megoldás. Foglalkozzunk először a 3 középső karakterrel. Ezek közt csak két számjegy lehet és az is csak akkor, ha a két számjegy a 2. és a 4. pozícióban van (ellenkező esetben lenne két szomszédos számjegy). (1 pont)
Három esetet kell tehát megkülönböztetnünk: amikor 0, 1, illetve 2 számjegy van a középső 3 karakter között. (1 pont)
0 számjegy 26^3-féleképp fordulhat elő, mert az első karakter 26-féle lehet, majd mind a 26 kezdést 26-féleképp folytathatjuk, és az így kapott 26^2-féle esetet 26-féleképp fejezhetjük be (indoklás gyanánt hivatkozhatunk arra is, hogy ez az ismétléses variáció tipikus esete). (1 pont)

1 számjegy $3 \cdot 10 \cdot 26^2$-féleképp fordulhat elő, mert a számjegy helye 3-féle lehet, majd az imént látotthoz hasonló döntéseket kell hoznunk: a számjegy 10-féle, a betűk 26-félék lehetnek. (2 pont)

2 számjegy $10^2 \cdot 26$-féleképp fordulhat elő, mert a számjegyek helye ekkor rögzített. (2 pont)

Mivel a 3 eset közül pontosan az egyik fordul elő, (1 pont)

ez összesen $26^3 + 3 \cdot 10 \cdot 26^2 + 10^2 \cdot 26 = 26 \cdot (26 \cdot 26 + 30 \cdot 26 + 100)$ lehetőség. (1 pont)

A rendszámok számát ebből (a korábban látott indoklás miatt) kétszeri 26-tal szorzással kapjuk (hiszen az első és az utolsó karakter is 26-féle lehet), az tehát $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot (26 \cdot 26 + 30 \cdot 26 + 100)$. (1 pont)

Második megoldás. A karakterek közt csak két számjegy lehet és az is csak akkor, ha a két számjegy a 2. és a 4. pozícióban van (ellenkező esetben lenne két szomszédos számjegy vagy a szélső karakterek valamelyike számjegy lenne). (2 pont)

Három esetet kell tehát megkülönböztetnünk: amikor 0, 1, illetve 2 számjegy van a rendszámban. (1 pont)

0 számjegy 26^5-féleképp fordulhat elő, mert az első karakter 26-féle lehet, majd mind a 26 kezdést 26-féleképp folytathatjuk, az így kapott 26^2-féle esetet 26-féleképp folytathatjuk, s.í.t. (indoklás gyanánt hivatkozhatunk arra is, hogy ez az ismétléses variáció tipikus esete). (1 pont)

1 számjegy $3 \cdot 10 \cdot 26^4$-féleképp fordulhat elő, mert a számjegy helye 3-féle lehet (hiszen nem lehet szélen), majd az imént látotthoz hasonló döntéseket kell hoznunk: a számjegy 10-féle, a betűk 26-félék lehetnek. (2 pont)

2 számjegy $10^2 \cdot 26^3$-féleképp fordulhat elő, mert a számjegyek helye ekkor rögzített. (2 pont)

Mivel a 3 eset közül pontosan az egyik fordul elő, (1 pont)

ez összesen $26^5 + 3 \cdot 10 \cdot 26^4 + 10^2 \cdot 26^3 = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot (26 \cdot 26 + 30 \cdot 26 + 100)$. (1 pont)

Bár a feladat szövege a négy alapművelet használatát engedélyezi, ne vonjunk le pontot a hatványok használatáért.

2. Egy 10 csúcsú fában van két 5 fokú csúcs. Igazoljuk, hogy ez a két csúcs szomszédos.

* * * * *

Első megoldás. A tanultak szerint n csúcsú fának $n-1$ éle van, így a kérdéses fa 9 élű. (2 pont)

Ha a két 5 fokú csúcs nem lenne szomszédos, (2 pont)

akkor összesen 10 (különböző) él vezetne ki belőlük, (5 pont)

ami lehetetlen, így a két csúcs csakugyan szomszédos kell legyen. (1 pont)

Második megoldás. Legyen a fa leveleinek (vagyis 1 fokú csúcsainak) száma k, a két 5 fokú csúcstól különböző nem levelek száma ekkor $10 - k - 2$. (1 pont)

A fokszámok összege ekkor legalább $2 \cdot 5 + k + 2(10 - k - 2) = 26 - k$. (2 pont)

A fokszámok összegéről ugyanakkor tudjuk, hogy a fa élszámának kétszerese, vagyis a tanultak szerint (10 csúcsú fának 9 éle van) 18. (2 pont)

Így $26 - k \leq 18$, (1 pont)

vagyis $k \geq 8$. Mivel k nem lehet nagyobb 8-nál (hiszen csak 10 csúcs van, melyek közül legalább 2 nem levél), $k = 8$. (1 pont)

Ha a két 5 fokú csúcs nem lenne szomszédos, akkor tehát csak levelek lennének a szomszédaik, (1 pont)

így a gráf nem lenne összefüggő, ami lehetetlen. (Azzal is érvelhetünk, hogy ekkor a gráfnak 12 csúcsa lenne, hiszen az 5 fokú csúcsok 1 fokú szomszédai ekkor mind különbözők lennének). (2 pont)

3. A G gráfra teljesül, hogy bármely csúcsát törölve, a kapott gráfnak van Hamilton-köre. Igaz-e, hogy G-nek biztosan van Hamilton-útja?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

G-nek nincs izolált pontja, (1 pont)
ellenkező esetben ugyanis az izolált ponttól különböző csúcsok bármelyikét törölve, a kapott gráfnak nem lenne Hamilton-köre. (2 pont)
Legyen v a G egy tetszőleges csúcsa. A v törlésével kapott gráfnak a feladat feltétele szerint van Hamilton-köre, egy ilyet jelöljünk H-val. (1 pont)
Mivel v nem izolált pont, létezik egy w szomszédja G-ben. (2 pont)
Hagyjuk el a H körből a w-re illeszkedő két él egyikét, a kapott utat jelöljük P-vel. (2 pont)
Ha most a P utat megtoldjuk a $\{v, w\}$ éllel, akkor G egy Hamilton-útját kapjuk, az állítás tehát igaz. (2 pont)

Persze az is igaz, hogy G összefüggő (sőt, könnyű belátni, hogy 3-szorosan összefüggő), nem csak az, hogy nincs izolált pontja, de a bizonyítás során elég ez utóbbit kihasználni. Nem igaz viszont, hogy G-nek biztosan van Hamilton-köre is, a legkisebb ellenpélda erre a Petersen-gráf. A feladat feltételének eleget tevő, de Hamilton-körrel nem rendelkező gráfokat hypohamiltonian gráfoknak nevezik és a vizsgálatuknak komoly irodalma van.

Megjegyzés. A feladat egy picit pontatlanul lett kitűzve, nem követeltük meg ugyanis, hogy a gráf egyszerű (vagy legalább hurokélmentes) legyen, így szigorúan véve az állítás nem igaz: egy két csúcsból és a csúcsokra illeszkedő egy-egy hurokélből álló gráf teljesíti a feltételt, de nincs Hamilton-útja. Aki erre a tényre mutat rá, az természetesen maximális pontszámot kap. (Érdemes megfigyelni, hogy a fenti bizonyításban hol kell kihasználni, hogy a gráf egyszerű.)

4. Legyenek egy egyszerű gráf csúcsai az egész számok 1-től 20-ig, két különböző csúcs között vezessen él pontosan akkor, ha a megfelelő számok szorzata osztható 10-zel. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

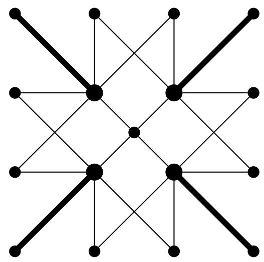
A $2, 5, 10, 20$ csúcsok klikket alkotnak a gráfban, hiszen bármelyik kettő szorzata osztható 10-zel, (2 pont)
a kromatikus szám tehát legalább 4. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy a gráf színezhető 4 színnel, vagyis a kromatikus szám pontosan 4. (1 pont)
Színezzük a $2, 5, 10, 20$ csúcsokat rendre a piros, kék, zöld, sárga színekkel, ezt a színezést terjesztjük ki a gráf összes csúcsára. (1 pont)
A páratlan számokat színezzük kékre, (1 pont)
a páros 5-tel nem oszthatókat pedig pirosra, ezzel minden hátralévő csúcsot megszíneztünk. (1 pont)
Ez a színezés valóban jó lesz: zöld és sárga csúcsból csak egy van, a kékek mind páratlanok, így semelyik kettőnek a szorzata sem lehet 10-zel osztható, a piros csúcsok pedig nem oszthatók 5-tel, így szintén teljesül, hogy semelyik kettő szorzata sem lehet 10-zel oszható. (3 pont)

A 10 és 20 csúcsok minden más csúccsal össze vannak kötve, de ezért a megállapításért még ne adjunk pontot. Ha azonban valaki rámutat, hogy emiatt ez a két csúcs saját színt kell, hogy kapjon, akkor adjunk 1 pontot (amennyiben a szerző ezzel nem lépi túl a 10 pontot).

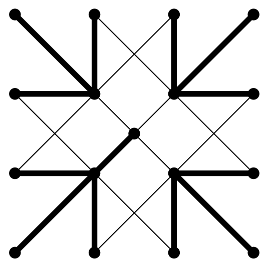
5. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy minimális lefogó élhalmazt az alábbi gráfban.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az alábbi ábrán a vastagított élek 4 élű párosítást, (1 pont)
a nagyobb méretű csúcsok pedig 4 elemű lefogó ponthalmazt alkotnak. (1 pont)



Megmutatjuk, hogy a megadott párosítás maximális. Az előadásról tudjuk, hogy bármely G gráfra $\nu(G) \leq \tau(G)$ teljesül. (1 pont)
A 4 élű párosítás igazolja, hogy $\nu(G) \geq 4$, (1 pont)
a 4 csúcsú lefogó ponthalmaz pedig igazolja, hogy $\tau(G) \leq 4$. (1 pont)
Így $4 \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq 4$, ami csak úgy teljesülhet, ha mindenütt egyenlőség áll, (1 pont)
$\nu(G) = 4$ pedig igazolja a párosításunk maximalitását. (1 pont)
Az alábbi ábrán a vastagított élek 13 élű lefogó élhalmazt alkotnak. (1 pont)



Megmutatjuk, hogy ez minimális lefogó élhalmaz. Gallai tétele szerint $\varrho(G)+\nu(G) = |V(G)| = 17$. (1 pont)
Mivel tudjuk, hogy $\nu(G) = 4$, innen $\varrho(G) = 13$, ami igazolja a kérdéses lefogó élhalmaz minimalitását. (1 pont)

Aki a fenti megoldást úgy írja le, hogy a lefogó ponthalmaza valójában nem lefogó, az nem kaphatja meg a második, harmadik, ötödik, hatodik és hetedik részpontszámot, kivéve ha teljesen egyértelmű, hogy nem elvi hibáról van szó (vagyis az illető tisztában van a lefogó ponthalmaz definíciójával), mely esetben a harmadik és az ötödik részpontszám megadható. Aki a lefogó élhalmazt adja meg úgy, hogy az valójában nem lefogó, az nem kaphatja meg a nyolcadik és a tizedik részpontot és a kilencediket is csak akkor, ha egyértelmű, hogy tisztában van a lefogó élhalmaz definíciójával.

6*. Létezik-e olyan 10 csúcsú, 45 élű (G, s, t, c) hálózat, melyben minden kapacitás egész és bármely két $s-t$ vágás kapacitása különböző?

* * * * *

Létezik ilyen hálózat. (0 pont)
Legyen egy irányított él G bármely két csúcsa között pontosan az egyik irányban, (1 pont)
az s-re illeszkedő élek mutassanak ki s-ből. Ekkor bármely két különböző $s-t$ vágásra igaz, hogy a belőlük kimutató élek halmaza különböző, (1 pont)
mert s minden $s-t$ vágásban benne van, így a belőle induló élek közül pontosan azok mennek ki egy X $s-t$ vágásból, melyek végpontjai nincsenek X-ben. (2 pont)

Számozzuk most meg az összes élet 0-tól 44-ig és az i. él kapacitása legyen 2^i. (3 pont)
Ekkor bármely élhalmaz összkapacitása egy 45 jegyű kettes számrendszerbeli szám lesz, így különböző élhalmazokhoz különböző számok tartoznak, (2 pont)
így bármely két $s-t$ vágás kapacitása különböző kell legyen. (1 pont)