Bevezetés a számításelméletbe II.
zárthelyi feladatok
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
pontozási útmutató
2020. május 8.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül hivatkozni azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet.

1. Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban nincs izolált pont, az egy fokú csúcsok száma pontosan 3. Mutassuk meg, hogy a gráfnak legalább 19 éle van.

* * * * *

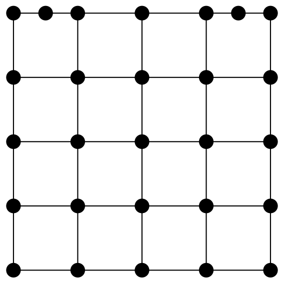
A feladat feltételei szerint a gráf legalább 2 fokú csúcsainak száma 17. (3 pont)
E 17 csúcs fokszámösszege legalább 34, (2 pont)
így a gráfbeli összes csúcs fokszámösszege legalább 37. (1 pont)
Mivel a fokszámösszeg az élszám kétszerese, páratlan nem lehet, tehát legalább 38 kell legyen, (2 pont)
így a gráfnak legalább 19 éle van. (2 pont)

2. Egy egyszerű, nem összefüggő gráfban minden csúcs foka legalább kettő. Mutassuk meg, hogy a gráf komplementere nem síkbarajzolható.

* * * * *

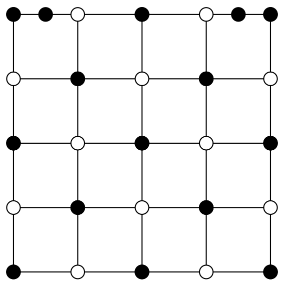
Mivel a gráf nem összefüggő, létezik két komponense (esetleg több is, de nekünk elég kettő), legyenek ezek A és B. (2 pont)
Mivel a gráf egyszerű és minden csúcs foka legalább 2, A és B is legalább 3 csúcsot tartalmaz. (2 pont)
Mivel A és B csúcsai közt nem mennek élek a gráfban (hiszen különböző komponensekről van szó), a komplementerben A és B csúcsai közt minden lehetséges él szerepel. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a komplementernek részgráfja a $K_{3,3}$ gráf, (2 pont)
így a Kuratowski tétel (könnyű iránya) szerint nem síkbarajzolható. (2 pont)

3. Döntsük el az alábbi gráfról, hogy van-e Hamilton-köre.

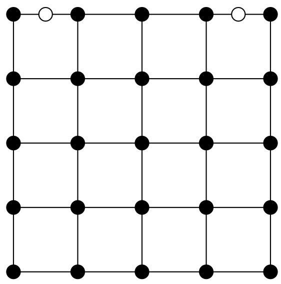


* * * * *

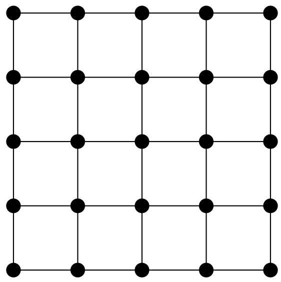
Első megoldás. Az alábbi ábrán fehérrel jelzett 12 csúcsot elhagyva a gráf 13 komponensre esik szét, (7 pont)
amiből az előadáson tanult tétel szerint következik, hogy nincs Hamilton-köre. (3 pont)



Második megoldás. Ha a gráfnak lenne Hamilton-köre, akkor az tartalmazná az alábbi ábrán fehérrel jelölt két csúcsból kivezető két-két élet, hiszen ezeknek a csúcsoknak a foka 2. (2 pont)



Ebből következne, hogy abban a gráfban, amit a fehérrel jelölt csúcsok és a belőlük vezető élek elhagyásával és a csúcsok szomszédjai közti élek behúzásával kapunk (ld. az alábbi ábrán) szintén lenne Hamilton-kör. (Fordítva egyébként ez nem feltétlen kéne, hogy teljesüljön.)
(3 pont)



Mivel a kapott gráf páros gráf, (1 pont)
nem lehet páratlan köre, (1 pont)
tehát Hamilton-köre sem (hiszen 25 csúcsa van). (1 pont)
A maradék 2 pont annak belátásáért jár, hogy a kapott 25 csúcsú gráf páros (pl. egy jó 2-színezés megadásával).

Az eredeti gráf persze nem páros gráf, hiszen van benne pl. 5 hosszú kör. Aki azt feltételezi, hogy az eredeti gráf páros és helyesen látja be, hogy ekkor nem lehetne Hamilton-köre, az kapjon 1 pontot.

4. Egy 100 csúcsú G páros gráfnak van teljes párosítása. Határozzuk meg a lefogó pontok minimális számát abban a H gráfban, melyet G-ből egy tetszőleges további él behúzásával kapunk.

* * * * *

A minimális lefogó ponthalmaz mérete G-ben Kőnig tétele szerint azonos a maximális párosítás méretével, ami nyilván 50. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy a H gráfra is igaz, hogy a minimális lefogó ponthalmaz mérete 50. (1 pont)
Mivel G a H részgráfja, a kérdéses méret természetesen nem lehet 50-nél kisebb. (1 pont)
Mivel G-nek van teljes párosítása, a két osztálya azonos méretű kell legyen, vagyis mindkettő 50 csúcsú (1 pont)
és természetesen mindkettő lefogó ponthalmaza G-nek. (1 pont)
Ha az új élet a két osztály közé húzzuk be, akkor mindkét osztály továbbra is lefogó ponthalmazt alkot, így a kérdéses méret 50. (2 pont)
Ha az új élet az egyik osztályon (mondjuk A-n) belül húzzuk be, A akkor is lefogó ponthalmaza H-nak, (2 pont)
így a H-beli minimális lefogó ponthalmaz mérete mindenképp 50. (1 pont)

5. Egy $2n$ csúcsú gráfból elhagytuk egy Hamilton-körének éleit. Mutassuk meg, hogy a gráf élkromatikus száma legfeljebb kettővel csökkent.

* * * * *

Jelöljük az elhagyás előtti gráfot G-vel, az elhagyás utáni gráfot H-val. Azt kell megmutatnunk, hogy G élkromatikus száma legfeljebb kettővel nagyobb, mint H élkromatikus száma, mely utóbbi számot jelöljük k-val. (2 pont)
Színezzük ki ehhez G élei közül először azokat, melyek H-ban is benne vannak, k színnel.
(3 pont)
G eddig nem színezett élei egy $2n$ csúcsú kört alkotnak, melynek éleit két eddig nem használt

színnel (mondjuk piros és kék) meg tudjuk színezni. (2 pont)
Valóban: ha a kör páratlan sorszámú éleit pirosra, páros sorszámú éleit kékre színezzük, (1 pont)
akkor sem két piros, sem két kék élnek nem lesz közös csúcsa. (1 pont)
Így G összes élét meg tudtuk színezni $k + 2$ színnel, amivel az állítást beláttuk. (1 pont)

A Vizing-tétel akkor sem segítene sokat, ha tudnánk, hogy a gráf egyszerű. Ha valaki egyszerű gráfra a Vizing segítségével megmutatja, hogy a csökkenés legfeljebb 3, az az utolsó 8 pontból kaphat legfeljebb 2-t. Ha valaki az egyszerűség kikötése nélkül használja a Vizinget, az erre ne kapjon pontot.

6*. Egy 12 csúcsú egyszerű, körmentes gráfban pontosan kétféle fokszám fordul elő, éspedig mindkettő legalább ötször. Hány éle lehet a gráfnak?

* * * * *

Mivel a gráf (nevezzük G-nek) körmentes, minden komponense fa. (1 pont)
Nem lehet minden komponense izolált pont, mert ekkor csak egyféle fokszám szerepelne, így az egyik fok az 1 kell legyen (hiszen 1 fokú csúcs minden legalább 2 csúcsú fában szerepel). (1 pont)
Az 1-től különböző fokú csúcsok fokszámát jelöljük k-val, ekkor $k \neq 1$ és k fokú csúcsból 5,6 vagy 7 darab lesz, 1 fokúból pedig (rendre) 7,6,5. Az összfokszám így $5k + 7$ (1. eset), $6k + 6$ (2. eset) vagy $7k + 5$ (3. eset). (1 pont)
Mivel a 12 csúcsú gráfunk körmentes, a tanultak szerint legfeljebb 11 éle lehet, így az összfokszám legfeljebb 22. (1 pont)
1.eset: $5k + 7 \leq 22$. Ekkor $k \leq 3$, de figyeljük meg azt is, hogy $k \neq 1$ és k páratlan kell legyen (hiszen $5k + 7$ az összfokszám, ami páros). Így ekkor $k = 3$ és az élszám 11. (1 pont)
Ilyen gráf létezik is: nem nehéz olyan fát konstruálni, aminek öt darab 3 fokú és hét darab 1 fokú csúcsa van (és persze 11 éle). (1 pont)
2.eset: $6k + 6 \leq 22$. Ekkor $k \leq 2$, vagyis $k = 2$ (ekkor az élszám 9) vagy $k = 0$ (ekkor az élszám 3). (1 pont)
Mind a két esetben van ilyen gráf: $k = 2$-höz pl. három darab három élű út diszjunkt egyesítése, (1 pont)
$k = 0$-hoz 6 izolált pont és három egy élű út egyesítése. (1 pont)
3. eset: $7k + 5 \leq 22$. Ekkor $k \leq 2$, és k ismét páratlan kéne legyen (de nem 1), így ilyen k nem létezik. (1 pont)
A kérdéses élszám tehát 3, 9 és 11 lehet. (0 pont)