**Bevezetés a számításelméletbe I.**
**Zárthelyi feladatok** — pontozási útmutató
2018. november 29.

## Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

**1.** a) A $p$ és $q$ valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a számát.

b) Ha $p$-nek és $q$-nak van olyan értéke, amelyre az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a $p$ és $q$ ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 &= 8 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 - 28x_4 &= 23 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 - 31x_4 &= 14 \\ 2x_1 + p \cdot x_4 &= q \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -7 & 8 \\ 4 & 4 & 1 & -28 & 23 \\ 5 & 3 & -1 & -31 & 14 \\ 2 & 0 & 0 & p & q \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & 4 & -26 \\ 0 & -2 & -2 & p+14 & q-16 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & -2 & -6 & 4 & -26 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & -2 & p+14 & q-16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & -2 & p+14 & q-16 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & p+10 & q+10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & p+10 & q-2 \end{array}\right)$$

(2 pont)

Ha $p \neq -10$, akkor az utolsó sort $(p+10)$-zel osztva kapjuk a lépcsős alakot. Mivel minden oszlopban van vezéregyes (és a redukált lépcsős alakig ez már nem változhat meg), ezért ilyenkor a megoldás egyértelmű (vagyis a megoldások száma 1). (2 pont)

Ha $p=-10$ és $q \neq 2$, akkor az utolsó sor „tilos sor”. Ezért ilyenkor nincs megoldás. (1 pont)
Ha $p=-10$ és $q=2$, akkor az utolsó sor csupa nulla sor, ezért ilyenkor a lépcsős alakot ennek az elhagyásával kapjuk. (1 pont)
Innen a Gauss-eliminációt folytatva kapjuk a redukált lépcsős alakot:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad (1 \text{ pont})$$

Így a $p=-10$ és $q=2$ esetben végtelen sok megoldás van: (1 pont)
$x_4=\alpha \in \mathbb{R}$ szabad paraméter és $x_3=3$, $x_2=4+2\alpha$, $x_1=1+5\alpha$. (2 pont)
A fenti pontozás úgy értendő, hogy az a) feladat hibátlan megoldása önmagában 6 pontot ér. A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

**2.** Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden $n \times n$-es $A$ mátrixra.

a) Ha létezik olyan $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer nem megoldható, akkor $\det A = 0$.

b) Ha $\det A = 0$, akkor létezik olyan $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer nem megoldható.

* * * * *

a) Ha $\det A \neq 0$ volna, akkor a tanult tétel értelmében az $(A|\underline{b})$ lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható kellene legyen minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ezért ez az állítás igaz. (2 pont)

b) Megmutatjuk, hogy ez az állítás is igaz. Legyen ezért $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges és alkalmazzuk a Gauss-eliminációt az $(A|\underline{b})$ lineáris egyenletrendszer megoldására. (1 pont)
A determináns tanult tulajdonságai miatt az elimináció során nem változik meg az, hogy a vonaltól balra álló mátrix determinánsa nulla-e vagy sem. (1 pont)
Ebből következik, hogy a lépcsős alak elérése előtt kell keletkezzen olyan sor, amelynek a vonaltól balra eső része csupa nulla. Valóban: különben a lépcsős alak minden oszlopban tartalmazna vezéregyest és így a vonaltól balra álló mátrix determinánsa 1 volna – ami ellentmondana az iménti állításnak és annak, hogy $\det A = 0$. (2 pont)
Állítsuk meg tehát a Gauss-eliminációt abban a pillanatban, amikor olyan sor keletkezett, amelynek a vonaltól balra eső része csupa 0. Ha most ebben a sorban a vonaltól jobbra nem 0 áll, akkor (tilos sor keletkezése miatt) az egyenletrendszer nem megoldható, vagyis az állítást beláttuk. (1 pont)
Ha viszont a vonaltól balra csupa nulla sorban a vonaltól jobbra is 0 áll, akkor cseréljük most ki ezt a vonaltól jobbra álló elemet (például) 1-esre, majd ettől a ponttól „tekerjük vissza” a Gauss-eliminációt a kezdetéig (vagyis az eddig elvégzett lépéseken visszafelé haladva hajtsuk végre mindegyiknek a megfordítását). (2 pont)
Mivel a vonaltól balra nem változtattunk semmin, ezért ezzel egy olyan $(A|\underline{b}')$ lineáris egyenletrendszert kaptunk, amelyre a Gauss-eliminációt végrehajtva tilos sor keletkezik, így ennek valóban nincs megoldása. (1 pont)

**Második megoldás a b) részre.** Tegyük fel indirekt, hogy az állítás hamis: $\det A = 0$, de az $(A|\underline{b})$ lineáris egyenletrendszer mégis minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén megoldható. (1 pont)
Jelölje $\underline{e}_i$ az $n \times n$-es egységmátrix $i$-edik oszlopát (vagyis az $\mathbb{R}^n$-beli standard bázis $i$-edik vektorát) és legyen $\underline{x}_i$ az $(A|\underline{e}_i)$ lineáris egyenletrendszer egy megoldása (ami ezek szerint létezik). (1 pont)
Ekkor a tanultak szerint $A \cdot \underline{x}_i = \underline{e}_i$ teljesül minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. (1 pont)
Ebből következik (a mátrixszorzás definíciója szerint), hogy $A \cdot X = E$ teljesül arra az $n \times n$-es $X$ mátrixra, amelynek az $i$-edik oszlopa $\underline{x}_i$ minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. (2 pont)
Alkalmazva a determinánsok szorzástételét: $\det A \cdot \det X = \det(A \cdot X) = \det E = 1$. (2 pont)
Ez pedig ellentmond annak, hogy $\det A = 0$ és így bizonyítja az állítást. (1 pont)

Ha egy megoldó ezt a megoldást adja, de a determinánsok szorzástételének alkalmazása helyett arra hivatkozik, hogy $A \cdot X = E$ miatt $X = A^{-1}$ és így a tanult tétel szerint $\det A \neq 0$ következik, az ezért a pontatlanságért (további indoklás híján) 1 pontot veszítsen. Ha viszont ezt kiegészíti azzal, hogy az előadáson (az inverz létezésére) elhangzott bizonyítás során kiderült, hogy $A \cdot X = E$-ből $X \cdot A = E$ is következik és ebből következtet arra, hogy $X = A^{-1}$, az természetesen maximális pontot ér.

**Harmadik megoldás a b) részre.** Tegyük fel indirekt, hogy az állítás hamis: $\det A = 0$, de az $(A|\underline{b})$ lineáris egyenletrendszer mégis minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén megoldható. (1 pont)
Jelölje $\underline{a}_i$ az $A$ mátrix $i$-edik oszlopát minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. Az $(A|\underline{b})$ megoldhatósága a tanultak szerint ekvivalens a $\underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle$ állítással. Mivel ez a feltevés szerint minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén igaz, ezért ebből következik, hogy $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. (1 pont)
Ha most $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ lineárisan összefüggő volna, akkor definíció szerint volna köztük olyan – legyen ez például $\underline{a}_n$ –, amelyik a többiből lineáris kombinációval kifejezhető. Ekkor viszont $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1}$ is generátorrendszert alkotna $\mathbb{R}^n$-ben, hiszen $\underline{a}_n \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1} \rangle$ (és az altér definíciója) miatt az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$-ből lineáris kombinációval kifejezhető vektorok mind $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1} \rangle$-ben volnának, vagyis $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1} \rangle = \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle$ teljesülne. (2 pont)
Ez viszont ellentmondana az FG-egyenlőtlenségnek: $\mathbb{R}^n$-ben volna $(n-1)$ elemű generátorrendszer és $n$ elemű lineárisan független rendszer is – hiszen az utóbbi feltételnek a tanultak szerint $\mathbb{R}^n$ minden bázisa megfelel. (2 pont)
Ezzel tehát megmutattuk, hogy $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ lineárisan függetlenek. Ebből pedig a tanult tétel szerint $\det A \neq 0$ következik, ellentmondás. (2 pont)

**3.** Számítsuk ki az $A^{2018}$ mátrixot az alábbi $A$ mátrixra. ($A^{2018}$ azt a 2018 tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője $A$.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrixszorzás definíciója szerint az $A^2$, majd az $A^3$ mátrixokat kiszámítva az alábbiakat kapjuk:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(2+2 pont)}$$

Ezek alapján már sejthető, hogy minden $n \geq 1$ esetén igaz az

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ állítás és így } \qquad A^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2018 \\ 0 & 1 & 0 & 2018 \\ 0 & 0 & 1 & 2018 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(1+1 pont)}$$

Az $A^n$-re vonatkozó állítást precízen $n$-re vonatkozó teljes indukcióval láthatjuk be: $n = 1$-re az állítás természetesen igaz. Ha pedig már valamely $n$-re igaz, akkor az $A^n$ már ismert értékét $A$-val szorozva azt kapjuk, hogy $A^{n+1}$ is megfelel az állításnak, mert az $A^n \cdot A$ szorzás az első három oszlopot és a jobb alsó sarkot továbbra is változatlanul hagyja, de az utolsó oszlop első három eleme $1 \cdot 1 + n \cdot 1 = n + 1$ lesz. Ezzel tehát az állítást beláttuk. (4 pont)
A pontozás úgy értendő, hogy ha a megoldó $A^2$ és $A^3$ kiszámítása után minden magyarázat nélkül közli $A^{2018}$ értékét, arra 5 pontot kaphat. Ha megfogalmazza az $A^n$-re vonatkozó általános állítást, arra további 1-et. Ha pedig a megoldás legalább részben meggyőzően indokolja, hogy az $A^n$-re vonatkozó állítás igaz, akkor ezért már további 2 pont adható (a precíz teljes indukcióért járó 4-ből).

**4.** Határozzuk meg az $A^{-1}$ és a $B$ mátrixokat, ha az $A$ és az $A \cdot B$ mátrixok az alábbiak.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 777 & 666 \\ 999 & 888 \end{pmatrix}$$

* * * * *

$A^{-1}$-et a tanultak szerint Gauss-eliminációval számolhatjuk:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -9 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right), \quad \text{(3 pont)}$$

így $A^{-1}$ a kapott alakban a vonaltól jobbra álló $2 \times 2$-es mátrix. (2 pont)
A $B$-t az $A^{-1} \cdot (A \cdot B)$ szorzat kiszámításával határozhatjuk meg. Valóban, a (mátrixszorzás alaptulajdonságairól és az inverzről) tanultak szerint $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = E \cdot B = B$. (3 pont)
Elvégezve a szorzást (amit nagyban könnyít, ha az elemek számításakor 111-et mindig kiemelünk):

$$B = A^{-1} \cdot (A \cdot B) = \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 777 & 666 \\ 999 & 888 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 222 \\ 111 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{(2 pont)}$$

A számolási hibákért szokás szerint 1-1 pont levonás jár, ha az a megoldás menetét érdemben nem befolyásolja. Az $A^{-1}$ és a $B$ létezését a feladat szövege implicite állítja, ezért nem vonunk le pontot egyik esetben sem a létezés indoklásának a hiányáért. A $B$-t természetesen (több számolással) meghatározhatjuk úgy is, hogy annak az elemeire változókat vezetünk be, ezekre felírjuk az $A \cdot B$ ismert értékéből adódó egyenleteket, majd megoldjuk az így kapott két darab, $2 \times 2$-es egyenletrendszert. Ha egy megoldó így jár el, akkor az egyenletek felírásáért összesen 1 pont járjon és a $B$ elemeinek meghatározásáért elemenként további 1-1 pont (számolási hibánként 1 pontot levonva).

**5.** Egy $4 \times 6$-os $A$ mátrixban az $i$-edik sor és a $j$-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 + i \cdot j$ minden $1 \leq i \leq 4$ és $1 \leq j \leq 6$ esetén. Határozzuk meg $A$ rangját.

* * * * *

Vonjuk le a 2., 3., illetve 4. sorból az 1. sor 2-szeresét, 3-szorosát, illetve 4-szeresét. (2 pont)
Ekkor a 2., 3., illetve 4. sor minden eleme $(2j + 4) - 2(j + 1) = 2$, $(3j + 9) - 3(j + 1) = 6$, illetve $(4j + 16) - 4(j + 1) = 12$ lesz. (2 pont)
Vonjuk most le a 3., illetve a 4. sorból a 2. sor 3-szorosát, illetve 6-szorosát. (1 pont)
Ezzel a 3. és a 4. sor csupa nullává változik, így ezeket elhagyhatjuk. (1 pont)
A kapott $A'$ mátrix két sora nem skalárszorosa egymásnak, ezért ez a két sor lineárisan független. Így a sorrang definíciója szerint $r(A') = 2$. (2 pont)
Mivel a Gauss-elimináció lépései a rangot nem változtatják, ezért $r(A) = r(A') = 2$. (2 pont)
Az $A'$ rangjának definíció szerinti meghatározása helyett jó megoldás az is, ha azt további Gauss-eliminációs lépésekkel (az 1. sor megfelezésével, majd a kapott sor 2-szeresének a 2.-ból való kivonásával) lépcsős alakúra hozzuk és hivatkozunk arra, hogy lépcsős alakú mátrix rangja a sorainak a száma. A mátrix elemeire vonatkozó képletekkel való számolás helyett természetesen tökéletes megoldás az is, ha a megoldó elemenként felírja a mátrixot és arra futtatja a Gauss-eliminációt.

**6*.** Az $L \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt akkor nevezzük *egyenesnek*, ha léteznek olyan $\underline{p}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektorok, hogy $L = \left\{\underline{p} + \lambda \cdot \underline{v} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$; vagyis $L$ azokból az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{x}$ vektorokból áll, amelyekre $\underline{x} = \underline{p} + \lambda \cdot \underline{v}$ teljesül valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $n$ változós lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a megoldáshalmaza (mint $\mathbb{R}^n$-beli vektorok halmaza) tartalmaz egyenest.

* * * * *

Tegyük fel, hogy az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van és legyen $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ két különböző megoldás. (1 pont)
A tanultak szerint ekkor $A \cdot \underline{x}_1 = \underline{b}$ és $A \cdot \underline{x}_2 = \underline{b}$. (1 pont)
Legyen ekkor $\underline{p} = \underline{x}_1$ és $\underline{v} = \underline{x}_2 - \underline{x}_1$. (1 pont)
Ekkor $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$ miatt $\underline{v} \neq \underline{0}$, (1 pont)
a mátrixszorzás tanult tulajdonságai szerint $A \cdot \underline{v} = A \cdot (\underline{x}_2 - \underline{x}_1) = A \cdot \underline{x}_2 - A \cdot \underline{x}_1 = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}$,(2 pont)
és ezért minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $A \cdot (\underline{p} + \lambda \cdot \underline{v}) = A \cdot \underline{x}_1 + \lambda \cdot (A \cdot \underline{v}) = \underline{b} + \lambda \underline{0} = \underline{b}$. (2 pont)
Következésképp $\underline{p} + \lambda \cdot \underline{v}$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén megoldása az $(A|\underline{b})$ lineáris egyenletrendszernek, vagyis a megoldáshalmaz tartalmazza a $\underline{p}$ és $\underline{v}$ által meghatározott egyenest. (2 pont)