Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. november 27.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Pótolhatók-e az alábbi A és B mátrixok hiányzó elemei úgy, hogy $B = A^{-1}$ teljesüljön? (Ha igen, az összes megoldást adjuk meg. A $\square$ jelek nem feltétlen azonos értékeket jelölnek.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \square & -3 \\ -1 & 3 & \square \\ \square & -4 & \square \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \square \\ 3 & \square & \square \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}$$

* * * * *

Jelölje C az $A \cdot B$ szorzatmátrixot és $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, illetve $c_{i,j}$ a megfelelő mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet.
Mivel $B = A^{-1}$ miatt $A \cdot B = E$, ezért $c_{2,2} = 1$. Így $(-1) \cdot 2 + 3 \cdot b_{2,2} + a_{2,3} \cdot 0 = 1$ adódik a mátrixszorzás definíciójából, amiből $b_{2,2} = 1$. (1 pont)
Hasonlóan adódnak (az eleve adott és közben kiszámolt elemek felhasználásával) az $a_{1,2} = -2$, $a_{3,1} = 2$, $b_{3,1} = -2$, $a_{2,3} = 4$ és $a_{3,3} = -5$ értékek (sorban a $c_{1,2} = 0$, $c_{3,2} = 0$, $c_{1,1} = 1$, $c_{2,1} = 0$ és $c_{3,1} = 0$ elemek felhasználásával). (3 pont)
Ezzel már a teljes A ismert, így B megkapható A^{-1} kiszámításával. De mivel B-ből is ismert már az első két oszlop, a hiányzó harmadikat (jelölje ezt $\underline{x}$) egyszerűbben megkaphatjuk csak az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_3$ lineáris egyenletrendszer megoldásával (ahol $\underline{e}_3$ az egységmátrix harmadik oszlopát jelöli). (2 pont)
A fenti egyenletrendszert Gauss-eliminációval megoldva:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{(3 pont)}$$

Így tehát végül is $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ az egyetlen helyes megoldás.(1 pont)
A megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hibák darabonként 1 pont levonást jelentenek. (Természetesen nem hiba, csak fölösleges a megoldás második felében az A^{-1} kiszámítására vonatkozó teljes Gauss-eliminációt elvégezni.)

2. A 6×6-os A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan B és C mátrixok, amelyekre $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(C) = 2$ és $A = B + C$.

$$* \quad * \quad * \quad * \quad *$$

Jelölje A oszlopait $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_6$. Mivel $\mathrm{r}(A) = 4$, ezek közül kiválasztható 4 lineárisan független; legyenek ezek például $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_4$ (az oszlopok számozása a megoldást nem befolyásolja). (2 pont)
Mivel $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_4, \underline{a}_5$ lineárisan összefüggő (hiszen $\mathrm{r}(A) = 4$), ezért az „újonnan érkező vektor lemmája" szerint $\underline{a}_5 \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_4 \rangle$, vagyis létezik az $\underline{a}_5 = \alpha_1 \underline{a}_1 + \ldots + \alpha_4 \underline{a}_4$ lineáris kombináció. Hasonló okokból létezik az $\underline{a}_6 = \beta_1 \underline{a}_1 + \ldots + \beta_4 \underline{a}_4$ lineáris kombináció is. (2 pont)
Elkészítjük a kívánt B és C mátrixokat: B oszlopai legyenek sorban $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{0}$, $\underline{0}$, $\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2$ és $\beta_1 \underline{a}_1 + \beta_2 \underline{a}_2$; hasonlóan, C oszlopai legyenek sorban $\underline{0}$, $\underline{0}$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$, $\alpha_3 \underline{a}_3 + \alpha_4 \underline{a}_4$ és $\beta_3 \underline{a}_3 + \beta_4 \underline{a}_4$. (2 pont)
Azonnal látszik, hogy $A = B + C$ igaz (hiszen B és C azonos sorszámú oszlopainak összege mindig A megfelelő oszlopát adja). (1 pont)
Megmutatjuk, hogy $\mathrm{r}(B) = 2$; az $\mathrm{r}(C) = 2$ állítás indoklása ezzel analóg. B oszlopai közül kiválasztható 2 lineárisan független: $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$. Mivel B minden oszlopa benne van az $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle$ generált altérben (vagyis kifejezhető $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ lineáris kombinációjaként) és az FG-egyenlőtlenség szerint $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle$-ben nem létezhet 3 lineárisan független vektor, ezért B oszlopai közül sem választható 3 lineárisan független. Így $\mathrm{r}(B) = 2$ (és $\mathrm{r}(C) = 2$) valóban igaz, amivel az állítást beláttuk. (3 pont)

3. Legyen $f : \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{10}$ lineáris leképezés, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{20}\}$ bázis $\mathbb{R}^{20}$-ban és $\underline{v} \in \mathbb{R}^{10}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ rögzített vektor. Adjuk meg $\dim \mathrm{Ker}\, f$ értékét, ha tudjuk, hogy f a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{20}$ vektorok mindegyikéhez $\underline{v}$-t rendeli.

$$* \quad * \quad * \quad * \quad *$$

Állítjuk, hogy $\mathrm{Im}\, f = \langle \underline{v} \rangle$.
Mivel $\underline{v} \in \mathrm{Im}\, f$ (hiszen $\underline{v} = f(\underline{b}_i)$) és $\mathrm{Im}\, f$ altér, ezért $\lambda \cdot \underline{v} \in \mathrm{Im}\, f$ valóban igaz minden λ-ra (de indokolhatjuk ezt azzal is, hogy $f(\lambda \underline{b}_i) = \lambda \underline{v}$). (1 pont)
Legyen most $\underline{w} \in \mathrm{Im}\, f$ tetszőleges, vagyis $\underline{w} = f(\underline{x})$ valamilyen $\underline{x} \in \mathbb{R}^{20}$ vektorra. Mivel $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{20}$ bázis $\mathbb{R}^{20}$-ban, ezért $\underline{x}$ kifejezhető belőlük lineáris kombinációval: $\underline{x} = \beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_{20} \underline{b}_{20}$. (2 pont)
Felhasználva az f lineáris leképezés tanult tulajdonságait:

$$\begin{aligned} \underline{w} = f(\underline{x}) = f(\beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_{20} \underline{b}_{20}) = f(\beta_1 \underline{b}_1) + \ldots + f(\beta_{20} \underline{b}_{20}) = \\ = \beta_1 f(\underline{b}_1) + \ldots + \beta_{20} f(\underline{b}_{20}) = \beta_1 \underline{v} + \ldots + \beta_{20} \underline{v} = (\beta_1 + \ldots + \beta_{20}) \underline{v}. \end{aligned}$$

Így $\underline{w} \in \langle \underline{v} \rangle$, amivel $\mathrm{Im}\, f = \langle \underline{v} \rangle$-t beláttuk. (3 pont)
Vagyis $\underline{v}$ 1 elemű bázis $\mathrm{Im}\, f$-ben (hiszen $\underline{v} \neq \underline{0}$ miatt lineárisan független is), így $\dim \mathrm{Im}\, f = 1$. (2 pont)
Ezért a dimenziótétel szerint $\dim \mathrm{Ker}\, f = 20 - 1 = 19$. (2 pont)

4. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációra és az $\mathbb{R}^3$-beli $B = \{\underline{b}_1 = (1;0;0),\ \underline{b}_2 = (2;1;0),\ \underline{b}_3 = (2;2;1)\}$ bázisra teljesül, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2) = \underline{b}_3$ és $f(\underline{b}_3) = \underline{b}_1$. Adjuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat.

$$* \quad * \quad * \quad * \quad *$$

A tanultak szerint az $[f]_B$ első oszlopa $[f(\underline{b}_1)]_B$. Mivel $f(\underline{b}_1) = 0 \cdot \underline{b}_1 + 1 \cdot \underline{b}_2 + 0 \cdot \underline{b}_3$, ezért az $[f]_B$ első oszlopa: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hasonlóan adódik $[f]_B$ másik két oszlopa is: $[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 pont)
Ebből $[f]$-et a tanult $[f]_B = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$ összefüggés segítségével határozzuk meg. Ezt balról B-vel, jobbról B^{-1}-zel szorozva: $B \cdot [f]_B \cdot B^{-1} = [f]$. (2 pont)
Itt B a megadott bázis mátrix megfelelője: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ebből B^{-1}-et Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (2 pont)

Mindebből $[f] = B[f]_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. (3 pont)

5. Sajátértéke-e a 3 az alábbi A mátrixnak? Ha igen, adjuk meg az A egy 3-hoz tartozó sajátvektorát.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Definíció szerint a 3 akkor sajátérték, ha az $A \cdot \underline{x} = 3 \cdot \underline{x}$ egyenletnek van egy $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldása. Más szóval: a $4x_1+3x_2+2x_3 = 3x_1$, $2x_1+4x_2+5x_3 = 3x_2$, $x_1+8x_2+4x_3 = 3x_3$ lineáris egyenletrendszernek van nem csupa nulla megoldása. (3 pont)

Átrendezés után: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$, $x_1 + 8x_2 + x_3 = 0$ (ez az $(A - 3E)\underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszer). (1 pont)

Gauss-eliminációval: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13/5 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \end{array}\right)$ (2 pont)

Így az egyenletrendszer megoldásai: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_1 = -\frac{13}{5}\alpha$, $x_2 = \frac{1}{5}\alpha$. (1 pont)

Például az $\alpha = -5$ választással az $x_1 = 13$, $x_2 = -1$, $x_3 = -5$ értékeket kapjuk. Így a 3 sajátérték és az $\underline{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ egy 3-hoz tartozó sajátvektor. (3 pont)

A megoldást lehet azzal is kezdeni, hogy kiszámítjuk $\det(A - 3E)$ értékét és miután ez 0, a tanult tétel szerint megállapíthatjuk, hogy a 3 sajátérték. De mivel ezután a sajátvektor meghatározásához úgyis a fenti megoldásban írtak vezetnek, erre külön nincs szükség. Ha egy megoldó a $\det(A-3E) = 0$ kiszámításával csak azt állapítja meg, hogy a 3 sajátérték, de hozzá tartozó sajátvektort nem talál, az ezért 3 pontot kaphat; ehhez azonban a sajátvektor keresésére vonatkozó hasznos próbálkozásokból legföljebb 2 további pont adható részpontszámként. Ha egy megoldó a $\det(A - 3E)$ kiszámításakor számolási hiba miatt 0-tól különböző eredményt kap és ezért (ebből helyesen) azt állapítja meg, hogy a 3 nem sajátérték, az mindezért összesen legföljebb 3 pontot kaphat – de ezt is csak abban az esetben, ha a determináns számítása közben vétett hiba jelentéktelen, nem elvi jellegű.

6. Az n pozitív egész számra $43n - 1$ utolsó két számjegye megegyezik $2n + 2$ utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy?

* * * * *

A feladat szövege szerint $43n - 1 \equiv 2n + 2 \pmod{100}$. Átrendezve a $41n \equiv 3 \pmod{100}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)

3-mal szorozva: $123n \equiv 9 \pmod{100}$, vagyis $23n \equiv 9 \pmod{100}$. (1 pont)

4-gyel szorozva: $92n \equiv 36 \pmod{100}$, vagyis $-8n \equiv 36 \pmod{100}$. (1 pont)

(-4)-gyel osztva: $2n \equiv -9 \pmod{25}$, ahol a modulust $(4, 100) = 4$ miatt osztottuk 4-gyel. (1 pont)

Ebből $2n \equiv 16 \pmod{25}$, amit 2-vel osztva: $n \equiv 8 \pmod{25}$, ahol $(25, 2) = 1$ miatt a modulus most nem változott. (1 pont)

Ebből $n \equiv 8 \pmod{100}$, $n \equiv 33 \pmod{100}$, $n \equiv 58 \pmod{100}$ vagy $n \equiv 83 \pmod{100}$. (1 pont)

Ellenőrzéssel kiderül, hogy a fentiek közül csak az $n \equiv 83 \pmod{100}$ a helyes, a többi hamis gyök. (Ezek a 4-gyel szorzás miatt jöttek be, ami $(100, 4) > 1$ miatt nem ekvivalens lépés.) Így a megoldás: $n \equiv 83 \pmod{100}$. (3 pont)

Ebből $2n + 2 \equiv 168 \equiv 68 \pmod{100}$ vagyis a keresett két utolsó számjegy: 68. (1 pont)

A hamis gyökök kiszűrésekor felhasználhatjuk, hogy $(41, 100) = 1$ miatt a tanult tétel szerint egyetlen megoldás van modulo 100; így ha $n \equiv 83 \pmod{100}$ megoldás, akkor a többi három nem az. De a lineáris kongruencia nagyon sokféleképp megoldható jól (akár hamis gyököt behozó lépés nélkül is). Aki a fenti megoldást, vagy más, hamis gyököt behozó megoldást ad, de nem foglalkozik a hamis gyök kiszűrésével, az értelemszerűen 3 pontot veszítsen. Ha valaki csak azt ellenőrzi, hogy $(41, 100)|3$, így a lineáris kongruenciának van megoldása, de azt kiszámolni nem tudja, az (az átrendezéssel együtt) összesen 3 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb.