Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2012. november 22.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások minden olyan $n \times n$-es A mátrixra, amelynek van inverze!

a) Ha A első oszlopának minden eleme azonos, akkor A^{-1}-ben az elsőt kivéve minden sorban az elemek összege 0.

b) Ha A-ban az elsőt kivéve minden sorban az elemek összege 0, akkor A^{-1} első oszlopának minden eleme azonos.

* * * * *

a) Legyen A első oszlopának minden eleme α és jelölje az A^{-1} mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet $c_{i,j}$. Ekkor $\alpha \neq 0$, különben $\det A = 0$ volna és így A-nak nem volna inverze. (1 pont)

Mivel $A^{-1} \cdot A = E$ és az E első oszlopának minden eleme a legfelsőt kivéve 0, ezért a mátrixszorzás definíciója szerint $c_{i,1} \cdot \alpha + c_{i,2} \cdot \alpha + \ldots + c_{i,n} \cdot \alpha = 0$ igaz minden $2 \leq i \leq n$ esetén. (2 pont)

Ebből α-val való osztás után éppen azt kapjuk, hogy A^{-1}-nek az i-edik sorában ($i \geq 2$ esetén) az elemek összege 0. Vagyis az állítás igaz. (1 pont)

b) Jelölje most $\underline{z}$ az A^{-1} első oszlopát. Ekkor $A \cdot A^{-1} = E$ miatt $A \cdot \underline{z}$ az egységmátrix első oszlopával egyenlő – jelölje ezt $\underline{e}_1$. (1 pont)

Jelölje az A első sorában álló elemek összegét β. Ekkor $\beta \neq 0$, különben az A minden sorában az elemek összege 0 volna, más szóval A oszlopainak az összege $\underline{0}$ volna, vagyis A oszlopai lineárisan összefüggők volnának. Így (a tanultak miatt) $\det A = 0$ volna és így A-nak nem volna inverze. (1 pont)

Legyen $\underline{y}$ az az oszlopvektor, amelynek minden eleme $1/\beta$. Ekkor az $A \cdot \underline{y}$ oszlopvektor i-edik eleme (a mátrixszorzás definíciója szerint) az A mátrix i-edik sorában álló elemek összegének $1/\beta$-szorosa. Vagyis $A \cdot \underline{y} = \underline{e}_1$. (2 pont)

Ezek szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_1$ lineáris egyenletrendszernek megoldása $\underline{x} = \underline{y}$ és $\underline{x} = \underline{z}$ is. Mivel azonban $\det A \neq 0$, ezért (a tanultak szerint) az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_1$ lineáris egyenletrendszer megoldása egyértelmű, vagyis $\underline{z} = \underline{y}$. Így $\underline{z}$ minden eleme azonos (épp $1/\beta$), ez az állítás is igaz. (2 pont)

2. Megválasztható-e a p paraméter értéke úgy, hogy az alábbi mátrix rangja 3 legyen? Ha igen, hogyan?

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 9 & 4 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & p & p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

* * * * *

Először tegyük fel, hogy $p \neq 0$. Ekkor a harmadik és negyedik sort p-vel, az első sort 3-mal, a másodikat 5-tel osztva lépcsős alakú mátrixot kapunk, amelyben 4 vezéregyes van. (2 pont)
Így ilyenkor a mátrix rangja 4 (mert a Gauss-eliminációt a redukált lépcsős alakig folytatva a vezéregyesek száma már nem változna meg). (2 pont)
Tegyük most fel, hogy $p = 0$. Ekkor a harmadik és negyedik sor csupa 0, elhagyásuk a rangot nem változtatja. (2 pont)
A maradék (és így az eredeti) mátrix rangja 2, mert az első sort ismét 3-mal, a másodikat 5-tel osztva két vezéregyessel bíró lépcsős alakot kapunk (és ez a redukált lépcsős alakban is így maradna).(2 pont)
Következésképp a mátrix rangja p semmilyen értékére sem lesz 3. (2 pont)

3. Az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés az $(1;2)$ vektorhoz a $(0;3;-3)$ vektort, a $(2;1)$-hez a $(3;3;0)$-t rendeli. Igaz-e az $(1;2;3) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ állítás?

* * * * *

Annak megállapításához, hogy $\mathcal{A}$ mit rendel egy tetszőleges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vektorhoz, felírjuk (x,y)-t $(1;2)$ és $(2;1)$ lineáris kombinációjaként. Az $(x,y) = \alpha \cdot (1;2) + \beta \cdot (2;1)$ egyenletből $x = \alpha + 2\beta$ és $y = 2\alpha + \beta$ adódik, amiből (rövid számolás után) $\alpha = \frac{2y-x}{3}$ és $\beta = \frac{2x-y}{3}$ jön ki. (2 pont)
Ebből, felhasználva a lineáris leképezés definícióját:

$$\mathcal{A}\big((x,y)\big) = \mathcal{A}\left(\frac{2y-x}{3} \cdot (1;2) + \frac{2x-y}{3} \cdot (2;1)\right) = \frac{2y-x}{3} \cdot \mathcal{A}\big((1;2)\big) + \frac{2x-y}{3} \cdot \mathcal{A}\big((2;1)\big) =$$
$$= \frac{2y-x}{3} \cdot (0;3;-3) + \frac{2x-y}{3} \cdot (3;3;0) = (2x-y; x+y; x-2y). \qquad \text{(3 pont)}$$

Így $(1;2;3) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ akkor igaz, ha van olyan $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, amelyre $(2x-y; x+y; x-2y) = (1;2;3)$.(1 pont)
Azonban $2x - y = 1$ és $x + y = 2$ felhasználásával $x = 1$ és $y = 1$ adódik, de ezekre $x - 2y = 3$ nem teljesül. Így az állítás hamis. (4 pont)
Megjegyezzük, hogy a feladat megoldásához nincs feltétlen szükség $\mathcal{A}$ általános „képletének” felírására. Lehet úgy is érvelni, hogy mivel $(1;2)$ és $(2;1)$ bázist alkotnak a síkban, ezért minden $\underline{v}$ síkvektor felírható $\underline{v} = \alpha \cdot (1;2) + \beta \cdot (2;1)$ alakban. Ebből (hasonlóan a fentiekhez) $\mathcal{A}(\underline{v}) = \alpha \cdot \mathcal{A}\big((1;2)\big) + \beta \cdot \mathcal{A}\big((2;1)\big)$ adódik. Vagyis $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \langle (0;3;-3), (3;3;0) \rangle$, így a feladat csak annak eldöntése, hogy $(1;2;3)$ ebben a generált altérben van-e.

4. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amely egy tetszőleges $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz az $(x+y; x+z; x+2y+2z)$ vektort rendeli.

a) Igaz-e, hogy az $(1;2;5)$ vektor sajátvektora $\mathcal{A}$-nak?

b) Van-e $\mathcal{A}$-nak pozitív sajátértéke?

(A feladat megoldásához nem szükséges megmutatni azt, hogy $\mathcal{A}$ valóban lineáris transzformáció.)

* * * * *

a) A feladatbeli képletből $\mathcal{A}\big((1;2;5)\big) = (3;6;15)$ adódik. Vagyis $\mathcal{A}\big((1;2;5)\big) = 3 \cdot (1;2;5)$. (2 pont)
Ez definíció szerint épp azt jelenti, hogy $(1;2;5)$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak. (3 pont)

b) A fentiekből az is kiderül, hogy $\lambda = 3$ sajátértéke $\mathcal{A}$-nak: valóban, van olyan $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektor, amelyre $\mathcal{A}(\underline{v}) = 3 \cdot \underline{v}$ (nevezetesen $\underline{v} = (1;2;5)$). (4 pont)
Így $\mathcal{A}$-nak van pozitív sajátértéke. (1 pont)
Megjegyezzük, hogy további (és a feladat megoldásának szempontjából szükségtelen) munkával megkereshető $\mathcal{A}$ összes sajátértéke (például úgy, hogy $\mathcal{A}$ egy tetszőleges bázisban felírt mátrixának sajátértékeit keressük meg). Ebből kiderül, hogy $\mathcal{A}$-nak a 3-on kívül 1 és -1 is sajátértéke.

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenleteknek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része és a képzetes része is pozitív!

a) $(7-i)\cdot z = 19+33i$ b) $\sqrt{2}\cdot z^5 = -100000-100000i$

* * * * *

a) $(7-i)$-vel osztva: $z = \dfrac{19+33i}{7-i} =$ (1 pont)

$= \dfrac{(19+33i)(7+i)}{(7-i)(7+i)} =$ (1 pont)

$= \dfrac{100+250i}{50} = 2+5i$. A kapott megoldásnak pedig a valós és képzetes része (2 és 5) is pozitív.(2 pont)

b) $-100000-100000i = 10^5(-1-i) = 10^5\cdot\sqrt{2}\cdot(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$. (1 pont)
Ebből $z^5 = 10^5\left(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ\right)$. (1 pont)
z tehát $\sqrt[5]{10^5\left(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ\right)}$ valamelyik értéke lehet csak. (1 pont)
Alkalmazva a tanult képletet: $z = 10\left(\cos\left(45^\circ + k\cdot 72^\circ\right) + i\sin\left(45^\circ + k\cdot 72^\circ\right)\right)$ valamely $0 \le k \le 4$ értékre. (1 pont)
Ha a valós rész és a képzetes rész pozitív, akkor a szög 0° és 90° között van. Ez csak a $k=0$ esetben, a 45°-ra teljesül. (1 pont)
Így az egyetlen megoldás: $z = 10\left(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ\right) = 5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i$. (1 pont)

6. Hányféleképp lehet elhelyezni a sakktáblán 3 világos és 4 sötét gyalogot?
(A sakktábla 8×8-as. Egy mezőre természetesen nem lehet egynél több bábut tenni; ettől eltekintve a bábuk elhelyezésénél a sakk szabályaira nem kell tekintettel lenni. Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha vagy van olyan mező, amin az egyik esetben nem áll bábu, a másikban igen, vagy van olyan mező, amin nem azonos színű bábuk állnak a két esetben. A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

* * * * *

Először válasszuk ki a 64 mező közül azt a hármat, ahová világos gyalogok kerülnek. A lehetőségek száma (az ismétlés nélküli kombinációnál tanultak szerint) $\dbinom{64}{3} =$ (1 pont)

$= \dfrac{64\cdot 63\cdot 62}{1\cdot 2\cdot 3}$. (2 pont)

Most a maradék 61 mező közül kell kiválasztani azt a 4-et, ahová sötét gyalogok kerülnek. A lehetőségek száma itt $\dbinom{61}{4} =$ (2 pont)

$= \dfrac{61\cdot 60\cdot 59\cdot 58}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$. (2 pont)

Mivel az először mondott $\binom{64}{3}$ lehetőség mindegyike $\binom{61}{4}$ féleképp folytatható a másodiknak mondott választással, ezért az összes lehetőségek száma $\dbinom{64}{3}\cdot\dbinom{61}{4} = \dfrac{64\cdot 63\cdot 62\cdot 61\cdot 60\cdot 59\cdot 58}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$. (3 pont)
Megjegyezzük, hogy ha a megoldás során először a sötét, utána a világos gyalogok helyét választjuk meg, akkor az eredményt $\binom{64}{4}\cdot\binom{60}{3}$ alakban kapjuk meg (azonos gondolatmenettel); ez azonban számértékét tekintve azonos a fentivel. Egy harmadik megoldási lehetőség volna, ha először azt a 7 mezőt választjuk ki, ahová gyalogok kerülnek, majd a választott 7 mező közül (például) azt a 3-at, ahová a világosak. Ekkor $\binom{64}{7}\cdot\binom{7}{3}$ alakban jön ki ismét csak ugyanaz az eredmény.