Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2015. október 22.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Határozzuk meg az $x-4=\frac{y+5}{4}=\frac{2-z}{3}$ egyenletrendszerű e egyenes minden olyan P pontját, amelyre a P-t a $Q(7;12;4)$ ponttal összekötő f egyenes merőleges e-re.

* * * * *

Első megoldás. A PQ egyenes akkor és csak akkor merőleges e-re, ha P rajta van azon az S síkon, amely Q-t tartalmazza és a normálvektora azonos e irányvektorával. P-t tehát e és S metszéspontjaként kereshetjük. (2 pont)
e egyenletrendszeréből kiolvasható egy irányvektora: $\underline{v}_e=(1;4;-3)$. (2 pont)
A $\underline{v}_e$ normálvektorú, Q-n átmenő S sík egyenlete: $x+4y-3z=1\cdot 7+4\cdot 12-3\cdot 4=43$. (2 pont)
$S\cap e$ meghatározásához tehát megoldjuk az e egyenletrendszeréből és S egyenletéből álló egyenletrendszert. (1 pont)
e egyenletrendszeréből $y=4x-21$, $z=14-3x$. Ezekből az $x+4\cdot(4x-21)-3(14-3x)=43$ egyenletet kapjuk S egyenletébe való helyettesítés után. Ebből $x=\frac{13}{2}$, így $y=5$ és $z=-\frac{11}{2}$. (2 pont)
A keresett P pont tehát csak a $P(\frac{13}{2};5;-\frac{11}{2})$ lehet. (1 pont)

* * * * *

Második megoldás. Az e egyenes $\underline{v}_e=(1;4;-3)$ irányvektora és $R(4;-5;2)$ pontja kiolvasható az egyenletrendszeréből. (2 pont)
Ebből felírható e paraméteres egyenletrendszere: $x=4+t$, $y=-5+4t$, $z=2-3t$, ahol $t\in\mathbb{R}$. (1 pont)
Rögzített t-re az így kapott $P_t\in e$ pontból a Q-ba mutató vektort a megfelelő helyvektorok különbségeként kaphatjuk: $\overrightarrow{P_tQ}=\big(7-(4+t);12-(-5+4t);4-(2-3t)\big)=(3-t;17-4t;2+3t)$. (2 pont)
Az $f=P_tQ$ egyenes pontosan akkor merőleges e-re, ha $\overrightarrow{P_tQ}$ merőleges $\underline{v}_e$-re. Ez pedig pontosan akkor igaz, ha $\overrightarrow{P_tQ}\cdot\underline{v}_e=0$. (2 pont)
Meghatározva a skaláris szorzatot: $\overrightarrow{P_tQ}\cdot\underline{v}_e=1\cdot(3-t)+4\cdot(17-4t)-3\cdot(2+3t)=65-26t$. (1 pont)
Így $\overrightarrow{P_tQ}\cdot\underline{v}_e=0$ a $t=\frac{5}{2}$ értékre teljesül. Ezt P_t koordinátáiba helyettesítve kapjuk, hogy a $P(\frac{13}{2};5;-\frac{11}{2})$ az e egyetlen megfelelő pontja. (2 pont)

2. Legyenek $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k,\underline{w}\in\mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok. Tegyük fel, hogy $\underline{w}\neq\underline{0}$ és a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_i+\lambda\cdot\underline{w},\underline{v}_{i+1},\ldots,\underline{v}_k$ vektorrendszer lineárisan független a $\lambda\in\mathbb{R}$ skalár és az $1\leq i\leq k$ egész bármely megválasztása esetén. Következik-e ebből, hogy a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k,\underline{w}$ rendszer is lineárisan független?

* * * * *

A válasz igen, a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}$ rendszer lineárisan független.
A $\lambda = 0$ (és tetszőleges $1 \leq i \leq k$) választással kapjuk, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ lineárisan független.(1 pont)
Ezért indirekt feltéve, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}$ lineárisan összefüggő, az „újonnan érkező vektor" lemmájából kapjuk, hogy létezik a $\underline{w} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{v}_k$ lineáris kombináció. (2 pont)
$\underline{w} \neq \underline{0}$ miatt az α_i együtthatók között kell legyen 0-tól különböző. Mivel a $\underline{v}_i$-k számozása tetszőleges, az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $\alpha_1 \neq 0$. (2 pont)
Így a $\underline{w}$-t kifejező lineáris kombináció átrendezésével az $\alpha_1(\underline{v}_1 - \frac{1}{\alpha_1}\underline{w}) + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{v}_k = \underline{0}$ alakot kapjuk. (2 pont)
Ez az $i = 1$ és $\lambda = -\frac{1}{\alpha_1}$ választással ellentmond a feladatban írt feltételnek (a lineáris függetlenség ekvivalens definíciója szerint), mert a fenti $\underline{0}$-t adó lineáris kombináció $\alpha_1 \neq 0$ miatt nem triviális. Ez az ellentmondás tehát bizonyítja a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}$ rendszer lineáris függetlenségét. (3 pont)

3. Álljon a $V \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból az $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ oszlopvektorokból, amelyekre fennállnak az $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ és a $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$ egyenletek (ahol x_i az $\underline{x}$ vektor i-edik koordinátáját jelöli minden $i = 1, 2, 3, 4$ esetén). Határozzuk meg a V altér dimenzióját. (A feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges megmutatni, hogy V valóban altér.)

* * * * *

Legyen $\underline{b}_1 = (1, 0, -1, -3)^T$ és $\underline{b}_2 = (0, 1, 1, -2)^T$. Ekkor $\underline{b}_1, \underline{b}_2 \in V$, mert a vektorok koordinátái kielégítik a feladatbeli egyenleteket. (1 pont)
$\underline{b}_1, \underline{b}_2$ nyilván lineárisan független, mert a két vektor közül egyik sem skalárszorosa a másiknak.(2 pont)
Megmutatjuk, hogy $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ generátorrendszer V-ben.
Legyen $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in V$ egy tetszőleges V-beli vektor. Ekkor a V-t leíró egyenletekből $x_3 = -x_1 + x_2$ és $x_4 = -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3x_1 - 2x_2$ adódik. (2 pont)
A $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ egy tetszőleges lineáris kombinációját véve: $\lambda\underline{b}_1 + \mu\underline{b}_2 = (\lambda, \mu, -\lambda + \mu, -3\lambda - 2\mu)$. (1 pont)
Ebből következik, hogy a fenti lineáris kombinációban a $\lambda = x_1$ és $\mu = x_2$ választással épp $\underline{v}$-t kapjuk. Így $\langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle = V$ valóban igaz. (2 pont)
Megmutattuk, hogy $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ lineárisan független és generátorrendszer V-ben. Következésképp $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ bázis V-ben, így $\dim V = 2$. (2 pont)

4. Találtunk egy lapot, amin valaki a (lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló) Gauss-eliminációt gyakorolta. A papír sajnos erősen megrongálódott, ezért csak a kiinduló feladat részletei és a néhány lépés után kapott lépcsős alak olvasható:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \square & 6 & \square & \square & \square \\ 2 & 4 & -4 & 7 & \square \\ 5 & 10 & \square & \square & -4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A kiinduló feladatban a $\square$-val jelölt számok olvashatatlanok. (Ezek persze egymástól különböző értékek is lehetnek.) Rekonstruáljuk a lap elveszett részeit: adjuk meg a $\square$-kban álló értékeket, majd futtassuk le a Gauss-eliminációt és adjuk meg az egyenletrendszer megoldásait.
(Feltételezhetjük, hogy a lap tulajdonosa helyesen ismerte a Gauss-elimináció tanult algoritmusát és számolási hibát sem ejtett. Egy teljes értékű megoldásnak természetesen része annak az indoklása is, hogy a $\square$-k helyes kitöltésére miért nincs más lehetőség.)

* * * * *

Ha a kiinduló feladatban a bal felső sarokban 0 állna, akkor az algoritmus először felcserélné az első sort a másodikkal (illetve esetleg a harmadikkal), majd az új első sort leosztaná 2-vel (illetve 5-tel). Ez azonban lehetetlen: az így kapott első soron az eljárás a lépcsős alak eléréséig már nem változtatna, így a lépcsős alak első sorában a negyedik helyen $\frac{7}{2}$ (illetve az ötödik helyen $-\frac{4}{5}$) állna. (1 pont)
Ebből következik, hogy a lépcsős alak első sora az eredeti első sor skalárral szorzásából keletkezik. Újra felhasználva, hogy az a lépcsős alak eléréséig már nem változhat és a második helyen álló 6-ost a lépcsős alak megfelelő helyén álló 2-essel összevetve kapjuk, hogy az eljárás az első sort 3-mal osztotta. Következik, hogy az első sor kezdetben $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -6 & 3 & -9 \end{array}\right)$ kellett legyen. (2 pont)

A kiinduló feladatbeli további három ismeretlen értéket a p, q, illetve r paraméterekkel jelölve végrehajtjuk a Gauss-eliminációt (annak a lépcsős alakig tartó első fázisát):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -6 & 3 & -9 \\ 2 & 4 & -4 & 7 & p \\ 5 & 10 & q & r & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & p+6 \\ 0 & 0 & q+10 & r-5 & 11 \end{array}\right) \sim \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha itt $q+10=0$ volna, akkor az eljárás a harmadik oszlopban nem hozna létre vezéregyest, a második sorban maradva tovább lépne a negyedik oszlopba. Mivel azonban a lépcsős alak tartalmaz a harmadik oszlopban vezéregyest, $q+10 \neq 0$. (1 pont)
Ezért az eljárás sorcserével, majd a második sor $(q+10)$-zel való, végül a harmadik sor 5-tel való osztásával folytatódik:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & q+10 & r-5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & p+6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{r-5}{q+10} & \frac{11}{q+10} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & p+6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{r-5}{q+10} & \frac{11}{q+10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{p+6}{5} \end{array}\right) \text{(2 pont)}$$

Ezzel megkaptuk a lépcsős alakot, amit a feladatban megadottal összevetve a $\frac{p+6}{5} = 2$, $\frac{11}{q+10} = 11$, illetve az $\frac{r-5}{q+10} = -1$ egyenleteket kapjuk. Ezekből sorban $p = 4$, $q = -9$, illetve $r = 4$ adódik.(1 pont)
A Gauss-eliminációt tehát a lépcsős alak eléréséig (a p, q és r kapott értékeinek behelyettesítése után) már lefuttattuk, onnan pedig a redukált lépcsős alakig a három darab, vezéregyes fölötti nemnulla érték nullává változtatásával vezet az út:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

A redukált lépcsős alakból kiolvasva az egyenletrendszer megoldásait: $x_2 = \alpha \in \mathbb{R}$ szabad paraméter, $x_4 = 2$, $x_3 = 13$ és $x_1 = 21 - 2\alpha$. (1 pont)

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A lépcsős alaktól a redukált lépcsős alakig tartó eliminációért, illetve az egyenletrendszer megoldásainak megadásárt járó pontszám természetesen akkor is megadható, ha a megoldás első fele részben vagy teljesen hiányzik. (Az útmutató elején írtaknak megfelelően viszont a lépcsős alakig vezető eliminációért járó pontszám nem adható meg akkor, ha a megoldó ötletszerűen, vagy minden követhető gondolatmenet híján tölti ki a hiányzó értékeket.) A fenti megoldásban p-vel jelölt hiányzó érték megkapható a következő gondolatmenettel is: a lépcsős alakból azonnal kiolvasható, hogy $x_4 = 2$, $x_3 = 13$, $x_2 = 0$ és $x_1 = 21$ megoldása az egyenletrendszernek; ezt behelyettesítve az eredeti feladat második egyenletébe $p = 4$ adódik. Ha egy megoldó ezen az úton csak p értékét tudja meghatározni, akkor ezért a fenti pontozás szerint a p, q és r meghatározásáért járó, összesen 5 pontból 2 adható.

5. Számítsuk ki az alábbi determinánst a p valós paraméter minden értékére.

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 5 & p \\ 6 & p & 4 & 0 \\ 7 & 2 & p & 0 \\ 6 & p & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Jelöljük a determináns keresett értékét D-vel. A kifejtési tételt az utolsó oszlopra alkalmazva:

$$D = -p \cdot \begin{vmatrix} 6 & p & 4 \\ 7 & 2 & p \\ 6 & p & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} p & 0 & 5 \\ 6 & p & 4 \\ 7 & 2 & p \end{vmatrix} \qquad \text{(3 pont)}$$

(Itt a 0-val szorzott tagokat már elhagytuk.) Az első, $(-p)$-vel szorzott determináns két sora azonos, így az értéke 0 (hiszen az egyikből a másik sort kivonva csupa 0 sort kapnánk). (2 pont)

A második, 3-mal szorzott determinánsra ismét a kifejtési tételt alkalmazzuk, most az első sora szerint:

$$D = 3 \cdot \left(p \cdot \begin{vmatrix} p & 4 \\ 2 & p \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & p \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \right) \qquad \text{(3 pont)}$$

Ebből a (2×2)-es determinánsok kiszámítására vonatkozó ismert szabállyal fejezhetjük be a megoldást:

$$D = 3 \cdot (p \cdot (p^2 - 8) + 5 \cdot (12 - 7p)) = 3p^3 - 129p + 180 \qquad \text{(2 pont)}$$

Természetesen a determináns értéke sok más úton is megkapható. Alkalmazható a Gauss-elimináció is, de paramétert tartalmazó kifejezéssel leosztva meg kell különböztetni azt az esetet, amikor annak az értéke 0. Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyenek például: a kifejtési tételben a sakktáblaszabályból származó előjel elhagyása, vagy helytelen megállapítása; paramétert tartalmazó kifejezéssel való osztás a szükséges esetvizsgálat nélkül; egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után a determináns értékváltozásának figyelmen kívül hagyása vagy hibás követése. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Ha egy megoldó a determináns definíciójának alkalmazásával kísérletezik, akkor minden szorzat (helyes) kiszámítása és előjelezése darabonként 1-1 pontot ér (de több különböző megoldási kísérlet esetén nyilván legföljebb csak az egyikre adható pont).

6. a) Számítsuk ki az A^{2015} mátrixot az alábbi A mátrixra.
b) Számítsuk ki $\det\left(B^{2015}\right)$ értékét az alábbi B mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(X^{2015} azt a 2015 tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője X.)

* * * * *

a) Az A^2 mátrixot a mátrixszorzás definíciója szerint meghatározva:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = A \\ A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^2 \end{array} \qquad \text{(2 pont)}$$

Mivel $A^2 = -E$, ezért $A^3 = A^2 \cdot A = (-E) \cdot A = -A$. Hasonlóan: $A^4 = A^3 \cdot A = (-A) \cdot A = -A^2 = E$, $A^5 = A^4 \cdot A = E \cdot A = A$ és A hatványai innen nyilván ciklikusan ismétlődnek. (2 pont)
Mivel a 2015 4-gyel osztva 3 maradékot ad, ezért $A^{2015} = A^3 = -A$, (1 pont)
vagyis $A^{2015} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. (1 pont)

b) $\det B = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = -1$ a (2×2)-es determinánsokra vonatkozó szabály szerint. (1 pont)
A determinánsok szorzástételéből következik, hogy $\det\left(B^{2015}\right) = \left(\det B\right)^{2015}$. (2 pont)
Így $\det\left(B^{2015}\right) = (-1)^{2015} = -1$. (1 pont)

Az a) feladatban elfogadható az $A^{2015} = (A^2)^{1007} \cdot A = (-E)^{1007} \cdot A = (-E) \cdot A = -A$ számítás is (akkor is, ha a megoldó az $(A^n)^m = A^{n \cdot m}$ azonosságot indoklás nélkül használja fel). A b) feladatban sem elvárás, hogy a megoldó a $\det\left(B^{2015}\right) = \left(\det B\right)^{2015}$ állítást a determinánsok szorzástételére való hivatkozásnál részletesebben indokolja (vagyis például annak 2014-szeri ismételt alkalmazásáról szóljon).