Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. október 20.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. A p paraméter milyen értékére esnek egy síkba az $A(2;3;3)$, $B(3;4;1)$, $C(4;6;2)$ és $D(p;2;5)$ pontok?

* * * * *

A kérdés megválaszolásához felírjuk az A, B és C által meghatározott S sík egyenletét, majd ebbe D koordinátáit behelyettesítve eldöntjük, hogy $D \in S$ p milyen értékére teljesül. (1 pont)
$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (1;1;-2)$ és $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a} = (2;3;-1)$ (ahol $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorokat jelölik). (2 pont)
Mivel $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ párhuzamosak S-sel (de egymással nem), ezért S-nek normálvektora lesz az $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektor. (1 pont)
Ezt a tanult képlettel meghatározva:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1\cdot(-1)-3\cdot(-2))\underline{i} - (1\cdot(-1)-2\cdot(-2))\underline{j} + (1\cdot 3 - 1\cdot 2)\underline{k} = (5;-3;1). \text{(2 pont)}$$

A kapott normálvektor és A, B vagy C bármelyikének segítségével S egyenlete már a tanult képlettel felírható: $5x - 3y + z = 4$. (2 pont)
Ebbe D koordinátáit behelyettesítve: $5p - 3 \cdot 2 + 5 = 4$. Így a négy pont akkor és csak akkor egysíkú, ha $p = 1$. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a normálvektor meghatározásához nem szükséges a vektoriális szorzat fogalma: kicsit több számolással az $\overrightarrow{AB} \cdot \underline{n} = \underline{0}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \underline{n} = \underline{0}$ összefüggésekből is megkapható egy alkalmas $\underline{n}$.

2. Megadható-e $\mathbb{R}^4$-ben négy darab vektor úgy, hogy közülük bármely kettő lineárisan független legyen, de semelyik három ne legyen lineárisan független?

* * * * *

Igen, megadhatók ilyen vektorok.
Legyen például $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pont)
Ekkor a négy felsorolt vektor közül bármely kettő lineárisan független, hiszen egyik sem skalárszorosa egy másiknak. (3 pont)

Továbbá semelyik három nem lineárisan független. Valóban: válasszunk a felsorolt vektorok közül hármat és töröljük az utolsó két koordinátáikat. A kapott $\mathbb{R}^2$-beli vektorok lineárisan összefüggők, hiszen $\mathbb{R}^2$-ben bármely három vektor lineárisan összefüggő (mert két nem párhuzamos vektorból már a sík bármely vektora kifejezhető). (2 pont)
Így a három $\mathbb{R}^2$-beli vektornak van $\underline{0}$-t adó nemtriviális lineáris kombinációja, de ekkor az eredeti, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok azonos együtthatókkal képzett lineáris kombinációja is nyilván $\underline{0}$-t ad. (3 pont)
Az utolsó 5 pont megszerzéséért érvelhetünk úgy is, hogy a megadott vektorok elemei annak a $W \leq \mathbb{R}^4$ altérnek, amely azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból áll, amelyeknek az utolsó két koordinátája 0. Mivel W-ben generátorrendszert (sőt: bázist) alkot például a standard bázis első két vektora, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt W-ben semelyik három vektor nem lehet lineárisan független. (Természetesen a fent megadott példa csak egy a végtelen sok jó példa közül: bármely négy olyan $\mathbb{R}^4$-beli vektor megfelel, amelyek benne vannak $\mathbb{R}^4$-nek egy 2 dimenziós alterében, de egyikük sem skalárszorosa egy másiknak.)

3. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a páros sorszámú és a páratlan sorszámú koordináták összege is 0. Határozzuk meg $\dim W$ értékét és adjunk meg W-ben egy olyan bázist, ami tartalmazza a jobbra látható két vektort. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. Legyen (például) $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ és $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$.

Vegyük ezeknek egy tetszőleges lineáris kombinációját: $\alpha\underline{b}_1 + \beta\underline{b}_2 + \gamma\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ -\beta \\ -\alpha-\gamma \end{pmatrix}$ (1 pont)

Ha $\alpha\underline{b}_1 + \beta\underline{b}_2 + \gamma\underline{b}_3 = \underline{0}$, akkor ebből $\alpha = \beta = \gamma = 0$ rögtön következik (mert a lineáris kombináció eredményeként kapott vektor első három koordinátája is 0). Így $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ lineárisan független.(2 pont)

Egy tetszőleges $\underline{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in W$ vektorra W definíciója miatt $x_4 = -x_2$ és $x_5 = -x_1 - x_3$ kell teljesüljön, így $\alpha = x_1$, $\beta = x_2$ és $\gamma = x_3$ választással a fenti lineáris kombináció épp $\underline{w}$-t adja. Így $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ generátorrendszer is W-ben. (2 pont)
Megmutattuk, hogy a $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ rendszer lineárisan független és generátorrendszer, így bázis W-ben. Ezért $\dim W = 3$. (1 pont)
A megadott két vektort (jelölje ezeket $\underline{u}$ és $\underline{v}$) tartalmazó W-beli bázis készítéséhez egy $\underline{w} \notin \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ vektort keresünk. Látható, hogy $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egy tetszőleges $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v}$ lineáris kombinációjaként előálló vektor első két koordinátája $\lambda + 2\mu$, ezért biztosan nem tartozik az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált altérhez például a fenti $\underline{b}_1 \in W$ vektor (mert az első két koordinátája nem egyenlő). (1 pont)
Ekkor az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1$ rendszer lineárisan független (ez következik az újonnan érkező vektor lemmájából, vagy a tetszőleges lineárisan független rendszer bázissá kiegészítésére tanult eljárásból). (1 pont)
Mivel $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1$ a W dimenziójával megegyező méretű lineárisan független rendszer, ezért a tanult tétel értelmében bázis is W-ben. (2 pont)

Második megoldás. Jelölje a két megadott vektort $\underline{u}$ és $\underline{v}$. A tanult eljárást követve egy $\underline{w} \notin \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ vektort keresünk. Látható, hogy $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egy tetszőleges $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v}$ lineáris kombinációjaként előálló vektor első két koordinátája $\lambda + 2\mu$, ezért biztosan nem tartozik az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált altérhez például az első megoldásban megadott $\underline{b}_1 \in W$ vektor (mert az első két koordinátája nem egyenlő). Így az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1$ rendszer lineárisan független (a tanult eljárás működéséből következően). (2 pont)

Folytatva az eljárást, most az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle$ generált alteret kell meghatároznunk. Vegyük ezeknek egy tetszőleges lineáris kombinációját: $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \gamma \\ \alpha + 2\beta \\ -2\alpha + 7\beta \\ -\alpha - 2\beta \\ \alpha - 9\beta - \gamma \end{pmatrix}$. (2 pont)

Legyen $\underline{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in W$ tetszőleges. A $\underline{w} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle$ állítás azt jelenti, hogy $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{b}_1 = \underline{w}$ valamilyen α, β, γ skalárokra; más szóval, hogy megoldható az $\alpha+2\beta+\gamma = x_1$, $\alpha+2\beta = x_2$, $-2\alpha+7\beta = x_3$, $-\alpha-2\beta = x_4$, $\alpha-9\beta-\gamma = x_5$ lineáris egyenletrendszer (ahol most $x_1, \ldots, x_5$ paraméterek, a változók pedig α, β és γ). (2 pont)

Az első két egyenlet különbségéből $\gamma = x_1 - x_2$, a második és a harmadik egyenletekből $\alpha = \frac{7x_2-2x_3}{11}$, $\beta = \frac{2x_2+x_3}{11}$ adódik. (1 pont)

Ezeket az utolsó két egyenletbe helyettesítve az $x_4 = -x_2$, $x_5 = -x_1 - x_3$ feltételeket kapjuk. Mivel ezek W definíciója szerint minden $\underline{w} \in W$ vektorra fennállnak, ezért $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle = W$. (2 pont)

Tehát $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1$ generátorrendszer W-ben és lineárisan független is, így bázis. Ezért $\dim W = 3$.(1 pont)

Megjegyezzük, hogy mindkét megoldás hallgatólagosan épített arra a tényre, hogy a feladatban megadott két vektor lineárisan független. Ez nyilván igaz (hiszen nem skalárszorosai egymásnak), de mivel a feladat szövegéből implicite következik, hogy létezik ezt a két vektort tartalmazó bázis, ezért ennek a külön kimondására és megindoklására nincs szükség egy teljes értékű megoldáshoz.

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + p \cdot x_3 + (p^2 + p + 12) \cdot x_4 &= -6 \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & -3 & p & p^2+p+12 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & p & p^2+p & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p & p^2+p & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p^2+p & -p \end{array}\right)$$

(Az utolsó lépésben a harmadik sor p-szeresét vontuk ki a negyedikből.) (2 pont)

Ha $p = -1$, akkor az utolsó sor $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Ez „tilos sor”, így ilyenkor az egyenletrendszernek nincs megoldása. (2 pont)

Ha $p = 0$, akkor az utolsó sor csupa 0, így elhagyható. Ekkor a Gauss-elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk (két további, vezéregyes fölötti elem „kinullázásával”):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (1 \text{ pont})$$

Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$ „szabad paraméter”, $x_1 = -3 - 6\alpha$, $x_2 = -1 - 2\alpha$, $x_3 = 1$. (2 pont)

Ha viszont $p \neq -1$ és $p \neq 0$, akkor az utolsó sort $(p^2 + p)$-vel osztva kapjuk a lépcsős alakot, majd ebből (négy vezéregyes fölötti elem „kinullázásával”) a redukált lépcsős alakot:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{p+1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3+\frac{6}{p+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1+\frac{2}{p+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{p+1} \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

Így a $p \neq -1, 0$ esetben a megoldás egyértelmű: $x_1 = -3+\frac{6}{p+1}$, $x_2 = -1+\frac{2}{p+1}$, $x_3 = 1$, $x_4 = \frac{-1}{p+1}$.(2 pont)
A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A determinánst a Gauss-elimináció determinánsra vonatkozó változatával számítjuk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-4)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 = 8$$

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Arányos részpontszám jár minden, a determináns kiszámításának irányába mutató, hasznos lépésért. A kifejtési tétel puszta alkalmazása (egyéb átalakítások nélkül) legföljebb 2 pontot érhet, mert egyedül ezzel a determináns meghatározása nem válik könnyebbé az eredeti feladatnál.

6. Az $(n \times n)$-es A mátrixra teljesül, hogy ha az A mátrix főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adunk (de a többi elemét nem változtatjuk), akkor nulla determinánsú mátrixot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor az A^3 főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adva is nulla determinánsú mátrixot kapunk. (A^3 azt a háromtényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.)

* * * * *

A feladatbeli feltétel azt mondja, hogy $\det(A+E) = 0$ (ahol E az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli). Ebből pedig azt kell megmutatni, hogy $\det(A^3+E) = 0$. (2 pont)
A számokra vonatkozó $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ azonosság mintájára az $n \times n$-es mátrixokra is igaz az $A^3+E = (A+E)(A^2-A+E)$ azonosság. Ezt a számokra vonatkozó változattal analóg módon lehet belátni, kihasználva a mátrixokra vonatkozó tanult műveleti tulajdonságokat:

$$(A+E)(A^2-A+E) = A\cdot(A^2-A+E)+E(A^2-A+E) = A^3-A^2+A+A^2-A+E = A^3+E \qquad \text{(4 pont)}$$

Alkalmazva erre a determinánsok szorzástételét: $\det(A^3+E) = \det(A+E)\cdot\det(A^2-A+E)$.(3 pont)
Így $\det(A+E) = 0$-ból $\det(A^3+E) = 0$ valóban következik. (1 pont)