Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2012. október 18.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(1;3;4)$ és a $Q(3;6;10)$ pontokon és párhuzamos az $\frac{x-9}{3} = y+4 = \frac{z}{5}$ egyenletrendszerű egyenessel!

* * * * *

Jelölje a megadott egyenest e, a keresett síkot S, annak egy normálvektorát pedig $\underline{n}$.
e irányvektora $\underline{v}(3;1;5)$. (1 pont)
Mivel S párhuzamos e-vel, ezért $\underline{n}$ merőleges $\underline{v}$-re. (1 pont)
$\underline{n}$ ugyancsak merőleges a $\overrightarrow{PQ}$ vektorra (hiszen ez a két pont a síkban fekszik). (1 pont)
$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = (2;3;6)$ (ahol $\underline{p}$ és $\underline{q}$ a két pontba mutató helyvektorokat jelölik). (1 pont)
A fentiek miatt a $\overrightarrow{PQ} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat jó választás $\underline{n}$-re. (2 pont)
Ezt a tanult képlettel meghatározva:

$$\overrightarrow{PQ} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (3\cdot 5 - 6\cdot 1)\underline{i} - (2\cdot 5 - 6\cdot 3)\underline{j} + (2\cdot 1 - 3\cdot 3)\underline{k} = (9;8;-7). \quad \text{(2 pont)}$$

A kapott normálvektor és P (vagy Q) segítségével a sík egyenlete már a tanult képlettel felírható: $9x + 8y - 7z = 5$. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a normálvektor meghatározásához nem szükséges a vektoriális szorzat fogalma: valamivel több számolással a $\underline{v} \cdot \underline{n} = \underline{0}$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \underline{n} = \underline{0}$ összefüggéseket felhasználva is megkapható egy alkalmas $\underline{n}$ normálvektor.

2. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci típusúnak, ha a (fölülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például a jobbra látható vektor Fibonacci típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Legyen a Fibonacci típusú, $\mathbb{R}^5$-beli vektorok halmaza F és legyen $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ és $\underline{w} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$ két F-beli elem és $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges skalár.
Először megmutatjuk, hogy $\underline{v} + \underline{w}$ szintén F-beli. Ugyanis $\underline{v} + \underline{w}$ harmadik eleme $x_3 + y_3$, ahol $x_3 = x_1 + x_2$ és $y_3 = y_1 + y_2$ (mert $\underline{v}$ és $\underline{w}$ F-beliek). Így $\underline{v} + \underline{w}$ harmadik eleme $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, vagyis valóban $\underline{v} + \underline{w}$ első két elemének összege. Teljesen hasonlóan látható be, hogy $\underline{v} + \underline{w}$ negyedik és ötödik eleme is a fölötte álló kettő összegével egyenlő. (4 pont)
Most megmutatjuk, hogy $\lambda \cdot \underline{v}$ is F-beli. Ugyanis $\lambda \cdot \underline{v}$ harmadik eleme $\lambda \cdot x_3 = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$, vagyis a $\lambda \cdot \underline{v}$ harmadik eleme az első kettő összegével egyenlő. Ugyanígy indokolható, hogy $\lambda \cdot \underline{v}$ negyedik és ötödik eleme is a fölötte álló kettő összege. (4 pont)
A fentiekből következik, hogy F olyan nemüres részhalmaza $\mathbb{R}^5$-nek, amely zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra, így a tanult tétel értelmében altér. (F valóban nemüres, hiszen például benne van a nullvektor vagy a feladatban megadott konkrét vektor.) (2 pont)

3. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n\}$ két bázis a (tetszőleges) V vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy minden $\underline{b}_i \in B$ esetén található olyan $\underline{c}_j \in C$, hogy $B \setminus \{\underline{b}_i\} \cup \{\underline{c}_j\}$ és $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_i\}$ egyaránt bázisok V-ben!

* * * * *

A feladat állítását az egyszerűség kedvéért $\underline{b}_1$-re mutatjuk meg (hiszen B elemeinek számozása tetszőleges). Legyen $W = \langle \underline{b}_2, \underline{b}_3, \ldots, \underline{b}_n \rangle$. Ekkor C-ben van W-hez nem tartozó elem, különben W-ben C n elemű lineárisan független rendszert, $B \setminus \{\underline{b}_1\}$ pedig $(n-1)$ elemű generátorrendszert alkotna szemben a tanult tétel állításával. Legyen tehát $C \setminus W = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_k\}$ (C elemeinek számozása szintén tetszőleges). (1 pont)
Mivel C bázis, ezért (a tanultak miatt) $\underline{b}_1$ pontosan egyféleképp állítható elő C elemeiből lineáris kombinációval: $\underline{b}_1 = \gamma_1 \underline{c}_1 + \gamma_2 \underline{c}_2 + \ldots + \gamma_n \underline{c}_n$. (1 pont)
Állítjuk, hogy a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ együtthatók között van nemnulla. Ellenkező esetben ugyanis $\underline{b}_1 = \gamma_{k+1} \underline{c}_{k+1} + \ldots + \gamma_n \underline{c}_n$ adódna, amiből $\underline{c}_{k+1}, \ldots, \underline{c}_n \in W$ miatt $\underline{b}_1 \in W$ is következne ellentmondásban a B lineáris függetlenségével. (2 pont)
Legyen tehát $\gamma_j \neq 0$, $1 \leq j \leq k$ tetszőleges. Állítjuk, hogy $\underline{c}_j$ megfelel a feladat állításának.
Először megmutatjuk, hogy $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ bázis V-ben. $\underline{c}_j \notin W$-ből az „újonnan érkező vektor” előadáson tanult lemmája miatt adódik, hogy $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ lineárisan független rendszer.(1 pont)
Ha $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ nem volna generátorrendszer, akkor létezne egy, az elemeiből lineáris kombinációval ki nem fejezhető $\underline{w}$ vektor. Ekkor azonban, ismét csak az „újonnan érkező vektor” lemmája miatt $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j, \underline{w}\}$ is lineárisan független volna, ami ellentmond annak, hogy V-ben van n elemű generátorrendszer (bármelyik bázis). Így tehát $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ valóban bázis. (2 pont)
Most megmutatjuk, hogy $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ is bázis V-ben. $\underline{b}_1$ biztosan nem fejezhető ki $C \setminus \{\underline{c}_j\}$ elemeiből lineáris kombinációval, mert a $\underline{b}_1$ egyetlen, C elemeiből való kifejezésében a $\underline{c}_j$ együtthatója (nevezetesen γ_j) nem nulla. (2 pont)
Ha $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ nem volna generátorrendszer, akkor – a fentiekkel analóg módon – hozzávehető volna egy további vektor a lineáris függetlenség megtartásával, ellentmondásban azzal, hogy V-ben van n elemű generátorrendszer. Így tehát $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ is bázis, az állítást beláttuk. (1 pont)

4. Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3+x_4-4x_5&=3\\ 2x_1+11x_2+12x_4-3x_5&=11\\ 4x_1+9x_2+26x_3-2x_4+p\cdot x_5&=9\\ 3x_1+13x_2+7x_3+11x_4+q\cdot x_5&=13 \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3\\ 2 & 11 & 0 & 12 & -3 & 11\\ 4 & 9 & 26 & -2 & p & 9\\ 3 & 13 & 7 & 11 & q & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3\\ 0 & 5 & -10 & 10 & 5 & 5\\ 0 & -3 & 6 & -6 & p+16 & -3\\ 0 & 4 & -8 & 8 & q+12 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+19 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+8 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(2 pont)}$$

Ha $p=-19$ és $q=-8$, akkor az utolsó két sor csupa 0, így ezek elhagyhatók. Ekkor a Gauss-elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk (egyetlen további, vezéregyes fölötti elem „kinullázásával"):

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 11 & -5 & -7 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_3=\alpha\in\mathbb{R}$, $x_4=\beta\in\mathbb{R}$, $x_5=\gamma\in\mathbb{R}$ „szabad paraméterek", $x_1=7\gamma+5\beta-11\alpha$, $x_2=1-\gamma-2\beta+2\alpha$. (2 pont)

Ha $p\neq-19$ vagy $q\neq-8$ (vagy mindkettő), akkor az eliminációt folytatva az alábbi alakot kapjuk. Valóban, ha például $p\neq-19$, akkor a harmadik sor $(p+19)$-cel osztása, majd a negyedik sorból a harmadik $(q+8)$-szorosának a kivonása és a kapott csupa nulla sor elhagyása után jutunk az alábbi alakhoz (és analóg a helyzet a $q\neq-8$ esetben is).

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(2 pont)}$$

Innen a vezéregyesek fölötti nemnulla elemek (3 darab) „kinullázásával" kapjuk a redukált lépcsős alakot:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 11 & -5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

Ekkor is végtelen sok megoldás van: $x_3=\alpha\in\mathbb{R}$, $x_4=\beta\in\mathbb{R}$, $x_1=5\beta-11\alpha$, $x_2=1+2\alpha-2\beta$, $x_5=0$. (2 pont)

Ha valaki számolási hibát vét, de egyébként a megoldás elvileg jó, az számolási hibánként 1 pont levonást jelentsen. Ha a számolási hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor sajnos csak a fenti gondolatmenetnek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számolásokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a számítások nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint*! (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét!)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A definícióban összeadandóként szereplő szorzatok közül csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem tartalmaznak 0 tényezőt, mert a többi szorzat a determináns értékét nem befolyásolja.(1 pont)
Egy ilyen szorzatban tehát a harmadik sorból csak a $\sqrt{5}$ választható. (1 pont)
Az első sorból 3 vagy 8 választható. Az előbbi esetben az ötödik sorból már csak a 2-est választhatjuk (mert a harmadik oszlopból már vettünk elemet), emiatt a második sorból csak 2-est, így a negyedikből csak a 4-est választhatjuk. Hasonlóan, ha az első sorból a 8-ast vesszük, akkor a negyedikből már csak a 2-est, a másodikból az 1-est és az ötödikből a 3-ast választhatjuk. (2 pont)
Így összesen csak két nemnulla szorzat keletkezik: $3 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 4 \cdot 2$ és $8 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 \cdot 3$. (1 pont)
A determináns értékének kiszámításához már csak az ehhez a két szorzathoz tartozó előjelet kell meghatározni. Az első szorzathoz tartozó permutáció $3, 1, 4, 5, 2$ (mert az első sorból a harmadik elemet vettük ki, a másodikból az elsőt, stb). Ennek a permutációnak az inverziószáma 4 (az inverzióban álló elempárok $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$ és $(5, 2)$). Mivel az inverziószám páros, a szorzat előjele $+$. (2 pont)
Hasonlóan, a második szorzathoz tartozó permutáció $5, 2, 4, 1, 3$, ennek az inverziószáma 7, az előjel $-$. (1 pont)
Amint látható, a két nemnulla szorzat abszolút értékben egyenlő (mindkettő $48 \cdot \sqrt{5}$), de az előjelük ellentétes, így a determináns értéke 0. (2 pont)

6. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra! (E-vel jelöltük az egységmátrixot, A^k pedig azt a k tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tagja A.)

a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$, akkor $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$.

b) Ha $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$.

* * * * *

a) Az állítás igaz. Ugyanis $A^k = E$ miatt $\det(A^k) = 1$ adódik (mert $\det E = 1$). (1 pont)
A determinánsok szorzástételéből következik, hogy $\det(A^k) = (\det A)^k$. (2 pont)
Így $(\det A)^k = 1$, amiből $\det A = \pm 1$ valóban igaz. (2 pont)

b) Az állítás hamis; ennek igazolására mutatunk egy ellenpéldát.
Legyen például $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (2 pont)
Ekkor $\det A = 0,5 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 1$, (1 pont)
de a mátrixszorzás definíciójából azonnal adódik, hogy $A^k = \begin{pmatrix} 0,5^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$ minden $k \geq 1$ egészre, vagyis $A^k = E$ semmilyen k-ra nem teljesül. (2 pont)