**Bevezetés a számításelméletbe I.**
**Zárthelyi feladatok**
2020. október 30.

**1.** Mely 1 és 111 közötti egész számok 1111-szerese ad 11 maradékot 2020-szal osztva?

**2.** Milyen maradékot ad $4^{74}$ 70-nel osztva?

**3.** Az origón áthaladó $S$ sík tartalmazza az $\frac{x-4}{9} = \frac{3-y}{2} = \frac{z-1}{6}$ egyenletrendszerű $e$ egyenest. Rajta van-e a $P(9;5;3)$ pont az $S$ síkon?

**4.** Álljon a $V \subseteq \mathbb{R}^4$ halmaz azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból, amelyeknek az első két koordinátája egyenlő. A $W \subseteq \mathbb{R}^4$ halmaz pedig azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból álljon, amiknek az utolsó két koordinátája egyenlő.

a) Alteret alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben a $V \cap W$ halmaz?

b) Alteret alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben a $V \cup W$ halmaz?

**5.** A $p$ valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ p \\ 8 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

**6*.** Legyen $f(n) = n^{n+1}$ és $g(n) = (n+2)^{n+3}$ minden $n \geq 1$ esetén. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan $n$ egész létezik, amire fennáll az $f(n)^{g(n)} \equiv 1 \pmod{g(n)}$ kongruencia.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.