

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok

2022. október 18.

1. Hány olyan egész szám van 1 és 10 000 között, aminek az utolsó két számjegye (a tízes számrendszerben) 34 és a hexadecimális alakjának az utolsó jegye E? (A hexadecimális számrendszerben az E a 14-es számjegyet jelöli.)

2. Egész szám-e az alábbi?

$$\frac{5 \cdot 279^{961} + 5}{1400}$$

3. A tanult Euklideszi algoritmus segítségével határozzuk meg az összes olyan egészt 0 és 301 között, aminek a 222-szerese 34 maradékot ad 302-vel osztva. (A feladat tehát nem csupán a keresett számok meghatározása, hanem a tanult algoritmus futtatása és a működése közben végzett számítások dokumentálása is.)

4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, ami tartalmazza az e egyenest és nincs közös pontja az f egyenessel, ahol e és f egyenletrendszerei az alábbiak:

$$e : \frac{x-1}{2} = 5-y, \quad z=2 \qquad f : \frac{x}{7} = \frac{1-2y}{12} = 8-z$$

5. Álljon a $V \subseteq \mathbb{R}^5$ halmaz azokból az $\mathbb{R}^5$ -beli vektorokból, amelyek első három koordinátájának az összege legalább annyi, mint az utolsó két koordinátájuk összege. Alteret alkot-e $\mathbb{R}^5$ -ben a V halmaz?

6*. Az $\mathbb{R}^n$ -beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorokról tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, de az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, $\underline{a} - \underline{b} - 3\underline{d}$, $\underline{a} + \underline{c} + 5\underline{d}$ vektorok lineárisan összefüggők. Következik-e ebből, hogy $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el. Az aláírás megszerzéséhez mindkét zárthelyin legalább 24 pontot kell elérni.

A feladatok megoldását indokolni kell, pusztán eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok

2022. december 2.

1. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 12x_2 + 13x_3 - 4x_4 &= 15 \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_3 + (p-3)x_4 &= p^2 - 2p - 12 \end{aligned}$$

2. Valaki négyszer egymás után kiszámolta a jobbra látható determináns értékét és négy különböző eredményt kapott: 1020, 2022, 3024 és 4026. Végül számítógéppel ellenőrizve kiderült, hogy a négy eredmény közül az egyik valóban helyes. Melyik?

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & -6 & -6 \\ 12 & 14 & 18 & 12 \\ -6 & 14 & -16 & -8 \\ 6 & 4 & 22 & 10 \end{vmatrix}$$

3. Számítsuk ki az A^{11} mátrixot az alábbi A mátrixra (vagyis annak a 11 tényezős szorzatnak az értékét, aminek minden tényezője A).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 4 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Döntsük el, hogy létezik-e inverze a fenti A mátrixnak és ha igen, határozzuk meg A^{-1} -et.

5. Az alábbi A mátrixból készítsük el a 3×4 -es B mátrixot úgy, hogy A -hoz új sorként hozzávesszük A sorainak az összegét. Ezután a kapott B mátrixból készítsük el a 3×5 -ös C mátrixot úgy, hogy B -hez új oszlopként hozzávesszük B oszlopainak az összegét. Végül a C mátrixból készítsük el a 4×5 -ös D mátrixot úgy, hogy C -hez új sorként hozzávesszük C sorainak az összegét. Határozzuk meg a D mátrix rangját, $r(D)$ -t.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 \\ -4 & 10 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

6*. Legyen $U \leq \mathbb{R}^4$ altér $\mathbb{R}^4$ -ben, $V \leq \mathbb{R}^6$ pedig altér $\mathbb{R}^6$ -ban és tegyük fel, hogy $\dim U = 3$ és $\dim V = 4$. A $W \subseteq \mathbb{R}^{10}$ halmaz álljon azokból az $\mathbb{R}^{10}$ -beli vektorokból, amiknek az első 4 koordinátája által alkotott oszlopvektor U -beli és az utolsó 6 koordinátája által alkotott oszlopvektor V -beli. Mutassuk meg, hogy W altér $\mathbb{R}^{10}$ -ben és határozzuk meg $\dim W$ értékét.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el. Az aláírás megszerzéséhez mindkét zárthelyin legalább 24 pontot kell elérni.

A feladatok megoldását indokolni kell, pusztán eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Első pótzh

2022. november 4.

1. Mennyi maradékot adhat 273-mal osztva egy olyan szám, melynek 57-szerese 99 maradékot ad 273-mal osztva?

2. Mennyi maradékot ad 2^{1032} 70-nel osztva?

3. Mutassuk meg, hogy az $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-3}{11}$ és $\frac{x+2}{2} = \frac{y+6}{5} = \frac{z-2}{4}$ egyenletrendszerű egyeneseknek van közös pontja és adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely mindkét egyenest tartalmazza.

4. A $V \subseteq \mathbb{R}^6$ halmaz azon vektorokból áll, melyeknek ugyanannyi pozitív koordinátájuk van, mint negatív. Így például a jobbra látható $\underline{v}$ vektor V -beli, míg $\underline{w}$ nem V -beli. Altér-e V $\mathbb{R}^6$ -ban?

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

5. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^3$ vektorokról annyit tudunk, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$. Mutassunk példát arra, hogy ekkor a $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok lehetnek lineárisan függetlenek és arra is, hogy lehetnek lineárisan összefüggők is (a példák helyességét természetesen indokolni kell).

6*. Határozzuk meg a

$$\max_{n \in \mathbb{Z}^+} \text{luko}(21n + 6, 6n + 4)$$

értéket, ahol $\text{luko}(a, b)$ az a és b számok legnagyobb közös osztóját, $\mathbb{Z}^+$ pedig a pozitív egészek halmazát jelöli. (Vagyis határozzuk meg a $21n + 6$ és $6n + 4$ számok legnagyobb közös osztójának lehetséges legnagyobb értékét, ahol n végigfut a pozitív egész számokon.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el. Az aláírás megszerzéséhez mindkét zárthelyin legalább 24 pontot kell elérni.

A feladatok megoldását indokolni kell, pusztán eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
második pótzárthelyi

2022. december 12.

1. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$ -beli $\underline{v}$ vektort átlagosnak, ha $\underline{v}$ koordinátái a harmadiktól kezdve azonosak a megelőző két koordináta átlagával (átlagos pl. a jobbra látható vektor). Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ -beli átlagos vektorok által alkotott V altér dimenzióját. (Azt, hogy V altér, nem kell indokolnunk.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát a p, q valós paraméterek minden értékére. (Magukat a megoldásokat tehát nem kell megadni.)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ x_1 + 3x_2 + p \cdot x_3 &= 9 \\ x_1 + q \cdot x_2 + 4x_3 &= p + 4 \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét a *determináns definíciója szerint*. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Legyen A a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg A^2 determinánsát (ahol A^2 persze az $A \cdot A$ mátrixot jelöli).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Legyen A a jobbra látható mátrix.

a) Határozzuk meg az $A^2 - 2A$ mátrixot.

b) Döntsük el, hogy létezik-e inverze az $A - E$ mátrixnak és ha igen, határozzuk is meg.

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ -28 & -12 \end{pmatrix}$$

6*. Mutassuk meg, hogy bármely 2×2 -es mátrixot ki lehet egészíteni két új sorral, majd két új oszloppal úgy, hogy olyan 4×4 -es mátrixot kapjunk, melynek van inverze.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, pusztán eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

2022. december 19.

1. Határozzuk meg 3^{100000} (vagyis három a százezrediken) utolsó 4 számjegyét.
2. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg 3^{73} maradékát 77-tel osztva. (A megoldásban ne használjunk semmilyen egyéb ismeretet; a feladat a megfelelő, tanult algoritmus által végzett számítások dokumentálása.)
3. A szabályos gömb alakú gumilabda sík felületű lejtőn gurul. Abban a pillanatban, amikor a labda a $P(2; 5; -1)$ pontban érinti a lejtőt, a középpontja a $K(16; 1; 7)$ pontban van. Átmegy-e a lejtő síkja az origón?
4. Legyen $\mathbb{R}^4$ -ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált alteret. (A generált altér meghatározása alatt azt értjük, hogy készítünk egy olyan „gyorstesztet”, amivel egy tetszőleges $\mathbb{R}^4$ -beli vektorról nagyon egyszerűen megmondható, hogy a generált altérhez tartozik-e.)

5. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^5$ -beli vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

- 6*. Egy n egész szám 100-zal vett osztási maradéka 1-gyel nagyobb a 73-mal vett osztási maradékánál. Mennyivel nagyobb a 7300-zal vett osztási maradéka a 73-mal vett osztási maradékánál?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el. Az aláírás megszerzéséhez mindkét zárthelyin legalább 24 pontot kell elérni.

A feladatok megoldását indokolni kell, pusztá eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

2022. december 19.

1. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$ -beli $\underline{v}$ vektort félszimmetrikusnak, ha $\underline{v}$ első és utolsó koordinátájának összege azonos a középső koordinátával és ugyanez igaz a második és a negyedik koordinátáinak összegére is (félszimmetrikus például a jobbra látható vektor). Határozzuk meg az $\mathbb{R}^5$ -beli félszimmetrikus vektorok által alkotott V altér dimenzióját. (Azt, hogy V altér, nem kell indokolnunk.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a p valós paraméter minden értékére.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 6x_2 + p \cdot x_3 &= 12 \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 &= 6 \end{aligned}$$

3. Legyen A a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ mátrix determinánsát.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. A jobbra látható mátrix a B mátrix inverze. Döntsük el, hogy létezik-e inverze a B^2 mátrixnak és ha igen, adjuk is meg. (B^2 természetesen a $B \cdot B$ mátrixot jelöli.)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Az 5×5 -ös C mátrixról annyit tudunk, hogy pontosan 3 nullától különböző eleme van. Határozzuk meg C rangjának összes lehetséges értékét.

6*. A 10×10 -es D mátrix determinánsa 0. Sőt, bárhogyan változtatjuk meg D -nek egyetlen elemét, a kapott mátrix determinánsa is mindig 0. Mutassuk meg, hogy D rangja legfeljebb 8.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el. Az aláírás megszerzéséhez mindkét zárthelyin legalább 24 pontot kell elérni.

A feladatok megoldását indokolni kell, pusztán eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2022. október 18.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfőbb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Hány olyan egész szám van 1 és 10 000 között, aminek az utolsó két számjegye (a tízes számrendszerben) 34 és a hexadecimális alakjának az utolsó jegye E? (A hexadecimális számrendszerben az E a 14-es számjegyet jelöli.)

* * * * *

Egy, a feladat feltételeinek megfelelő n egészre $n \equiv 34 \pmod{100}$ és $n \equiv 14 \pmod{16}$ adódik. (1 pont)
A kapott kongruenciarendszert a tanult módszerrel oldjuk meg. Az első kongruenciából $n = 100k + 34$ valamilyen k egészre. (1 pont)

Ezt a másodikba helyettesítve: $100k + 34 \equiv 14 \pmod{16}$. Mindkét oldalból 34-et levonva a $100k \equiv -20 \pmod{16}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)

Ez a lineáris kongruencia $(100, 16) = 4 \mid -20$ miatt megoldható. (0 pont)

$100 \equiv 4 \pmod{16}$ és $-20 \equiv 12 \pmod{16}$ miatt a lineáris kongruencia $4k \equiv 12 \pmod{16}$ alakba is írható. (1 pont)

Mindkét oldalt 4-gyel osztva: $k \equiv 3 \pmod{4}$, ahol a modulust $(4, 16) = 4$ miatt osztottuk 4-gyel. (1 pont)
Mivel az osztás ekvivalens átalakítás volt, ezért $k \equiv 3 \pmod{4}$ valóban a lineáris kongruencia megoldáshalmazát adja meg. (2 pont)

Ebből tehát $k = 4\ell + 3$ valamely ℓ egészre. Ezt visszahelyettesítve: $n = 100k + 34 = 100(4\ell + 3) + 34 = 400\ell + 334$. (2 pont)

Mivel ez az $\ell = 0, 1, \dots, 24$ értékekre esik 1 és 10000 közé, ezért 25 darab, a feladat feltételeinek megfelelő egész szám létezik. (1 pont)

A megoldás közben előállt lineáris kongruencia természetesen más tanult módszerekkel, így akár az Euklideszi algoritmussal is megoldható. Aki a fent leírthoz hasonló utat választ, az a lépések ekvivalenciájára való hivatkozást kiválthatja ellenőrzéssel vagy arra való hivatkozással, hogy a tanultak szerint a megoldások száma modulo 16 $(100, 16) = 4$, ami megfelel a kapott $k \equiv 3 \pmod{4}$ eredménynek (hiszen az $k \equiv 3, 7, 11$ vagy $15 \pmod{16}$ alakba is írható).

2. Egész szám-e az alábbi?

$$\frac{5 \cdot 279^{961} + 5}{1400}$$

* * * * *

A kérdés az, hogy $5 \cdot 279^{961} + 5$ osztható-e 1400-zal. (1 pont)

$\varphi(1400) = \varphi(2^3 \cdot 5^2 \cdot 7) = (2^3 - 2^2)(5^2 - 5)(7 - 1) = 480$ a tanult képlet szerint. (1 pont)

$(279, 1400) = 1$, mert 279 se 2-vel, se 5-tel, se 7-tel nem osztható. (1+1 pont)

Így az Euler-Fermat tételből $279^{480} \equiv 1 \pmod{1400}$ következik. (1 pont)

Ezt négyzetre emelve: $279^{960} \equiv 1^2 = 1 \pmod{1400}$ adódik. (1 pont)

Mindkét oldalt 279-cel szorozva: $279^{961} \equiv 279 \pmod{1400}$. (1 pont)

Most mindkét oldalt 5-tel szorozva: $5 \cdot 279^{961} \equiv 5 \cdot 279 = 1395 \equiv -5 \pmod{1400}$. (1 pont)

Így (a kongruencia definíciója szerint) $1400 \mid 5 \cdot 279^{961} + 5$, (2 pont)

vagyis a feladatban szereplő szám egész szám.

Megjegyezzük, hogy a feladat valójában egyszerűbben, az Euler-Fermat tétel alkalmazása nélkül is megoldható. Ugyanis 5-tel való egyszerűsítés után a feladatbeli tört alakja: $\frac{279^{961}+1}{280}$. Ennek az egész volta pedig könnyen következik a $279 \equiv -1 \pmod{280}$ kongruencia 961-edik hatványra emeléséből: $279^{961} \equiv (-1)^{961} = -1 \pmod{280}$. Ebből tehát $280 \mid 279^{961} + 1$ valóban adódik.

3. A tanult Euklideszi algoritmus segítségével határozzuk meg az összes olyan egészt 0 és 301 között, aminek a 222-szerese 34 maradékot ad 302-vel osztva. (A feladat tehát nem csupán a keresett számok meghatározása, hanem a tanult algoritmus futtatása és a működése közben végzett számítások dokumentálása is.)

* * * * *

A feladat a $222x \equiv 34 \pmod{302}$ lineáris kongruencia megoldása (az Euklideszi algoritmussal). (1 pont)

Az algoritmus először meghatározza $(222, 302)$ értékét: (1 pont)

$$302 = 1 \cdot 222 + 80$$

$$222 = 2 \cdot 80 + 62$$

$$80 = 1 \cdot 62 + 18$$

$$62 = 3 \cdot 18 + 8$$

$$18 = 2 \cdot 8 + 2$$

$$8 = 4 \cdot 2 + 0$$

(2 pont)

Így $(222, 302) = 2$. (1 pont)

Mivel ez 1-nél nagyobb, ezért a lineáris kongruenciát leosztjuk vele: $111x \equiv 17 \pmod{151}$. (1 pont)

Az így kapott alakkal folytatjuk az algoritmus végrehajtását:

$$(*) \quad 151x \equiv 0 \pmod{151}$$

$$(B) \quad 111x \equiv 17 \pmod{151}$$

$$(*) - 1 \cdot (B) : (1) \quad 40x \equiv -17 \pmod{151}$$

$$(B) - 2 \cdot (1) : (2) \quad 31x \equiv 51 \pmod{151}$$

$$(1) - 1 \cdot (2) : (3) \quad 9x \equiv -68 \pmod{151}$$

$$(2) - 3 \cdot (3) : (4) \quad 4x \equiv 255 \equiv 104 \pmod{151}$$

$$(3) - 2 \cdot (4) : (5) \quad x \equiv -276 \equiv 26 \pmod{151}$$

(2 pont)

Így a lineáris kongruenciát kielégítő egészek 0 és 301 között: 26 és 177. (2 pont)

Ha egy megoldó $(222, 302)$ meghatározását nem az algoritmussal végzi (hanem például a prímtenyezős felbontás alapján), az a fenti pontozás szerint a legnagyobb közös osztó számításáért járó 2 pontot veszítse el. Ha egy megoldó egyáltalán nem foglalkozik a legnagyobb közös osztó számításával, hanem a kongruenciák kivonásán alapuló lépéssort a $222x \equiv 34 \pmod{302}$ kongruenciával kezdi, az a tanult algoritmus ismeretének az alapvető hiányát mutatja, így a lineáris kongruencia felírásáért járó 1 ponton kívül a számolásért legföljebb további 1 pontot kaphat; ha azonban a számolás végén (a $2x \equiv 52 \pmod{302}$ kongruencia 2-vel való osztása után) kapott eredményről helyesen megmutatja, hogy ezzel valóban a lineáris kongruencia megoldásait kapja, akkor ezért további 2 pont adható. (Így tehát egy ilyen, nem a legnagyobb közös osztóval való leosztással induló – és így nem a tanult algoritmust követő – megoldás összesen legföljebb 4 pontot érhet.)

4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, ami tartalmazza az e egyenest és nincs közös pontja az f egyenessel, ahol e és f egyenletrendszerei az alábbiak:

$$e: \frac{x-1}{2} = 5-y, \quad z=2 \qquad f: \frac{x}{7} = \frac{1-2y}{12} = 8-z$$

* * * * *

Az e egyenes egyenletrendszerét $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-1}, \quad z=2$ alakba írva kiolvasható, hogy e átmegy a $P(1; 5; 2)$ ponton és irányvektora a $\underline{v}_e = (2; -1; 0)$ vektor. (2 pont)

Hasonlóan, f egyenletrendszerét $\frac{x-0}{7} = \frac{y-1/2}{-6} = \frac{z-8}{-1}$ alakba írva kiolvasható, hogy f (átmegy a $Q(0; 1/2; 8)$ ponton és) irányvektora a $\underline{v}_f = (7; -6; -1)$ vektor. (2 pont)

Mivel S tartalmazza e -t és nincs közös pontja f -fel, ezért mindkettővel párhuzamos. Így az $\underline{n}$ vektor akkor lesz normálvektora S -nek, ha merőleges $\underline{v}_e$ -re és $\underline{v}_f$ -re is (és $\underline{n} \neq \underline{0}$). (1 pont)

Ebből $\underline{v}_e \cdot \underline{n} = 0$ és $\underline{v}_f \cdot \underline{n} = 0$ következik (a skaláris szorzat definíciója szerint). (1 pont)

Ha $\underline{n} = (a, b, c)$, akkor ebből (a skaláris szorzat kiszámítására tanultak miatt) $2a - b = 0$ és $7a - 6b - c = 0$ adódik. (1 pont)

Az első egyenletből $b = 2a$, ezt a másodikba helyettesítve $c = -5a$. Így például $\underline{n} = (1; 2; -5)$ normálvektora S -nek. (1 pont)

S átmegy a P -n (mert tartalmazza e -t). Így ebből és $\underline{n}$ -ből felírható S egyenlete: $x + 2y - 5z = 1$. (2 pont)

5. Álljon a $V \subseteq \mathbb{R}^5$ halmaz azokból az $\mathbb{R}^5$ -beli vektorokból, amelyek első három koordinátájának az összege legalább annyi, mint az utolsó két koordinátájuk összege. Alteret alkot-e $\mathbb{R}^5$ -ben a V halmaz?

* * * * *

A $\underline{v} = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ vektor V -beli (mert $1 + 0 + 0 \geq 0 + 0$). Azonban a $(-1) \cdot \underline{v} = (-1, 0, 0, 0, 0)^T$ vektor nem V -beli (mert $-1 + 0 + 0 < 0 + 0$). (6 pont)

Mivel $\underline{v} \in V$, de $(-1) \cdot \underline{v} \notin V$, ezért az altér definíciója sérül, vagyis V nem altér. (4 pont)

Bár ez közvetlenül nem járul hozzá egy helyes megoldáshoz, de ha egy megoldó (hiánytalanul) megmutatja, hogy $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\underline{u} + \underline{v} \in V$ is teljesül, akkor ezért 4 pontot kaphat; ha pedig a megoldásban nyoma van annak, hogy a skalárral való szorzásra való zártságot is elkezdi vizsgálni (és nem csak felírja), akkor ezért további 1 pont adható.

6*. Az $\mathbb{R}^n$ -beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorokról tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, de az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} - \underline{b} - 3\underline{d}, \underline{a} + \underline{c} + 5\underline{d}$ vektorok lineárisan összefüggők. Következik-e ebből, hogy $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$?

* * * * *

Az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} - \underline{b} - 3\underline{d}, \underline{a} + \underline{c} + 5\underline{d}$ vektorok lineáris összefüggősége azt jelenti, hogy léteznek olyan α, β, γ skalárok, amik között van 0-tól különböző és $\alpha(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) + \beta(\underline{a} - \underline{b} - 3\underline{d}) + \gamma(\underline{a} + \underline{c} + 5\underline{d}) = \underline{0}$. (2 pont)

Átrendezve: $(\alpha + \beta + \gamma)\underline{a} + (\alpha - \beta)\underline{b} + (\alpha + \gamma)\underline{c} + (5\gamma - 3\beta)\underline{d} = \underline{0}$. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy $5\gamma - 3\beta \neq 0$. Tegyük fel ugyanis, hogy ez nem igaz: $5\gamma - 3\beta = 0$. Ekkor az előző egyenletből $(\alpha + \beta + \gamma)\underline{a} + (\alpha - \beta)\underline{b} + (\alpha + \gamma)\underline{c} = \underline{0}$ adódik, amiből az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineáris függetlensége miatt $\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha - \beta = 0$ és $\alpha + \gamma = 0$. (1 pont)

Itt a második, illetve harmadik egyenletből $\beta = \alpha$, illetve $\gamma = -\alpha$. Ezeket az elsőbe visszahelyettesítve $\alpha = 0$, amiből $\beta = 0$ és $\gamma = 0$ is következik. (1 pont)

Ez viszont ellentmond annak, hogy α, β és γ között van 0-tól különböző és így valóban igazolja az $5\gamma - 3\beta \neq 0$ állítást. (1 pont)

Így a fenti, átrendezés után kapott egyenletből a következőt nyerhetjük:

$$\underline{d} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3\beta - 5\gamma} \underline{a} + \frac{\alpha - \beta}{3\beta - 5\gamma} \underline{b} + \frac{\alpha + \gamma}{3\beta - 5\gamma} \underline{c}. \quad (2 \text{ pont})$$

Ebből pedig következik a $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ állítás (hiszen $\underline{d}$ kifejezhető lineáris kombinációval az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorokból). (2 pont)

A feladat kérdésére tehát a válasz: igen, következik.

1

A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Így például ha egy elszámolás következtében az első két eliminációs lépés után a harmadik sorban a jobb oldalon $p^2 - 2p$ helyett egy olyan kifejezés jelenik meg, aminek a $p = 0$ nem gyöke és ezért a megoldó arra az (egyébként helyes) következtetésre jut, hogy a $p = 0$ esetben nincs megoldás, az a pontozás szerinti utolsó 4 pontot nem kaphatja meg – de helyette kaphat 1 pontot annak a közléséért, hogy nincs megoldás. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célrátörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

2. Valaki négyszer egymás után kiszámolta a jobbra látható determináns értékét és négy különböző eredményt kapott: 1020, 2022, 3024 és 4026. Végül számítógéppel ellenőrizve kiderült, hogy a négy eredmény közül az egyik valóban helyes. Melyik?

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & -6 & -6 \\ 12 & 14 & 18 & 12 \\ -6 & 14 & -16 & -8 \\ 6 & 4 & 22 & 10 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. Mivel a mátrix minden eleme páros szám, ezért az elemeiből készített négy tényezős szorzatok 16-tal oszthatók. (4 pont)

Így ha a determinánst definíció szerint számoljuk ki, akkor 16-tal osztható szorzatok előjeles összegét vesszük, így eredményül is 16-tal osztható számot kell kapnunk. (4 pont)

Mivel a feladatban felsorolt négy lehetőség közül egyedül a 3024 osztható 16-tal, ezért a determináns értéke is ez kell legyen. (2 pont)

Második megoldás. Ha a mátrix minden elemét megfelezzük, akkor a determináns értéke a 16-odára változik. Valóban: ha egy sort kettővel osztunk, akkor a tanult tétel szerint a determináns is a felére változik; ezt a négy sorra egymás után alkalmazva minden elemet a felére változtatunk és a determináns értékét négyszer egymás után felezzük meg. (3 pont)

Mivel a mátrix minden eleme páros szám, ezért annak a D determinánsára $D = 16 \cdot D'$, ahol D' egy olyan 4×4 -es mátrix determinánsának értéke, aminek minden eleme egész szám. (2 pont)

A determináns definíciója miatt D' egész szám, hiszen D' -t egész számokból készített szorzatok összegeként kaphatjuk meg. (3 pont)

Így D 16-tal osztható egész szám. Mivel a feladatban felsorolt négy lehetőség közül ez egyedül a 3024-re igaz, ezért a determináns értéke is ez kell legyen. (2 pont)

Harmadik megoldás. A determinánst a Gauss-elimináció determinánsra vonatkozó változatával számítjuk ki:

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & -6 & -6 \\ 12 & 14 & 18 & 12 \\ -6 & 14 & -16 & -8 \\ 6 & 4 & 22 & 10 \end{vmatrix} = (-6) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 1 & 1 \\ 0 & 18 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & -10 & -2 \\ 0 & 6 & 16 & 4 \end{vmatrix} = (-108) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1512 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1512 \cdot 2 = 3024$$

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Arányos részpontszám jár minden, a determináns kiszámításának irányába mutató, hasznos lépésért. A kifejtési tétel pusztá alkalmazása (egyéb, további átalakítások nélkül) legföljebb 2 pontot érhet, mert egyedül ezzel a determináns meghatározása nem válik könnyebbé az eredeti feladatnál.

3. Számítsuk ki az A^{11} mátrixot az alábbi A mátrixra (vagyis annak a 11 tényező szorzatnak az értékét, aminek minden tényezője A).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 4 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrixszorzás definíciója szerint A^2 -et kiszámítva kapjuk, hogy $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. (3 pont)

Ugyancsak a mátrixszorzás definíciójából adódik, hogy a kapott $A^2 = 4E$ mátrixra és egy tetszőleges $(n \times n)$ -es M mátrixra $(4E)M = 4 \cdot M$ teljesül. (Ez következik a tanult $(\lambda X)Y = \lambda(XY)$ és az $E \cdot X = X$ összefüggésekből is: $(4E)M = 4 \cdot (EM) = 4 \cdot M$.) (3 pont)

Így $A^4 = A^2 \cdot A^2 = (4E) \cdot (4E) = 4 \cdot (4E) = 16E$. Hasonlóan folytatva kapjuk, hogy $A^6 = 2^6 E$, $A^8 = 2^8 E$ és $A^{10} = 2^{10} E$. (1 pont)

Így $A^{11} = A^{10} \cdot A = (2^{10} E) \cdot A = 2^{10} \cdot A$ (ami ismét adódik közvetlenül a mátrixszorzás definíciójából vagy a fent írt módon annak a tanult tulajdonságaiból). Így tehát $A^{11} = \begin{pmatrix} 3072 & -2048 & 1024 \\ 4096 & -6144 & 4096 \\ 3072 & -6144 & 5120 \end{pmatrix}$. (3 pont)

Egy teljes értékű megoldáshoz nem szükséges konkrétan kiszámítani A^{11} elemeit, elegendő, ha a megoldásból kiderül, hogy A elemeit 1024-gyel kell megszorozni. (Ugyancsak nem jár pontlevonás azért, ha a megoldó nem adja meg 2^{10} értékét.) Egy hiánytalan megoldáshoz viszont valamilyen módon szükséges indokolni, hogy az $A^2 = 4E$ észrevételből hogyan kapható meg A^{10} , illetve A^{11} . Ehhez elegendő például, ha a megoldó elvégzi az $(A^2) \cdot (A^2)$, majd az $(A^4) \cdot (A^2)$ szorzást és jelzi, hogy ehhez hasonlóan keletkezne A^8 és A^{10} is; végül ebből egy újabb szorzás elvégzésével kapja A^{11} -t. Ha azonban a megoldó például (további kiegészítés nélkül) csak annyit ír, hogy $A^{10} = (A^2)^5 = 4^5 \cdot E$, az nem minősül alapos indoklásnak (de a fenti pontozás szerinti középső 3+1 pont felét megkaphatja).

4. Döntsük el, hogy létezik-e inverze a **3.** feladatban szereplő A mátrixnak és ha igen, határozzuk meg A^{-1} -et.

* * * * *

Első megoldás. A **3.** feladat megoldásából kiderült, hogy $A^2 = 4E$. Ebből és a mátrixszorzás tanult tulajdonságából $A \cdot (\frac{1}{4} \cdot A) = \frac{1}{4} \cdot A^2 = \frac{1}{4} \cdot (4E) = E$. (4 pont)

Hasonlóan adódik, hogy $(\frac{1}{4} \cdot A) \cdot A = \frac{1}{4} \cdot A^2 = \frac{1}{4} \cdot (4E) = E$. (3 pont)

Így az inverz mátrix definíciója szerint A^{-1} létezik és $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1 & -3/2 & 1 \\ 3/4 & -3/2 & 5/4 \end{pmatrix}$. (3 pont)

A fenti pontozás szerinti középső 3 pontért arra is lehet hivatkozni, hogy az előadáson tanultak szerint ha $A \cdot X = E$ teljesül az $n \times n$ -es A és X mátrixokra, akkor ebből $X \cdot A = E$ is következik és így $X = A^{-1}$. Ha azonban a megoldó az $A \cdot (\frac{1}{4} \cdot A) = E$ megfigyelésből további indoklás nélkül következtet arra, hogy $A^{-1} = \frac{1}{4}A$, akkor ezt a 3 pontot veszítse el. Ha egy megoldó A^{-1} -et meghatározni nem tudja, de az $A^2 = 4E$ összefüggésből a determinánsok szorzástételét használva következtet arra, hogy $\det A = -8 \neq 0$ és így (a tanult tétel szerint) A^{-1} létezik, akkor ezért 3 pontot kaphat.

Második megoldás. A^{-1} -et a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -10/3 & 8/3 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 2/5 & -3/10 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 & 3/5 & -6/5 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2/3 & 0 & 1/12 & 1/2 & -5/12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -3/2 & 5/4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -3/2 & 5/4 \end{array} \right) \quad (4 \text{ pont})$$

A vonaltól balra egységmátrix keletkezett (és így $\det A \neq 0$), ezért A -nak létezik inverze (4 pont)

és az a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (2 pont)

Az inverz létezését indokolhatjuk úgy is, hogy külön kiszámítjuk A determinánsát és mivel az nem 0

($\det A = -8$), ezért a tanultak szerint A^{-1} létezik. Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. Az egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák (jelentkezzenek azok akár A^{-1} vagy $\det A$ számolása közben) darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ha egy megoldó A^{-1} számolása közben egyszerű számolási hibát vét, de a végén a számolását beszorzással ellenőrizve észreveszi, hogy hibázott, az ezért 1 pontot visszakaphat a számolási hibákért levont pontok közül még akkor is, ha a hibát kijavítani nem tudja.

5. Az alábbi A mátrixból készítsük el a 3×4 -es B mátrixot úgy, hogy A -hoz új sorként hozzávesszük A sorainak az összegét. Ezután a kapott B mátrixból készítsük el a 3×5 -ös C mátrixot úgy, hogy B -hez új oszlopként hozzávesszük B oszlopainak az összegét. Végül a C mátrixból készítsük el a 4×5 -ös D mátrixot úgy, hogy C -hez új sorként hozzávesszük C sorainak az összegét. Határozzuk meg a D mátrix rangját, $r(D)$ -t.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 \\ -4 & 10 & -2 & 4 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Első megoldás. Mivel B definíciója szerint annak a harmadik sora az első két sorának az összege, ezért ha kivonjuk B harmadik sorából az első kettőt, akkor a kapott mátrix harmadik sora csupa nulla lesz. (1 pont)
Így a kapott mátrixból annak a harmadik, csupa nulla sorát elhagyva A -t kapjuk vissza. (1 pont)
Ebből következően $r(B) = r(A)$, mert a tanultak szerint a Gauss-elimináció (sorokon végzett) lépései a rangot nem változtatják. (2 pont)

Mivel a tanultak szerint a Gauss-elimináció oszlopokon végzett lépései sem változtatják a rangot, hasonlóan következik, hogy $r(C) = r(B)$: C utolsó oszlopából az első négyet kivonva, majd a keletkező csupa nulla oszlopot elhagyva B -t kapjuk. (2 pont)

Végül $r(C) = r(D)$ is ugyanígy adódik a D negyedik sorából az első három kivonásával és a csupa nulla sor elhagyásával. (1 pont)

A két sora jól láthatóan lineárisan függetlenek, mert nem kaphatók meg egymásból valamilyen skalárral való szorzással. Így a sorrang definíciója szerint $r(A) = 2$. (2 pont)

Mindezekből tehát $r(D) = r(A) = 2$ következik. (1 pont)

Második megoldás. A feladat által definiált D mátrix: $D = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ -4 & 10 & -2 & 4 & 8 \\ -2 & 5 & -1 & 7 & 9 \\ -4 & 10 & -2 & 14 & 18 \end{pmatrix}$. (0 pont)

D rangját a tanultak szerint Gauss-eliminációval határozzuk meg:

$$r(D) = r \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 20 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ pont})$$

A kapott mátrix lépcsős alakú, így a rangja a sorainak (avagy a vezéregyeseinek) a száma: 2. Így tehát $r(D) = 2$. (4 pont)

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. (A pontozás szerinti utolsó 4 pont természetesen megadható akkor, ha egy hibás számolás eredményeképpen kapott lépcsős alakú mátrix rangját valaki helyesen állapítja meg.) Az egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ha egy megoldó nem közvetlenül a Gauss-eliminációt alkalmazza (vagyis nem annak a pontos követésével jut el egy lépcsős alakig), akkor indokolnia kell a megoldás helyességét – vagyis hivatkoznia kell arra, hogy a megtett lépések a tanultak szerint a rangot nem változtatják; ennek híján az eliminációért járó 6 pontnak legföljebb a felét kaphatja meg.

Harmadik megoldás. Jelölje D sorait sorban $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3, \underline{s}_4$.

$\underline{s}_1, \underline{s}_2$ lineárisan függetlenek, mert nem kaphatók meg egymásból skalárral való szorzással. (2 pont)

Az $\underline{s}_3 = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$, $\underline{s}_4 = 2\underline{s}_1 + 2\underline{s}_2$ és $\underline{s}_4 = 2\underline{s}_3$ összefüggések mutatják, hogy D bármelyik három sora lineárisan összefüggő. (Valóban: bárhogyan választunk ki három sort, van köztük olyan, amit a többi kettőből kifejezhetők.) (4 pont)

Mivel tehát D sorai közül legföljebb 2 választható ki úgy, hogy azok lineárisan függetlenek, ezért a sorrang definíciója szerint $r(D) = 2$. (4 pont)

Ha egy, a sorrang definíciójára építő megoldás $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ lineárisan függetlenségének a megállapítása után csak arra hivatkozik, hogy $\underline{s}_3$ és $\underline{s}_4$ is kifejezhető lineáris kombinációval az $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ vektorokból és ebből következtet (minden további indoklás nélkül) arra, hogy a sorrang 2, az elvi hibás gondolatmenet és a fenti pontozás szerinti utolsó 4 + 4 pontból legföljebb 3-at kaphat meg.

6*. Legyen $U \leq \mathbb{R}^4$ altér $\mathbb{R}^4$ -ben, $V \leq \mathbb{R}^6$ pedig altér $\mathbb{R}^6$ -ban és tegyük fel, hogy $\dim U = 3$ és $\dim V = 4$. A $W \subseteq \mathbb{R}^{10}$ halmaz álljon azokból az $\mathbb{R}^{10}$ -beli vektorokból, amiknek az első 4 koordinátája által alkotott oszlopvektor U -beli és az utolsó 6 koordinátája által alkotott oszlopvektor V -beli. Mutassuk meg, hogy W altér $\mathbb{R}^{10}$ -ben és határozzuk meg $\dim W$ értékét.

* * * * *

Az alábbi megoldásban (a jobb követhetőség érdekében) egy $\mathbb{R}^{10}$ -beli vektor *teteje*, illetve *alja* alatt annak az első 4, illetve az utolsó 6 koordinátája által alkotott vektort fogjuk érteni.

Legyen $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ két tetszőleges W -beli vektor és jelölje $\underline{u}_i$, illetve $\underline{v}_i$ a $\underline{w}_i$ tetejét, illetve alját ($i = 1, 2$ esetén). Ekkor $\underline{w}_1 + \underline{w}_2$ teteje nyilván $\underline{u}_1 + \underline{u}_2$, az alja pedig $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$. Mivel U és V altér és így zártak az összeadásra, ezért $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$ és $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in V$. Így $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$ következik. (1 pont)

Hasonlóan: ha a $\underline{w} \in W$ vektor teteje, illetve alja $\underline{u}$, illetve $\underline{v}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, akkor $\lambda \underline{w}$ teteje, illetve alja nyilván $\lambda \underline{u}$, illetve $\lambda \underline{v}$. U és V zártak a λ -val való szorzásra, mert alterek, így $\lambda \underline{u} \in U$ és $\lambda \underline{v} \in V$. Így tehát $\lambda \underline{w} \in W$ is igaz. (1 pont)

$W \neq \emptyset$, mert $U \neq \emptyset$ és $V \neq \emptyset$ (az altér definíciója szerint), így egy tetszőleges U -beli és V -beli vektorból elkészíthető egy W -beli. (0 pont)

(Bár a hiányáért nem jár pontlevonás, de a $W \neq \emptyset$ állítás indoklásáért adható 1 pont – persze csak akkor, ha ezzel a feladatért járó összpontszám nem haladja meg a 10-et.)

Mivel tehát W zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra (és $W \neq \emptyset$), ezért W valóban altér. (1 pont)

Válasszunk U -ban és V -ben egy-egy bázist: legyenek ezek $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$, illetve $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ (ahol a bázisok elemszámát $\dim U$, illetve $\dim V$ határozta meg). (1 pont)

Készítsük el az $\underline{u}_i$ vektorokból az $\mathbb{R}^{10}$ -beli $\underline{b}_i$ vektorokat ($i = 1, 2, 3$) esetén úgy, hogy $\underline{b}_i$ teteje $\underline{u}_i$, az alja pedig az ($\mathbb{R}^6$ -beli) nullvektor. Hasonlóan, a $\underline{c}_j$ vektorok teteje az ($\mathbb{R}^4$ -beli) nullvektor, az alja pedig $\underline{v}_j$ legyen ($j = 1, \dots, 4$ esetén). (0 pont)

Ekkor $\underline{0} \in U$ és $\underline{0} \in V$ miatt (ami következik U és V altér voltából) a $\underline{b}_i$ és $\underline{c}_j$ vektorok W -beliek. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy a $\underline{b}_i$ és $\underline{c}_j$ vektorok együtt generátorrendszert alkotnak W -ben. (0 pont)

Legyen ezért $\underline{w} \in W$ tetszőleges vektor, jelölje ennek a tetejét $\underline{u}$, az alját $\underline{v}$. Mivel $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ bázis és így generátorrendszer U -ban, ezért $\underline{u}$ kifejezhető belőlük lineáris kombinációval: $\underline{u} = \alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \alpha_3 \underline{u}_3$.

Hasonlóan, $\underline{v}$ is kifejezhető a $\underline{v}_j$ -kből: $\underline{v} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_4 \underline{v}_4$. Ekkor $\underline{w} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \alpha_3 \underline{b}_3 + \beta_1 \underline{c}_1 + \dots + \beta_4 \underline{c}_4$ nyilván igaz (mert a $\sum \alpha_i \underline{b}_i$ vektor alja és a $\sum \beta_j \underline{c}_j$ vektor teteje a megfelelő méretű nullvektor). Mivel tehát W minden vektora kifejezhető a $\{\underline{b}_i\} \cup \{\underline{c}_j\}$ rendszerből lineáris kombinációval, ezért ezek valóban generátorrendszert alkotnak W -ben. (2 pont)

Most megmutatjuk, hogy a $\{\underline{b}_i\} \cup \{\underline{c}_j\}$ rendszer lineárisan független. (0 pont)

Vegyük ezen célból egy $\underline{0}$ -t adó lineáris kombinációjukat: $\alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \alpha_3 \underline{b}_3 + \beta_1 \underline{c}_1 + \dots + \beta_4 \underline{c}_4 = \underline{0}$. Mivel a $\sum \alpha_i \underline{b}_i$ vektor alja és a $\sum \beta_j \underline{c}_j$ vektor teteje a (megfelelő méretű) nullvektor, ezért ebből $\alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \alpha_3 \underline{b}_3 = \underline{0}$ és $\beta_1 \underline{c}_1 + \dots + \beta_4 \underline{c}_4 = \underline{0}$ is következik. Ezekből viszont nyilván $\alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \alpha_3 \underline{u}_3 = \underline{0}$ és $\beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_4 \underline{v}_4 = \underline{0}$ is adódik. Mivel azonban az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$, illetve $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4$ rendszerek lineárisan függetlenek (hiszen bázist alkotnak U -ban, illetve V -ben), ezért a lineáris függetlenség ekvivalens definíciója szerint $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ és $\beta_1 = \dots = \beta_4 = 0$. Ezzel tehát valóban beláttuk a $\{\underline{b}_i\} \cup \{\underline{c}_j\}$ rendszer lineárisan függetlenségét (ugyancsak ennek a tanult, ekvivalens definíciója értelmében). (2 pont)

A fentiekből következően a $\{\underline{b}_i\} \cup \{\underline{c}_j\}$ rendszer bázis W -ben (hiszen beláttuk, hogy generátorrendszer W -ben és lineárisan független is). Mivel ez a rendszer összesen 7 vektorból áll, ezért $\dim W = 7$. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Első pótzárthelyi — pontozási útmutató
2022. november 4.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontoszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontoszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontoszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatról nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontoszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírtól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Mennyi maradékot adhat 273-mal osztva egy olyan szám, melynek 57-szerese 99 maradékot ad 273-mal osztva?

* * * * *

Ha x ilyen szám, akkor $57x \equiv 99 \pmod{273}$. (0 pont)

A tanultak szerint ez a lineáris kongruencia akkor és csak akkor megoldható, ha $(57, 273) \mid 99$ (ahol (a, b) az a és b legnagyobb közös osztóját jelöli). (0 pont)

Mivel $57 = 3 \cdot 19$, $273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$, a kérdéses lnko 3, amivel 99 osztható, így lesz megoldás, és pedig három darab modulo 273. (0 pont)

A fentiekre persze lehet pontokat kapni (ld. később), de teljes megoldás adható nélkülük is, ezért a hiányuk nem kell, hogy pontlevonással járjon.

A kongruenciát 3-mal osztva az eredetivel ekvivalens $19x \equiv 33 \pmod{91}$ kongruenciát kapjuk. (1+1 pont)

Ezt 5-tel szorozva $95x \equiv 165 \pmod{91}$, ebből pedig $4x \equiv 74 \pmod{91}$ adódik. (1 pont)

Mivel a modulushoz relatív prím számmal történő szorzás ekvivalens átalakítás, ez is ekvivalens az eredeti kongruenciával. (1 pont)

Ezt 2-vel osztva a $2x \equiv 37 \pmod{91}$ kongruenciát kapjuk, ami szintén ekvivalens az eredetivel. (1+1 pont)

Innen $2x \equiv 128 \pmod{91}$, végül 2-vel való újabb osztás után $x \equiv 64 \pmod{91}$. (1 pont)

Ez az osztás is (mint minden helyesen elvégzett osztás) ekvivalens átalakítás, (1 pont)

így a keresett maradékok 64 , $64 + 91 = 155$ és $64 + 2 \cdot 91 = 246$. (2 pont)

A kongruenciát természetesen máshogy is meg lehet oldani, pl. Euklideszi algoritmussal. Elvi hibás átalakításért (pl. osztásnál a modulus változásának figyelmen kívül hagyása) darabonként 4 pontot vonjunk le. Aki nem vizsgálja, hogy egy átalakítás ekvivalens-e, attól esetenként 1 pontot

vonjunk le. Ez természetesen kiváltható pl. a kapott megoldások ellenőrzésével vagy a megoldások darabszámára való hivatkozással. A kongruencia két oldalához egymással kongruens számokat adva (vagy olyan átalakítást végezve, ami ennek felel meg) nem szükséges az átalakítás ekvivalenciáját vizsgálni. Ha osztásnál nem világos, hogy a hallgató érti-e, hogy miért nem változik a modulus, ezért darabonként 1 pontot vonjunk le, mint ahogy számolási hibákért is. Aki az Euklideszi algoritmust nem a tanult módon hajtja végre, annak a teljes pontszámért indokolnia kell, hogy a végeredmény miért helyes. Az Euklideszi algoritmust a tanult módon futtató hallgatóknak elég arra hivatkozniuk, hogy az algoritmust használják (ami tudottan helyes eredményt ad). Erre utaló állítás hiányában 1 pontot vonjunk le. Aki csak annyit állapít meg, hogy van megoldás és azt helyesen indokolja, ezért 1 pontot kapjon, aki azt is meg tudja mondani, hogy mod 273 három megoldás lesz, az pedig még 1 pontot.

2. Mennyi maradékot ad 2^{1032} 70-nel osztva?

* * * * *

Első megoldás. Az Euler-Fermat tételt közvetlenül nem tudjuk használni, mert 2 és 70 nem relatív prímek. (0 pont)

Használhatjuk viszont a tételt 2^{1032} 35-ös maradékának meghatározására: $2^{\varphi(35)} \equiv 1 \pmod{35}$, hiszen 2 és 35 relatív prímek. (2 pont)

A tanultak szerint $\varphi(35) = (5-1)(7-1) = 24$, (1 pont)

a $2^{24} \equiv 1 \pmod{35}$ kongruenciát a 43-ra emelve ($43 \cdot 24 = 1032$ miatt) $2^{1032} \equiv 1 \pmod{35}$ adódik. 2^{1032} 35-ös maradéka tehát 1, (2 pont)

a 70-es maradéka így vagy 1 vagy 36. (3 pont)

Mivel 2^{1032} páros, a keresett maradék 36 kell legyen. (2 pont)

Aki csak annyit állapít meg, hogy az Euler-Fermat tételt közvetlenül nem tudjuk használni, mert 2 és 70 nem relatív prímek és más megoldásra sem kap részpontot, az ezért a megállapításért 1 pontot kapjon.

Második megoldás. A feladatot a modulo m hatványozásról tanultak segítségével oldjuk meg.

(0 pont)

$2^1 \equiv 2 \pmod{70}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{70}$, $2^4 \equiv 16 \pmod{70}$, $2^8 \equiv 46 \pmod{70}$, mert 46 a $16^2 = 256$ 70-es osztási maradéka. (3 pont)

$2^{16} \equiv 16 \pmod{70}$, mert 16 a $46^2 = 2116$ 70-es osztási maradéka. (2 pont)

A további négyzetre emelések esetén tehát a 16-os és a 46-os maradékok váltogatják egymást, (3 pont)

így $2^{1024} \equiv 16 \pmod{70}$. (1 pont)

A keresett maradék így 2^{1024} és 2^8 maradékai alapján $16 \cdot 46 = 736$ maradéka, vagyis 36 lesz. (1 pont)

3. Mutassuk meg, hogy az $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-3}{11}$ és $\frac{x+2}{2} = \frac{y+6}{5} = \frac{z-2}{4}$ egyenletrendszerű egyeneseknek van közös pontja és adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely mindkét egyenest tartalmazza.

* * * * *

A közös pont koordinátái a két egyenes egyenletrendszereinek közös megoldásaként adódnak.

(0 pont)

Az első egyenletrendszer első egyenletéből $7x - 7 = 3y - 6$, a második egyenletrendszer második egyenletéből pedig $5x + 10 = 2y + 12$. Az utóbbi másfélszereséből az előbbit levonva $\frac{1}{2}x + 22 = 24$, vagyis $x = 4$, majd innen $y = 9$ adódik. (1 pont)

Az első egyenletrendszer második egyenletéből így $z = 14$ -et kapjuk. (1 pont)

Az így kapott értékekre persze teljesül az első egyenletrendszer mindkét egyenlete és a második egyenletrendszer első egyenlete, ellenőriznünk kell azonban, hogy a második egyenletrendszer második egyenlete is teljesül-e (igen). (1 pont)

Számolási hibáért (darabonként) 1 pontot vonjunk le. Természetesen aki megadja az $x = 4, y = 9, z = 14$ koordinátákat és ellenőrzi, hogy ezek mindkét egyenletrendszert kielégítik, az is kapjon 3 pontot. A közös pont kiszámítása helyett lehet arra is hivatkozni, hogy létezik a két egyenest tartalmazó sík (amennyiben ezt a hallgató csakugyan megmutatja) és a két egyenes nem párhuzamos (hiszen az irányvektoraik nem számszorosai egymásnak), így kell legyen metszéspontjuk.

Olyan S síkot keresünk, mely tartalmazza mindkét egyenest (vagyis párhuzamos is mindkettővel), a normálvektora tehát merőleges mindkét egyenes irányvektorára. (1 pont)

Az egyenletrendszerekből leolvasható, hogy az első egyenes irányvektora $(3, 7, 11)$, a másodiké $(2, 5, 4)$. (1 pont)

Legyen a keresett normálvektor (a, b, c) , ekkor a két merőlegességi feltételből (a skaláris szorzat használatával) $3a + 7b + 11c = 0$ és $2a + 5b + 4c = 0$. (1 pont)

Az első egyenletből a második másfélszeresét kivonva $5c = \frac{b}{2}$, vagyis $b = 10c$ adódik, innen pedig $a = -27c$, a normálvektor(ok egyike) tehát $(-27, 10, 1)$. (2 pont)

A $(-27, 10, 1)$ normálvektorú síkok tehát mindkét egyenessel párhuzamosak, azt keressük közülük, amely tartalmazza is az egyeneseket, ehhez elég pl. ha a sík tartalmazza a már kiszámított metszéspontot, (1 pont)

innen a keresett egyenlet $-27x + 10y + z = -27 \cdot 4 + 10 \cdot 9 + 14 = -4$. (1 pont)

Aki nem számítja ki a metszéspontot, annak persze másképp kell garantálnia, hogy a sík mindkét egyenest tartalmazza: vehet például az egyik egyenesről egy pontot és annak segítségével felírhatja a sík egyenletét, majd a másik egyenes egy pontját ebbe behelyettesítve győződik meg róla, hogy a sík nem csak párhuzamos mindkét egyenessel, hanem tartalmazza is azokat.

4. A $V \subseteq \mathbb{R}^6$ halmaz azon vektorokból áll, melyeknek ugyanannyi pozitív koordinátájuk van, mint negatív. Így például a jobbra látható $\underline{v}$ vektor V -beli, míg $\underline{w}$ nem V -beli. Altér-e V $\mathbb{R}^6$ -ban?

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

* * * * *

V akkor és csak akkor altér, ha bármely két V -beli vektor összege is V -beli és bármely V -beli vektor bármely számszorosa is V -beli. (0 pont)

Az $(1, -1, 0, 0, 0, 0)^T$ és $(-1, 2, 0, 0, 0, 0)^T$ vektorok V -ben vannak, az összegük, a $(0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$ vektor azonban nincs, (6 pont)

így V a fentiek szerint nem altér. (4 pont)

Természetesen rengeteg másik ellenpélda is adható. Aki ténylegesen nem bizonyítja be (pl. ellenpéldával), hogy az összeadásra nem zárt V , hanem csak annyit állapít meg, hogy *nem feltétlen* zárt, az az ezt alátámasztó érvelése minőségétől függően 0 és 4 közti pontot kapjon az első 6-ból.

Bár ez közvetlenül nem járul hozzá egy helyes megoldáshoz, de ha egy megoldó (hiánytalanul) megmutatja, hogy a skalárral szorzás nem vezet ki V -ből, akkor ezért 4 pontot kaphat; ha pedig a megoldásban nyoma van annak, hogy az összeadásra való zártasgot is elkezd vizsgálni (és nem csak felírja), akkor ezért további 1 pont adható.

5. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^3$ vektorokról annyit tudunk, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$. Mutassunk példát arra, hogy ekkor a $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok lehetnek lineárisan függetlenek és arra is, hogy lehetnek lineárisan összefüggők is (a példák helyességét természetesen indokolni kell).

* * * * *

Legyen például $\underline{a} = (1, 0, 0)$, $\underline{b} = (0, 1, 0)$, $\underline{c} = (0, 0, 1)$ és legyen először $\underline{d} = (1, 1, 1)$. (0 pont)

Ekkor $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \mathbb{R}^3$, hiszen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ az $\mathbb{R}^3$ -beli standard bázis. (1 pont)

$\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle = \mathbb{R}^3$ pedig (például) azért teljesül, mert a három vektor nem esik egy síkba, hiszen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamosak és $\underline{d}$ nincs benne az általuk meghatározott síkban (mivel a harmadik koordinátája nem 0, szemben $\underline{a}$ -val és $\underline{b}$ -vel). Az előadáson szerepelt, hogy három nem egy síkba eső vektor lineáris kombinációjaként bármely térvektor előállítható, így $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle = \mathbb{R}^3$, vagyis

$\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ csakugyan teljesül. (2 pont)

A $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok ekkor lineárisan függetlenek, mert $\beta \underline{b} + \gamma \underline{c} + \delta \underline{d} = \underline{0}$ esetén az első koordináta miatt $\delta = 0$, innen pedig a második, illetve a harmadik koordinátát figyelve $\beta = 0$ és $\gamma = 0$ is adódik. (3 pont)

Legyen most továbbra is $\underline{a} = (1, 0, 0)$, $\underline{b} = (0, 1, 0)$, $\underline{c} = (0, 0, 1)$, de $\underline{d} = (0, 1, 1)$. (0 pont)

Ekkor persze továbbra is teljesül, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \mathbb{R}^3$, (0 pont)

$\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle = \mathbb{R}^3$ pedig ismét azért teljesül, mert a három vektor nem esik egy síkba, hiszen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamosak és $\underline{d}$ nincs benne az általuk meghatározott síkban (mivel a harmadik koordinátája nem 0, szemben $\underline{a}$ -val és $\underline{b}$ -vel). A korábban látottak szerint ebből valóban következik, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle = \mathbb{R}^3$, vagyis $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ teljesül. (2 pont)

A $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok ekkor lineárisan összefüggők, mert $\underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$. (2 pont)

Mivel a feladat szövege nem kötötte ki, hogy a vektoroknak különbözőeknek kell lenniük, választhatjuk úgy $\underline{d}$ -t, hogy azonos legyen $\underline{c}$ -vel. Ekkor bármely $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ esetén teljesül, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ és az is, hogy a $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok összefüggők. Aki erre rámutat, természetesen kapja meg az erre a részre vonatkozó maximális pontszámot.

6*. Határozzuk meg a

$$\max_{n \in \mathbb{Z}^+} \text{lko}(21n + 6, 6n + 4)$$

értéket, ahol $\text{lko}(a, b)$ az a és b számok legnagyobb közös osztóját, $\mathbb{Z}^+$ pedig a pozitív egészek halmazát jelöli. (Vagyis határozzuk meg a $21n + 6$ és $6n + 4$ számok legnagyobb közös osztójának lehetséges legnagyobb értékét, ahol n végigfut a pozitív egész számokon.)

* * * * *

Első megoldás. Használjuk az Euklideszi algoritmust. (0 pont)

Az első maradékos osztás $n \geq 2$ esetén

$$21n + 6 = 3(6n + 4) + 3n - 6,$$

mert $0 \leq 3n - 6 < 6n + 4$. (2 pont)

Ha $3n - 6 = 0$, vagyis $n = 2$, akkor ezzel az algoritmus véget is ér, az $\text{lko } 6n + 4 = 16$. (1 pont)

Az előző megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot, de aki leírja (és nem kapna maximum pontot), annak adjuk meg.

A második maradékos osztás $n \geq 8$ esetén

$$6n + 4 = 2(3n - 6) + 16,$$

mert ekkor $0 \leq 16 < 3n - 6$. (2 pont)

Ha tehát $n \geq 8$, akkor az algoritmusról tanultak szerint 16-nál semmikép sem lehet nagyobb az lko , (3 pont)

a 16-os érték viszont elérhető (mint azt már láttuk, $n = 2$ -re, de az is elég, ha $16 \mid 3n - 6$, tehát pl. $n = 18$ esetén). (2 pont)

Ha $n \leq 7$, akkor $n = 1$ esetén az lko 1, $n = 2$ esetén 16, $3 \leq n \leq 7$ esetén pedig az első maradékos osztásnál keletkező maradék $3n - 6 \leq 15$, így a keresett maximum a korábban kapott 16. (1 pont)

Aki csak azt nem vizsgálja meg, hogy $3n - 6$ nemnegatív-e, attól ne vonjunk le pontot, aki viszont azt nem nézi meg, hogy $16 < 3n - 6$ teljesül-e, attól az utolsón kívül a második részpontszámából is vonjunk le 1-et.

Második megoldás. Az előadásról tudjuk, hogy ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $(a, m) = (b, m)$. (1 pont)

A $21n + 6 \equiv 3n - 6 \pmod{6n + 4}$ kongruencia miatt így $(21n + 6, 6n + 4) = (6n + 4, 3n - 6)$, (2 pont)

a $6n + 4 \equiv 16 \pmod{3n - 6}$ kongruencia miatt pedig $(6n + 4, 3n - 6) = (3n - 6, 16)$. (2 pont)

A keresett maximum tehát nem lehet több 16-nál, (3 pont)

a 16-os érték viszont elérhető, pl. $n = 2$ esetén, vagyis a maximum 16. (2 pont)

Aki csak annyit állapít meg, hogy a 16 elérhető, 2 pontot kapjon.

Harmadik megoldás. Legyen $d = \text{luko}(21n + 6, 6n + 4)$. (0 pont)

Ekkor $d|42n + 12 = 2 \cdot (21n + 6)$ és $d|42n + 28 = 7 \cdot (6n + 4)$, így $d|(42n + 28) - (42n + 12) = 16$. (6 pont)

Így $d \leq 16$, (2 pont)

és mivel $n = 2$ esetén $d = 16$, a keresett maximum 16. (2 pont)

Bevezetés a számításméletbe I.
második pótzárthelyi — pontozási útmutató
 2022. december 12.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontoszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontoszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontoszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozathoz nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontoszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírtól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$ -beli $\underline{v}$ vektort átlagosnak, ha $\underline{v}$ koordinátái a harmadiktól kezdve azonosak a megelőző két koordináta átlagával (átlagos pl. a jobbra látható vektor). Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ -beli átlagos vektorok által alkotott V altér dimenzióját. (Azt, hogy V altér, nem kell indokolnunk.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A keresett dimenzió 2 lesz, (0 pont)

ennek igazolására megadunk egy 2 elemű bázist V -ben. (1 pont)

Legyen $\underline{u} = (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})^T$, $\underline{v} = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})^T$, megmutatjuk, hogy $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ bázis V -ben. (1 pont)

Az $\underline{u}$ és a $\underline{v}$ vektor is átlagos, így valóban V -beliek. (1 pont)

Az $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ két elemű vektorrendszer független, hiszen egyik vektor sem skalárszorosa a másiknak. (1+1 pont)

Legyen most $\underline{x} \in V$ tetszőleges átlagos vektor, az első koordinátáját jelöljük a -val, a másodikat b -vel. A harmadik koordináta ekkor $\frac{a+b}{2}$, a negyedik pedig $\frac{a+3b}{4}$, vagyis $\underline{x} = (a, b, \frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4})^T$. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy $\underline{x}$ előáll $\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineáris kombinációjaként, vagyis ez a két vektor generátorrendszert alkot V -ben: (1 pont)

$$\underline{x} = (a, b, \frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4})^T = a \cdot (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})^T + b \cdot (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})^T = a\underline{u} + b\underline{v}. \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ független generátorrendszere V -nek, ezért bázis V -ben. (1 pont)

2. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát a p, q valós paraméterek minden értékére. (Magukat a megoldásokat tehát nem kell megadni.)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ x_1 + 3x_2 + p \cdot x_3 &= 9 \\ x_1 + q \cdot x_2 + 4x_3 &= p + 4 \end{aligned}$$

* * * * *

Az egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & p & 9 \\ 1 & q & 4 & p+4 \end{array} \right)$. (0 pont)

Gauss-eliminációt használunk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & p & 9 \\ 1 & q & 4 & p+4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & p-4 & 1 \\ 0 & q-2 & 0 & p-4 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & p-4 & 1 \\ 0 & 0 & (4-p)(q-2) & (p-4)-(q-2) \end{array} \right).$$
 (2 pont)

Ha $(4-p)(q-2) \neq 0$, akkor leoszthatunk vele és megkapjuk a harmadik vezéregyest. (1 pont)

Ekkor (vagyis ha $p \neq 4$ és $q \neq 2$) egy megoldást fogunk kapni, hiszen az elimináció végén olyan redukált lépcsős alakot kapnánk, melynek minden oszlopában van vezéregyes. (2 pont)

Ha $(4-p)(q-2) = 0$ (vagyis $p = 4$ és $q = 2$ közül legalább az egyik teljesül), akkor a bal oldali részen csupa 0 sort kapunk; vizsgáljuk meg a jobb oldalt is. (1 pont)

Ha $p = 4$ és $q = 2$, akkor a jobb oldal 0, így csupa 0 sort kapunk. (1 pont)

Ezt törölve adódik a lépcsős alak, melyben nem minden oszlopban van vezéregyes, így ebben az esetben végtelen sok megoldás lesz. (1 pont)

Végül ha $p = 4$ és $q = 2$ közül pontosan az egyik teljesül, akkor a jobb oldalon 0-tól különböző számot kapunk, ekkor tilos sorhoz jutunk, vagyis nincs megoldás. (2 pont)

Aki a Gauss-eliminációt csak addig végzi el, amíg a fenti eliminációban szereplő második mátrixot meg nem kapja és ebből von le következtetéseket, az az alábbiak szerint kapjon pontokat. Az elimináció ezen szakaszáért 1 pont, annak megállapításáért és helyes indoklásáért, hogy a $q = 2, p \neq 4$ esetben tilos sort kapunk és így nincs megoldás 2 pont, annak megállapításáért és helyes indoklásáért, hogy a $q = 2, p = 4$ esetben végtelen sok megoldás van 2 pont, végül a $q \neq 2$ eset teljes és helyes vizsgálatáért ($p = 4$ esetén nincs megoldás, $p \neq 4$ esetén egy megoldás van) 5 pont jár.

Aki kiszámítja a bal oldali 3×3 -as mátrix determinánsát és erre alapozva megállapítja, hogy $p \neq 4$ és $q \neq 2$ esetén lesz egyértelmű megoldás, de ennél többre nem jut (és nem ír le más megoldást), az legfeljebb 3 pontot kapjon.

3. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét a *determináns definíciója szerint*. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Először megmutatjuk, hogy a determináns definíciójában szereplő, előjelesen összeadandó szorzatok között két nemnulla szorzat szerepel. (2 pont)

Ha ugyanis nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a második sorból csak az 5-öt, a harmadik sorból csak a 4-et választhatjuk, így az első sorból vagy a 7-et, vagy a 6-ot kell választanunk. Az előbbi esetben a negyedik sorból a 2-t, az utóbbi esetben pedig a 3-at kell választanunk, így csakugyan két nemnulla szorzatunk lesz, mégpedig a $7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2$ és a $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. (1 pont)

Az ezekhez tartozó permutációk rendre az 1,3,2,4, illetve a 4,3,2,1. (1 pont)

Ezek közül az első inverziószáma 1, mivel az 1,3,2,4 permutációban csak a 3 és a 2 áll inverzióban, (1 pont)

a másodiké 6, mivel a 4,3,2,1 permutációban minden pár inverzióban áll. (1 pont)

A $7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2$ szorzatot tehát negatív előjellel kell figyelembe vennünk, mivel a hozzá tartozó permutáció inverziószáma páratlan, (1 pont)

a $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ szorzatot pedig pozitív előjellel, hiszen a hozzá tartozó permutáció inverziószáma páros. (1 pont)

A determináns értéke tehát $-7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20(-14 + 18) = 80$. (2 pont)

4. Legyen A a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg A^2 determinánsát (ahol A^2 persze az $A \cdot A$ mátrixot jelöli).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. A determinánsok szorzástétele szerint $\det A^2 = \det A \cdot \det A$, (3 pont)
 ezért kiszámítjuk $\det A$ értékét. Az A mátrix első két sorának összege épp A harmadik sora, így A sorai lineárisan összefüggő rendszert alkotnak. (2 pont)
 Az előadáson tanultak szerint ez ekvivalens azzal, hogy $\det A = 0$, (4 pont)
 így $\det A^2 = 0$. (1 pont)

Aki kiszámítja $\det A$ értékét, de azt semmilyen módon nem tudja $\det A^2$ értékével összekapcsolni, az 2 pontot kapjon.

Második megoldás.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 17 & 23 & 28 \\ 26 & 35 & 43 \end{pmatrix}. \quad (3 \text{ pont})$$

Az A^2 mátrix első két sorának összege épp A^2 harmadik sora, így A^2 sorai lineárisan összefüggő rendszert alkotnak. (3 pont)
 Az előadáson tanultak szerint ez ekvivalens azzal, hogy $\det A^2 = 0$. (4 pont)

Harmadik megoldás.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 17 & 23 & 28 \\ 26 & 35 & 43 \end{pmatrix}, \quad (3 \text{ pont})$$

a determinánsát Gauss-eliminációval számítjuk ki.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 17 & 23 & 28 \\ 26 & 35 & 43 \end{pmatrix} &= 9 \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 17 & 23 & 28 \\ 26 & 35 & 43 \end{pmatrix} = 9 \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \\ &= 9 \cdot \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 9 \cdot \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (7 \text{ pont})$$

A^2 determinánsát természetesen más, a tárgy anyagában szereplő módon is ki lehet számítani (pl. kifejtési tétellel). A determinánsra vonatkozó, de a tárgy anyagában nem szereplő állítások (pl. Sarrus-szabály) csak a vonatkozó állítás bizonyításával együtt használhatók. Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le, elvi hibákért (pl. sorcsere során a (-1) -gyel szorzás elmulasztása, sor osztása során a kapott mátrix determinánsának az osztóval való szorzása, stb.) pedig darabonként 4 pontot.

5. Legyen A a jobbra látható mátrix.

a) Határozzuk meg az $A^2 - 2A$ mátrixot.

b) Döntsük el, hogy létezik-e inverze az $A - E$ mátrixnak és ha igen, határozzuk is meg.

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ -28 & -12 \end{pmatrix}$$

* * * * *

a) $A^2 - 2A$ a 2×2 -es nullmátrix lesz, (2 pont)
 b) ezért $A^2 - 2A + E = E$. (1 pont)
 A mátrixszorzás összeadás fölötti (mindkét oldali) disztributivitása miatt $(A - E)(A - E) = A^2 - EA - AE + E^2$. (3 pont)
 $A^2 - EA - AE + E^2 = A^2 - 2A + E = E$, hiszen $EA = AE = A$ és $E^2 = E$. (1 pont)

Az $A - E$ mátrixot tehát akár jobbról, akár balról (1 pont)

beszorozva az $A - E$ mátrix-szal az egység mátrixot kapjuk, így $(A - E)$ -nek létezik inverze és az saját maga, (1 pont)

vagyis $\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ -28 & -13 \end{pmatrix}$. (1 pont)

b) Második megoldás. Gauss-eliminációt használunk az inverz létezésének eldöntésére és (ha létezik) a kiszámítására.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 13 & 6 & 1 & 0 \\ -28 & -13 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ -28 & -13 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{13} & \frac{28}{13} & 1 \end{array} \right).$$

(3 pont)

Innen már leolvasható, hogy $A - E$ determinánsa nem 0,

(1 pont)

így létezik inverze.

(1 pont)

Az eliminációt folytatva

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 1 & -28 & -13 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 13 & 6 \\ 0 & 1 & -28 & -13 \end{array} \right),$$

(2 pont)

az inverz tehát $\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ -28 & -13 \end{pmatrix}$. (1 pont)

Számolási hibáért darabonként 1, elvi hibáért darabonként 4 pontot vonjunk le. Aki $A - E$ helyett A inverzét keresi és (helyesen) megmutatja, hogy ez nem létezik, az ezért 1 pontot kapjon.

6*. Mutassuk meg, hogy bármely 2×2 -es mátrixot ki lehet egészíteni két új sorral, majd két új oszloppal úgy, hogy olyan 4×4 -es mátrixot kapjunk, melynek van inverze.

* * * * *

Legyen az eredeti mátrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, egészítsük ezt ki 4×4 -es mátrix-szá a következőképp:

$$A' = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3 \text{ pont})$$

Megmutatjuk, hogy $\det A' \neq 0$, ebből a tanultak szerint következik, hogy van inverze. (1 pont)

Fejtsük ki $\det A'$ -t az utolsó sora szerint. (1 pont)

$$\text{Így } \det A' = -\det \begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ pont})$$

Fejtsük ki ezt a determinánst is az utolsó sora szerint: (1 pont)

$$\det \begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad (2 \text{ pont})$$

így $\det A'$ csakugyan nem 0. (0 pont)

Azt, hogy A' -nek létezik inverze, persze máshogy is megmutathatjuk, pl. nem nehéz belátni, hogy az oszlopai lineárisan független rendszert alkotnak, amiből a tanultak szerint az állítás következik. Természetesen nem csak az itt leírt A' lesz helyes kiegészítés, rengeteg másik megoldás is adható.