Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2021. október 28.

1. Milyen maradékot ad az n egész szám 106-szorosa 271-gyel osztva, ha tudjuk, hogy ez a maradék 1-gyel több, mint magának az n-nek a 271-es osztási maradéka?

2. Milyen maradékot ad 600-zal osztva $2021^{2021} - 2021^{101}$?

3. Határozzuk meg a p paraméter értékét és írjuk fel az S sík egyenletét, ha tudjuk, hogy S tartalmazza az $A(1;2;2)$ és $B(3;4;1)$ pontokat és merőleges arra az e egyenesre, aminek az egyenletrendszere:

$$\frac{2x-7}{12} = \frac{8-y}{5} = \frac{z}{p}.$$

4. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az alábbi $\mathbb{R}^3$-beli vektorok. Adjuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált altér összes olyan elemét, aminek a második koordinátája 2-vel, a harmadik 3-mal nagyobb az elsőnél.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5. A p valós paraméter milyen értékeire alkotnak bázist $\mathbb{R}^4$-ben az alábbi $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

6*. Határozzuk meg az összes olyan p pozitív prímszámot, amire minden x egész és p-től különböző q pozitív prím esetén az $x^2 \equiv 1 \pmod{p \cdot q}$ kongruenciából $x \equiv 1 \pmod{p \cdot q}$ vagy $x \equiv -1 \pmod{p \cdot q}$ következik.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2021. december 2.

1. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 9 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & -5 & 0 & -8 & -9 \\ 3 & -6 & 8 & 0 & 10 \\ 4 & -7 & 9 & -10 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Jelölje A és B az alábbi mátrixokat és legyen $C = B^{-1} \cdot A \cdot B$. Határozzuk meg az A^{100} és C^{100} mátrixokat.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(A feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges megmutatni, hogy B^{-1} valóban létezik. Egy M mátrixra M^{100} azt a 100 tényezős szorzatot jelöli, aminek minden tényezője M.)

4. A 10×10-es A mátrix bal felső eleme 2, a főátlójának a többi eleme 1, a mátrix összes többi (vagyis nem a főátlóban lévő) eleme pedig szintén 2. (Így tehát A-nak összesen 9 darab 1-es és 91 darab 2-es eleme van.) Döntsük el, hogy A-nak létezik-e inverze és ha igen, akkor számítsuk ki.

5. A p valós paraméter minden értékére határozzuk meg az alábbi mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 & -30 & 20 \\ 1 & 0 & -21 & 10 \\ -2 & -8 & p & 2p-8 \\ 2 & 9 & 3 & p \end{pmatrix}$$

6*. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy van olyan megoldása, amiben a változók összege 2020, de olyan megoldása már nincs, amiben a változók összege 2021. Eldönthető-e ennyi információ alapján, hogy ugyanennek a lineáris egyenletrendszernek van-e olyan megoldása, amiben a változók összege 2022?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.
Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
pótzh, ELSŐ zárthelyi pótlása
2021. december 13.

1. Mennyi maradékot ad $3^{147} + 70^{147}$ 73-mal osztva?

2. Hány olyan egész szám van 1 és 2021 között, melyre teljesül, hogy 63-mal osztva 18, 91-gyel osztva pedig 34 maradékot ad?

3. Az e egyenes egyenletrendszere $x = y = \frac{z-3}{2}$, az f egyenes egyenletrendszere $\frac{x-3}{2} = y = z$. Döntsük el, hogy e és f egy síkba esnek-e (vagyis létezik-e olyan sík, amely mindkét egyenest tartalmazza).

4. Döntsük el, hogy alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok a vektorok, melyeknek van két azonos koordinátája.

5. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorrendszer lineárisan független $\mathbb{R}^4$-ben. Következik-e ebből, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}$ rendszer bázis $\mathbb{R}^4$-ben?

6*. Igaz-e, hogy ha az a és b egész számokra $a^{40} \not\equiv b^{40} \pmod{100}$, akkor $a^{40}b^{40} \not\equiv 1 \pmod{100}$?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.
Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
pótzh, MÁSODIK zárthelyi pótlása
2021. december 13.

1. Döntsük el, hogy létezik-e az alábbi A mátrixnak inverze. Ha igen, határozzuk meg A^{-1}-et és A^{-1} determinánsát.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} px_1 + px_2 + px_3 &= p \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + (p+3)x_3 &= 3 \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát a q valós paraméter minden értékére.

$$\begin{pmatrix} 0 & q & 1 & 3 \\ 2 & q & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Határozzuk meg a 3. feladat mátrixának rangját a q valós paraméter minden értékére.

5. Legyen A 5 rangú 5×5-ös mátrix. Mutassuk meg, hogy A előállítható 25 darab 1 rangú mátrix összegeként (vagyis léteznek olyan 1 rangú $A_1, A_2, \ldots, A_{25}$ mátrixok, melyekre $A_1 + A_2 + \ldots + A_{25} = A$).

6*. Igaz-e, hogy ha egy 5×5-ös A mátrix minden 2×2-es részmátrixának van inverze, akkor A-nak is van inverze?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótpótzh, ELSŐ zárthelyi pótlása
2021. december 20.

1. Milyen maradékot ad az n egész szám 309-cel osztva, ha tudjuk, hogy $178n - 1$ osztható 309-cel?

2. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg 4^{49} utolsó két számjegyét. (A megoldásban ne használjunk semmilyen egyéb ismeretet; a feladat a megfelelő, tanult algoritmus által végzett számítások dokumentálása.)

3. Milyen maradékot ad 701^{701701} 99-cel osztva?

4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, ami tartalmazza az $A(3; 4; 2)$ és a $B(4; 2; -1)$ pontokat és merőleges a $4x + y + 9z = 1$ egyenletű síkra.

5. Van-e $\mathbb{R}^4$-nek olyan bázisa, ami tartalmazza az alábbi $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorokat? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen bázist; ha nem, akkor indokoljuk ezt meg.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6*. Öt darab $\mathbb{R}^4$-beli vektor közül pontosan egyféleképpen lehet kiválasztani négyet úgy, hogy a kiválasztott vektorok bázist alkossanak $\mathbb{R}^4$-ben. Mutassuk meg, hogy ekkor az öt vektor egyike a nullvektor.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód. Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótpótzh, MÁSODIK zárthelyi pótlása
2021. december 20.

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 &= 6\\
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 10\\
x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 8\\
4x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 8x_4 &= 21
\end{aligned}$$

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát a p és q valós paraméterek minden értékére.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6\\ 2 & 4 & 8 & 11\\ 4 & q & 3 & 9\\ 0 & 0 & 2 & p \end{pmatrix}$$

3. Legyen A a jobbra látható mátrix. Létezik-e olyan X mátrix, melyre AX a 2×2-es egységmátrix? Ha igen, adjunk meg egy ilyet.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8\\ 3 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Döntsük el, hogy létezik-e a 2. feladatban szereplő mátrixnak inverze a $p = 0$, $q = 9$ értékek mellett. Ha az inverz létezik, határozzuk meg az első oszlopának harmadik elemét.

5. Mutassuk meg, hogy minden 4×4-es 4 rangú A mátrix előáll két 2 rangú mátrix összegeként. (Vagyis léteznek olyan B és C 2 rangú mátrixok, melyekre $B + C = A$.)

6*. Egy 3×3-as mátrix főátlójában két 0 szerepel, a mátrix összes többi eleme páratlan egész szám. Mutassuk meg, hogy a mátrixnak létezik inverze.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód. Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2021. október 28.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Milyen maradékot ad az n egész szám 106-szorosa 271-gyel osztva, ha tudjuk, hogy ez a maradék 1-gyel több, mint magának az n-nek a 271-es osztási maradéka?

* * * * *

A feladat feltételeiből $106n \equiv n+1 \pmod{271}$. Átrendezve: $105n \equiv 1 \pmod{271}$. (1+1 pont)
Mivel $(105, 271) = 1$ (mert nincs közös prímosztójuk), ezért a kapott lineáris kongruencia a tanult tétel szerint megoldható és 1 megoldása van modulo 271. (1 pont)
Mindkét oldalt 3-mal szorozva: $315n \equiv 3 \pmod{271}$, vagyis $44n \equiv 3 \pmod{271}$. (1 pont)
Most mindkét oldalt 6-tal szorozva: $264n \equiv 18 \pmod{271}$, vagyis $-7n \equiv 18 \pmod{271}$. (1 pont)
Itt mindkét oldalt 39-cel szorozva: $-273n \equiv 702 \pmod{271}$, vagyis $-2n \equiv 160 \pmod{271}$. (1 pont)
Végül mindkét oldalt (-2)-vel osztva: $n \equiv -80 \equiv 191 \pmod{271}$. (1 pont)
Mivel $(3, 271) = 1$, $(6, 271) = 1$ és $(39, 271) = 1$, ezért minden megtett lépés ekvivalens volt, így a kapott $n \equiv 191 \pmod{271}$ valóban megoldása a lineáris kongruenciának. (Itt a lépések ekvivalenciája helyett hivatkozhatunk arra is, hogy mivel a megoldások száma 1 modulo 271, ezért ez csak a 191 lehet, így az valóban megoldás; illetve természetesen ellenőrzéssel is meggyőződhetünk a 191 helyességéről.) (2 pont)
Ebből $n+1 \equiv 192 \pmod{271}$, így n 106-szorosa is 192 maradékot ad 271-gyel osztva. (1 pont)
Ha a fenti megoldásban a kapott eredmény helyességéről a lépések ekvivalenciájával vagy ellenőrzéssel győződünk meg, akkor a megoldhatóság tényének, illetve a megoldások számának az előzetes megállapítására nincs feltétlen szükség; így a fenti pontozás szerinti második 1 pont az ilyen (egyébként teljes értékű) megoldásokra is jár. A lineáris kongruenciát természetesen a tanult Euklideszi algoritmussal is megoldhatjuk. Ezzel sorra a $271n \equiv 0 \pmod{271}$, $105n \equiv 1 \pmod{271}$, $61n \equiv -2 \pmod{271}$, $44n \equiv 3 \pmod{271}$, $17n \equiv -5 \pmod{271}$, $10n \equiv 13 \pmod{271}$, $7n \equiv -18 \pmod{271}$, $3n \equiv 31 \pmod{271}$, $n \equiv -80 \equiv 191 \pmod{271}$ kongruenciák keletkeznek. Ekkor 1 pontot ér az a tény, hogy a megoldó az algoritmust alkalmazza (amit nem kell feltétlen megneveznie, elég, ha az alkalmazása révén ezt egyértelműen demonstrálja); további 2 pontot ér annak az ellenőrzése, hogy az eljárás a tanultak szerint alkalmazható, mert $(105, 271) = 1$; végül 4 pontot ér maga a számolás. A hiányzó 3 pont a fenti pontozás szerinti első $1+1$, illetve utolsó 1 pont.

2. Milyen maradékot ad 600-zal osztva $2021^{2021} - 2021^{101}$?

* * * * *

$\varphi(600) = \varphi(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2) = (2^3 - 2^2)(3-1)(5^2 - 5) = 160$ a tanult képlet szerint. (1 pont)
$(2021, 600) = 1$, mert 2021 se 2-vel, se 3-mal, se 5-tel nem osztható. (2 pont)
Így az Euler-Fermat tételből $2021^{160} \equiv 1 \pmod{600}$ következik. (1 pont)
Ezt a 12-edik hatványra emelve: $2021^{1920} \equiv 1^{12} = 1 \pmod{600}$ adódik. (2 pont)
Mindkét oldalt 2021^{101}-nel szorozva: $2021^{2021} \equiv 2021^{101} \pmod{600}$. (2 pont)
Így (a kongruencia definíciója szerint) $600 \mid 2021^{2021} - 2021^{101}$, vagyis a keresett maradék a 0. (2 pont)

3. Határozzuk meg a p paraméter értékét és írjuk fel az S sík egyenletét, ha tudjuk, hogy S tartalmazza az $A(1;2;2)$ és $B(3;4;1)$ pontokat és merőleges arra az e egyenesre, aminek az egyenletrendszere:

$$\frac{2x-7}{12} = \frac{8-y}{5} = \frac{z}{p}.$$

* * * * *

Első megoldás. e egyenletrendszerét átalakítva: $\frac{x-7/2}{6} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z}{p}$. Ebből az alakból már kiolvasható e egy irányvektora: $v = (6; -5; p)$ (mert a tanultak szerint e a $(\frac{7}{2}; 8; 0)$ ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes). (3 pont)
Mivel e merőleges S-re, ezért $\underline{v}$ merőleges az $\overrightarrow{AB}$ vektorra, (1 pont)
így $\underline{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. (1 pont)
$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (2; 2; -1)$ (ahol $\underline{b}$ és $\underline{a}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorokat jelöli), (1 pont)
amiből $0 = \underline{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - p$, vagyis $p = 2$ adódik. (1 pont)
$\underline{v} = (6; -5; 2)$ normálvektora S-nek, mert e merőleges S-re. (2 pont)
Ebből és (például) A-ból a tanultak szerint felírható S egyenlete: $6x - 5y + 2z = 0$. (1 pont)

Második megoldás. e egyenletrendszerét átalakítva: $\frac{x-7/2}{6} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z}{p}$. Ebből az alakból már kiolvasható e egy irányvektora: $v = (6; -5; p)$ (mert a tanultak szerint e a $(\frac{7}{2}; 8; 0)$ ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes). (3 pont)
$\underline{v}$ normálvektora S-nek, mert e merőleges S-re. (2 pont)
Ezzel és az A ponttal felírva S egyenletét: $6x - 5y + p \cdot z = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + p \cdot 2 = 2p - 4$. (1 pont)
Mivel S-en B is rajta van, ezért szintén kielégíti ezt az egyenletet: $6 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + p \cdot 1 = 2p - 4$. (2 pont)
Ebből $p - 2 = 2p - 4$, vagyis $p = 2$. (1 pont)
Ezt a fentibe visszahelyettesítve S egyenlete: $6x - 5y + 2z = 0$. (1 pont)

4. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az alábbi $\mathbb{R}^3$-beli vektorok. Adjuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált altér összes olyan elemét, aminek a második koordinátája 2-vel, a harmadik 3-mal nagyobb az elsőnél.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

* * * * *

Első megoldás. Legyen $\underline{z}$ egy ilyen vektor. Ekkor $\underline{z} \in \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ azt jelenti, hogy $\underline{z}$ kifejezhető $\underline{u}$-ból és $\underline{v}$-ből lineáris kombinációval, vagyis léteznek olyan α, β skalárok, hogy $\alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v} = \underline{z}$. (2 pont)
$\underline{z}$ első koordinátáját p-vel jelölve és elvégezve a műveleteket a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} 3\alpha + \beta &= p \\ 10\alpha - 6\beta &= p + 2 \\ \alpha - 2\beta &= p + 3 \end{aligned}$$ (3 pont)

Az első egyenletből p-t a másik kettőbe helyettesítve és rendezve a $7\alpha - 7\beta = 2$, $2\alpha + 3\beta = -3$ egyenletrendszerre jutunk. Ebből $\alpha = -\frac{3}{7}$ és $\beta = -\frac{5}{7}$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe: $p = -2$. (3 pont)
Így az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált altérnek az egyetlen, a feltételeknek megfelelő eleme a $\underline{z} = (-2; 0; 1)^T$ vektor .(2 pont)

Második megoldás. $\underline{u}$ és $\underline{v}$ nem párhuzamosak, mert nem skalárszorosai egymásnak, (1 pont)
ezért a tanultak szerint az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált altér egy origón átmenő S sík vektoraiból áll. (1 pont)
S-nek normálvektora lesz az $\underline{n} \neq \underline{0}$ vektor, ha az merőleges $\underline{u}$-ra és $\underline{v}$-re is. (1 pont)
Az $\underline{n} = (a, b, c) \neq \underline{0}$ pontosan akkor ilyen, ha az $\underline{n} \cdot \underline{u}$ és az $\underline{n} \cdot \underline{v}$ skaláris szorzatok értéke 0. (1 pont)
A skaláris szorzat képletéből: $3a + 10b + c = 0$ és $a - 6b - 2c = 0$. (1 pont)
Az első egyenlet kétszereséhez a másodikat adva $7a + 14b = 0$, vagyis $a + 2b = 0$ adódik. Így például az $a = 2$, $b = -1$ választással mindkét egyenletből $c = 4$, vagyis $\underline{n} = (2; -1; 4)$ normálvektora S-nek.(1 pont)
Ebből (például) az origót használva felírható S egyenlete: $2x - y + 4z = 0$. (1 pont)
A keresett vektor koordinátáit jelölje sorra $x = p$, $y = p + 2$ és $z = p + 3$. (1 pont)
Ezeket S egyenletébe helyettesítve: $2p - (p + 2) + 4(p + 3) = 0$, amiből $p = -2$ adódik. (1 pont)
Így az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált altérnek az egyetlen, a feltételeknek megfelelő eleme a $(-2; 0; 1)^T$ vektor . (1 pont)
A fenti megoldáshoz nem szükséges megfigyelni, hogy a $(p; p + 2; p + 3)$ koordinátájú vektorok a $(0; 2; 3)$ ponton átmenő, $(1, 1, 1)$ irányvektorú egyenes vektorai, így a feladat valójában egy sík és egy egyenes döféspontjának a meghatározását kérte. Ennek ellenére, ezért a megfigyelésért (legföljebb) 2 pont „visszaadható" a pusztán figyelmetlenségekért, számolási hibákért elvesztett esetleges pontok közül (de az érdemi, tartalmi hibákért elvesztettek közül nem - és a feladatért adott összpontszám természetesen semmiképp nem haladja meg a 10-et).

5. A p valós paraméter milyen értékeire alkotnak bázist $\mathbb{R}^4$-ben az alábbi $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

* * * * *

Megvizsgáljuk, hogy $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan függetlenek-e. Ehhez tegyük fel, hogy $\alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c} + \delta \cdot \underline{d} = \underline{0}$ teljesül valamilyen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ skalárokra. (1 pont)
Behelyettesítve $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ konkrét értékét és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + \gamma + \delta &= 0 \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma + \delta &= 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + \delta &= 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma + p \cdot \delta &= 0 \end{aligned}$$ (1 pont)

A második, illetve a harmadik egyenletből az elsőt kivonva $\beta = 0$ és $\gamma = 0$ adódik. Hasonlóan, a negyedik egyenletből az elsőt kivonva: $(p - 1) \cdot \delta = 0$. (1 pont)
Ha $p = 1$, akkor $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta = -2$ megoldása a lineáris egyenletrendszernek (más szóval: $\underline{a} = 2\underline{d}$), így ebben az esetben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan összefüggők, (1 pont)
így bázist sem alkotnak. (1 pont)
Ha viszont $p \neq 1$, akkor a fenti egyenletből $\delta = 0$ adódik. Ezt (és a $\beta = \gamma = 0$ értékeket) bármelyik egyenletbe helyettesítve $\alpha = 0$ is következik, így a $p \neq 1$ esetben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan függetlenek. (1 pont)
Az előadáson tanultak szerint $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, (1 pont)
így a tanult tétel szerint $\mathbb{R}^4$-ben minden 4 elemű, lineárisan független rendszer bázis. Ezért a $p \neq 1$ esetben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ bázis $\mathbb{R}^4$-ben. (3 pont)
Így a feladat kérdésére a válasz: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ a $p \neq 1$ értékekre alkot bázist $\mathbb{R}^4$-ben.
A fenti lineáris egyenletrendszer Gauss-eliminációval is megoldható (annak ellenére is, hogy ez nem az első zárthelyi anyagában szerepel). Ha valaki így dolgozik, akkor az eliminációért (a fenti pontozás szerinti harmadiknak írt) 1 pont jár, majd annak az eredményéből a $p = 1$, illetve a $p \neq 1$ esetben a helyes következtetés (világosan megindokolt) levonásáért (a negyediknek, illetve hatodiknak írt) 1-1 pont.

A fenti megoldásban az utolsó 1 + 3 pont megszerezhető az alábbi, sokkal több számolást igénylő módon is (tételek helyett közvetlenül a definíciók alkalmazásával):

Most megvizsgáljuk, hogy a $p \neq 1$ esetben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ generátorrendszert alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben. Ehhez legyen $\underline{v} = (x, y, z, u)^T \in \mathbb{R}^4$ tetszőleges vektor és keressük az $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ skalárokat úgy, hogy $\alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c} + \delta \cdot \underline{d} = \underline{v}$ teljesüljön. Megint behelyettesítve $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ konkrét értékét a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + \gamma + \delta &= x \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma + \delta &= y \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + \delta &= z \\ 2\alpha + \beta + \gamma + p \cdot \delta &= u \end{aligned} \qquad \text{(1 pont)}$$

A fentihez hasonló számolással: $\beta = y - x$, $\gamma = \frac{1}{2}(z - x)$, $\delta = \frac{1}{p-1}(u - x)$, végül $\alpha = \left(\frac{1}{2(p-1)} + \frac{5}{4}\right) x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z - \frac{1}{2(p-1)}u$. (1 pont)

Azt kaptuk tehát, hogy ha $p \neq 1$, akkor az egyenletrendszer minden x, y, z, u esetén megoldható, így $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ generátorrendszert alkot $\mathbb{R}^4$-ben. (1 pont)

Így a $p \neq 1$ esetben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ bázist alkot $\mathbb{R}^4$-ben. (1 pont)

6*. Határozzuk meg az összes olyan p pozitív prímszámot, amire minden x egész és p-től különböző q pozitív prím esetén az $x^2 \equiv 1 \pmod{p \cdot q}$ kongruenciából $x \equiv 1 \pmod{p \cdot q}$ vagy $x \equiv -1 \pmod{p \cdot q}$ következik.

* * * * *

Először megmutatjuk, hogy $p = 2$ megfelel a feladat feltételének. Legyen ezért $q > 2$ prím és tegyük fel, hogy $x^2 \equiv 1 \pmod{2q}$ teljesül valamely x egészre. Ebből a kongruencia definíciója szerint $2q \mid x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ adódik. (0 pont)

Mivel q prím és $q \mid (x-1)(x+1)$ ezért $x - 1$ vagy $x + 1$ prímtényezős felbontásában q-nak szerepelnie kell, vagyis $q \mid x - 1$ vagy $q \mid x + 1$. (1 pont)

$x - 1$ és $x + 1$ paritása nyilván azonos. Mivel a szorzatuk páros, ezért mindkettőnek párosnak kell lennie, vagyis $2 \mid x - 1$ és $2 \mid x + 1$. (1 pont)

Így $x - 1$ és $x + 1$ közül az egyik prímtényezős felbontásában 2 és q is szerepel, vagyis $2q \mid x - 1$ vagy $2q \mid x + 1$. Az első esetben $x \equiv 1 \pmod{2q}$, a másodikban $x \equiv -1 \pmod{2q}$, így $p = 2$ valóban teljesíti a kívánt feltételt. (1 pont)

Most azt látjuk be, hogy semmilyen $p > 2$ prím nem teljesíti a feladat feltételeit. Legyenek ezért $p, q > 2$, $p \neq q$ tetszőleges prímek. (0 pont)

Tekintsük az $x \equiv 1 \pmod{p}$, $x \equiv -1 \pmod{q}$ kongruenciarendszert; azt állítjuk, hogy ez megoldható. (1 pont)

A kongruenciarendszerek megoldására tanult módszer szerint az első kongruenciából $x = p \cdot k + 1$ valamilyen $k \in \mathbb{Z}$ egészre. Ezt a második kongruenciába helyettesítve: $p \cdot k + 1 \equiv -1 \pmod{q}$. Átrendezve: $p \cdot k \equiv -2 \pmod{q}$. (1 pont)

Mivel $p \neq q$ prímek, ezért nyilván $(p, q) = 1$. Így a tanult tétel szerint (mivel $1 \mid -2$) a $p \cdot k \equiv -2 \pmod{q}$ lineáris kongruencia megoldható. Egy tetszőleges k_0 megoldásra pedig $x_0 = p \cdot k_0 + 1$ valóban megoldása a kongruenciarendszernek. (2 pont)

Ekkor x_0-ra $p \mid x_0 - 1$ és $q \mid x_0 + 1$, így $p \cdot q \mid (x_0 - 1)(x_0 + 1) = x_0^2 - 1$, vagyis $x_0^2 \equiv 1 \pmod{pq}$. (1 pont)

Másrészt sem $x_0 \equiv 1 \pmod{pq}$, sem $x_0 \equiv -1 \pmod{pq}$ nem igaz. Valóban, például az első esetben $pq \mid x_0 - 1$ és így $q \mid x_0 - 1$ adódna. Ez azonban lehetetlen, mert $q \mid x_0 + 1$ (hiszen x_0 teljesíti az $x \equiv -1 \pmod{q}$ kongruenciát) és $q > 2$ miatt q nem lehet $(x_0 - 1)$-nek és $(x_0 + 1)$-nek is osztója. Hasonlóan, a $x_0 \equiv -1 \pmod{pq}$ esetben a $p \mid x_0 + 1$ és $p \mid x_0 - 1$ ellentmondásra jutnánk. (2 pont)

Összefoglalva tehát: a feladat feltételét egyedül a $p = 2$ prím teljesíti. (0 pont)

(Megjegyezzük, hogy a megoldás második felében többet láttunk be annál, mint amit a feladat kíván: ha $p > 2$ prím, akkor egyetlen $q > 2$, $q \neq p$ prím esetén sem következik az $x^2 \equiv 1 \pmod{p \cdot q}$ kongruenciából $x \equiv 1 \pmod{p \cdot q}$ vagy $x \equiv -1 \pmod{p \cdot q}$.)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2021. december 2.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 9 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A definícióban összeadandóként szereplő szorzatok közül csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem tartalmaznak 0 tényezőt, mert a többi nem befolyásolja a determináns értékét. (1 pont)
Egy ilyen szorzatban a második oszlopból csak a 2-es választható. Ezért a negyedik oszlopból már csak az 1-es választható (hiszen az első sorból már vettünk elemet), így a harmadik oszlopból csak a 2-es.(1 pont)
Eddig az első és ötödik oszlopból, illetve a második és negyedik sorból nem választottunk elemet, így kétféleképp fejezhető be a 0-t nem tartalmazó bástyaelhelyezés kiválasztása: az első és az ötödik oszlopból is az 5-öst választva, vagy az elsőből a 3-ast és az ötödikből a 8-ast. (1 pont)
Így két darab, nullát nem tartalmazó szorzat van: $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 2$, illetve $2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 2$. (1 pont)
Az elsőhöz tartozó π permutáció a $2, 1, 4, 5, 3$ (mert az első sorból a második elemet vettük ki, a másodikból az elsőt, stb). (1 pont)
π inverziószáma $I(\pi) = 3$ (az inverzióban álló elempárok $(2, 1)$, $(4, 3)$ és $(5, 3)$). (1 pont)
Mivel $I(\pi)$ páratlan, az első szorzat negatív előjelet kap. (1 pont)
Hasonlóan, a második szorzathoz tartozó permutáció a $2, 5, 4, 1, 3$, ennek az inverziószáma 6, így a szorzat előjele pozitív. (1 pont)
Végül is tehát a determináns értéke $-2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 2 = 4$. (2 pont)
Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba, figyelmetlenség 1 pont levonást jelent. Ha azonban egy megoldásban a determináns definíciója ismeretének (akár részleges) hiányára utaló elvi hiba van, akkor arra legföljebb 3 pont adható (az is csak akkor, ha egyébként a megoldás értékes lépéseket is tartalmaz).

2. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & -5 & 0 & -8 & -9 \\ 3 & -6 & 8 & 0 & 10 \\ 4 & -7 & 9 & -10 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. Jelölje a feladatban szereplő mátrixot A. Látható, hogy $A^T = -A$ (mert minden $1 \le i, j \le 5$ esetén $a_{i,j} = -a_{j,i}$). (1 pont)
A tanult tétel szerint $\det A = \det A^T$, amiből tehát $\det A = \det(-A)$ következik. (3 pont)
Másrészt $\det(-A) = -\det A$, mert a $(-A)$ mátrixot megkaphatjuk A-ból úgy, hogy A-nak mind az öt sorát (-1)-gyel szorozzuk és a tanultak szerint minden ilyen lépés ellentettjére változtatja a determináns értékét (vagyis $\det(-A) = (-1)^5 \cdot \det A$). (3 pont)
A fentieket összevetve $\det A = -\det A$ adódik, amiből tehát $\det A = 0$. (3 pont)

Második megoldás. A determinánst a Gauss-elimináció determinánsra vonatkozó változatával számítjuk:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & -5 & 0 & -8 & -9 \\ 3 & -6 & 8 & 0 & 10 \\ 4 & -7 & 9 & -10 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & 0 & -8 & -9 \\ 3 & -6 & 8 & 0 & 10 \\ 4 & -7 & 9 & -10 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -10 & -20 & -23 \\ 0 & -6 & -7 & -18 & -11 \\ 0 & -7 & -11 & -34 & -28 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & -13 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -13 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13/5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39/5 \end{vmatrix} = (-5)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-5)^2 \cdot 0 = 0 \qquad \text{(10 pont)}$$

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Arányos részpontszám jár minden, a determináns kiszámításának irányába mutató, hasznos lépésért. A kifejtési tétel puszta alkalmazása (egyéb, további átalakítások nélkül) nem ér pontot, mert egyedül ezzel a determináns meghatározása nem válik könnyebbé az eredeti feladatnál.

3. Jelölje A és B az alábbi mátrixokat és legyen $C = B^{-1} \cdot A \cdot B$. Határozzuk meg az A^{100} és C^{100} mátrixokat.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(A feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges megmutatni, hogy B^{-1} valóban létezik. Egy M mátrixra M^{100} azt a 100 tényezős szorzatot jelöli, aminek minden tényezője M.)

* * * * *

Első megoldás. A mátrixszorzás definíciója szerint A^2-et kiszámítva kapjuk, hogy $A^2 = E$. (3 pont)
Ebből $A^{100} = (A^2)^{50} = E^{50} = E$ adódik (az $E \cdot E = E$ összefüggés ismételt alkalmazásával). (2 pont)
$C^2 = B^{-1} \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A \cdot B = B^{-1} \cdot A \cdot E \cdot A \cdot B = B^{-1} \cdot A^2 \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E$, ahol felhasználtuk az inverz definíciójából adódó $B \cdot B^{-1} = E$ és $B^{-1} \cdot B = E$ összefüggéseket és a fentebb kapott $A^2 = E$ egyenlőséget (valamint az egységmátrix fentebb már használt tulajdonságát). (4 pont)
Ebből a fentivel azonos módon következik, hogy $C^{100} = E$ is igaz. (1 pont)
A fenti megoldásban felhasználtuk az $(A^k)^n = A^{k \cdot n}$ azonosságot, valamint (C^2 meghatározásakor) azt is, hogy a mátrixszorzás asszociativitása háromnál több tagú szorzatokra is érvényes; ezek indoklásának (illetve megemlítésének) a hiányáért azonban nem vonunk le pontot. Az $A^2 = E$ összefüggésből $A^{100} = E$ indokolható úgy is, hogy A hatványai felváltva A-val, illetve E-vel egyenlők; ha ezt egy megoldó minden további indoklás nélkül kijelenti, akkor ezért a fenti pontozás szerinti, másodiknak írt 2 pontból 1-et megkaphat (és a másik 1 pont az indoklásért jár).

Második megoldás. A^{100} meghatározása, illetve az ezért járó pontszámok azonosak a fentivel. (3+2 pont)
Meghatározzuk B^{-1}-et a Gauss-elimináció megfelelő, tanult változatával:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

B^{-1} tehát a fenti, a vonaltól jobbra álló 3×3-as mátrix. (2 pont)

Ebből a mátrixszorzás definícióját alkalmazva kapjuk a $C = B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot. (1 pont)
C-t négyzetre emelve adódik, hogy $C^2 = E$. (1 pont)
Ebből a fentivel azonos módon következik, hogy $C^{100} = E$ is igaz. (1 pont)

4. A 10×10-es A mátrix bal felső eleme 2, a főátlójának a többi eleme 1, a mátrix összes többi (vagyis nem a főátlóban lévő) eleme pedig szintén 2. (Így tehát A-nak összesen 9 darab 1-es és 91 darab 2-es eleme van.) Döntsük el, hogy A-nak létezik-e inverze és ha igen, akkor számítsuk ki.

* * * * *

A^{-1}-et a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 2 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -17/2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{array}\right) \quad (6 \text{ pont})$$

A vonaltól balra egységmátrix keletkezett (és így $\det A \neq 0$), ezért A-nak létezik inverze (3 pont)
és az a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (1 pont)
Az inverz létezését indokolhatjuk úgy is, hogy külön kiszámítjuk A determinánsát és mivel az nem 0 ($\det A = -2$), ezért a tanultak szerint A^{-1} létezik. Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. Az egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ha egy megoldó A^{-1} számolása közben egyszerű számolási hibát vét, de a végén a számolását beszorzással ellenőrizve észreveszi, hogy hibázott, az ezért 1 pontot visszakaphat a számolási hibákért levont pontok közül még akkor is, ha a hibát kijavítani nem tudja.

5. A p valós paraméter minden értékére határozzuk meg az alábbi mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 & -30 & 20 \\ 1 & 0 & -21 & 10 \\ -2 & -8 & p & 2p-8 \\ 2 & 9 & 3 & p \end{pmatrix}$$

* * * * *

A rangot a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 5 & 15 & -30 & 20 \\ 1 & 0 & -21 & 10 \\ -2 & -8 & p & 2p-8 \\ 2 & 9 & 3 & p \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & -3 & -15 & 6 \\ 0 & -2 & p-12 & 2p \\ 0 & 3 & 15 & p-8 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & p-2 & 2p-4 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 \end{pmatrix} \quad \text{(3 pont)}$$

Ha most $p = 2$, akkor az utolsó két sor csupa nulla sor, így ezek elhagyhatók. (1 pont)
Ebben az esetben a megmaradó, két sorú mátrix lépcsős alakú, így a tanultak szerint a rangja (és vele együtt az eredeti mátrixé is) 2. (2 pont)
A $p \neq 2$ esetben viszont a lépcsős alakot az utolsó két sor $(p-2)$-vel való osztásával kapjuk:

$$= \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(2 pont)}$$

Így ilyenkor a rang értéke (a lépcsős alak sorainak – másképpen vezéregyeseinek – száma, azaz) 4.(2 pont)
Összefoglalva: ha $p = 2$, akkor a mátrix rangja 2, ha viszont $p \neq 2$, akkor a mátrix rangja 4. (0 pont)
Ha egy megoldó a rang definícióját használva csak annyit állapít meg, hogy a rang értéke p minden értékére legalább 2, mert az első két oszlop lineárisan független (hiszen egyik sem skalárszorosa a másiknak), akkor ezért 1 pontot kaphat. (Az a megállapítás viszont nem ér pontot, hogy a rang értéke legföljebb a sorok és oszlopok száma, vagyis 4.) Ha egy megoldó kiszámítja a mátrix determinánsát (ami $-15(p-2)^2$), és ebből a determinánsrang definícióját használva megállapítja, hogy $p \neq 2$ esetén a rang értéke 4, akkor ezért összesen 4 pontot kaphat.

6*. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy van olyan megoldása, amiben a változók összege 2020, de olyan megoldása már nincs, amiben a változók összege 2021. Eldönthető-e ennyi információ alapján, hogy ugyanennek a lineáris egyenletrendszernek van-e olyan megoldása, amiben a változók összege 2022?

* * * * *

Első megoldás. Megmutatjuk, hogy igen, eldönthető: nincs ilyen megoldás. Legyen ugyanis $\underline{x}_0$ olyan megoldása az egyenletrendszernek, amiben a változók összege 2020 és tegyük fel indirekt, hogy létezik egy olyan $\underline{x}_2$ megoldás is, amiben a változók összege 2022. (0 pont)
Ekkor ha $(A|\underline{b})$ jelöli a szóban forgó lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixát, akkor a tanultak szerint $A \cdot \underline{x}_0 = \underline{b}$ és $A \cdot \underline{x}_2 = \underline{b}$ teljesül. (2 pont)
Legyen $\underline{x}_1 = \frac{1}{2} \cdot (\underline{x}_0 + \underline{x}_2)$. Megmutatjuk, hogy $\underline{x}_1$ is megoldása az egyenletrendszernek. Valóban, a mátrixszorzás tanult azonosságait használva

$$A \cdot \underline{x}_1 = A \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot (\underline{x}_0 + \underline{x}_2)\right) = \tfrac{1}{2} \cdot (A \cdot \underline{x}_0 + A \cdot \underline{x}_2) = \tfrac{1}{2} \cdot (\underline{b} + \underline{b}) = \underline{b},$$

vagyis $\underline{x}_1$ valóban megoldás. (4 pont)
Másrészt $\underline{x}_1$ koordinátáinak az összege 2021, mert $\underline{x}_0 + \underline{x}_2$ koordinátáinak az összege $2020 + 2022 = 4042$, így $\frac{1}{2} \cdot (\underline{x}_0 + \underline{x}_2)$ koordinátáinak az összege ennek a fele. (3 pont)
Ezzel ellentmondásra jutottunk: mégis létezik az egyenletrendszernek olyan megoldása, amiben a változók összege 2021. Ez az ellentmondás tehát valóban bizonyítja, hogy nem létezhet olyan megoldás, amiben a változók összege 2022. (1 pont)

Második megoldás. Megmutatjuk, hogy igen, eldönthető: nincs ilyen megoldás. Ehhez futassuk le képzeletben a Gauss-eliminációt a szóban forgó lineáris egyenletrendszerre. (0 pont)
Mivel a rendszer megoldható (ez a feladat feltételeiből következik), ezért az eljárás redukált lépcsős alakkal ér véget (vagyis nem keletkezik az első fázis végén tilos sor). (1 pont)
Ha az egyenletrendszernek csak egy megoldása van (vagyis a redukált lépcsős alakban a vonaltól balra minden oszlopban van vezéregyes), akkor nyilván a változók összege is csak egyféle lehet; vagyis ebben az esetben az összeg valóban nem lehet 2022 (csak 2020). (1 pont)
Ha viszont az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van (vagyis a redukált lépcsős alakban a vonaltól balra nem minden oszlopban van vezéregyes), akkor a változók egy része szabad paraméter (azok, amiknek az oszlopában nincs vezéregyes). Jelölje azokat a változókat, amiknek az oszlopában van vezéregyes $x_1, x_2, \ldots, x_k$ a többit (vagyis a szabad paramétereket) $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$. (0 pont)
Ekkor a szabad paraméterek minden $x_j = \alpha_j \in \mathbb{R}$ $(k+1 \leq j \leq n)$ megválasztása esetén a többi változó kifejezhető $x_i = b_i - c_{i,k+1}\alpha_{k+1} - \ldots - c_{i,n}\alpha_n$ alakban minden $1 \leq i \leq k$ esetén, ahol $c_{i,j}$ a redukált lépcsős alakban az x_i vezéregyesét tartalmazó sor és az x_j-nek megfelelő oszlop kereszteződésében álló érték, b_i pedig ugyanebben a sorban a vonaltól jobbra álló elem. (1 pont)
Az egyenletrendszernek ebben a megoldásában tehát a változók összege $x_1 + \ldots + x_k + \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_n = B + C_{k+1}\alpha_{k+1} + \ldots + C_n\alpha_n$, ahol $B = b_1 + \ldots + b_i$ és $C_k = 1 - c_{1,j} - c_{2,j} - \ldots - c_{k,j}$ minden $k+1 \leq j \leq n$ esetén. (1 pont)
Azt állítjuk, hogy $C_{k+1} = \ldots = C_n = 0$. Valóban, ha valamely $k+1 \leq t \leq n$ esetén $C_t \neq 0$ volna, akkor a $B + C_t\alpha_t = 2021$ egyenlet megoldható lenne az $\alpha_t = \frac{2021-B}{C_t}$ választással, így α_t-nek ezt az értéket adva, minden $j \neq t$, $k+1 \leq j \leq n$ esetén pedig az $\alpha_j = 0$ értékadással a lineáris egyenletrendszernek olyan megoldását kapnánk, amiben a változók összege 2021. A feladat szövege szerint ez lehetetlen. (4 pont)
Következik, hogy a változók összege $x_1 + \ldots + x_k + \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_n = B$ az egyenletrendszer minden megoldására. Mive a feladat szövegéből következően $B = 2020$, ezért valóban nincs olyan megoldás, amiben a változók összege 2022. (2 pont)

Harmadik megoldás. A feladat feltétele azt állítja, hogy ha a szóban forgó lineáris egyenletrendszert kiegészítjük az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$ egyenlettel, akkor a $p = 2020$ esetben megoldható rendszert kapunk, a $p = 2021$ esetben viszont nem megoldható rendszert. (Itt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jelölik az egyenletrendszer változóit, p pedig egy paraméter.) (2 pont)
Jelölje $(A|\underline{b}_p)$ ennek, az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$ egyenlettel már kiegészített lineáris egyenletrendszernek a kibővített együtthatómátrixát. Ezt tehát az eredeti egyenletrendszer $(A_0|\underline{c})$ kibővített együtthatómátrixából úgy kapjuk, hogy A_0-hoz hozzáveszünk egy csupa 1-eseket tartalmazó sort, $\underline{c}$-hez pedig egy új koordinátát, aminek az értéke a p paraméter. (0 pont)
Futtassuk képzeletben $(A|\underline{b}_p)$-re a Gauss-eliminációt úgy, hogy p-vel, mint paraméterrel számolunk. (0 pont)
Megmutatjuk, hogy az elimináció során végig a vonaltól jobbra álló oszlop minden pozíciójában p-nek egy lineáris függvénye, vagyis egy $u \cdot p + v$ alakú kifejezés áll, ahol $u, v \in \mathbb{R}$. Valóban, kezdetben ez igaz: a $\underline{b}_p$ vektor egyik koordinátája $p = 1 \cdot p + 0$, a többi pedig $0 \cdot p + c_i$ alakú. Ha pedig egy ponton ez a tulajdonság fennáll, akkor a Gauss-elimináció ezt nem rontja el, hiszen $u \cdot p + v$ alakú kifejezések összege és skalárszorosa is ilyen alakú. (2 pont)
Mivel az egyenletrendszer $p = 2021$ esetén nem megoldható, ezért a $p = 2021$ paraméterválasztással az elimináció során tilos sor keletkezik. Ebben a sorban tehát a vonaltól balra csupa nulla, a vonaltól jobbra pedig $u_0 \cdot p + v_0$ áll és az u_0, v_0 együtthatókra $u_0 \cdot 2021 + v_0 \neq 0$. (1 pont)
Másrészt $u_0 \cdot 2020 + v_0 = 0$, különben a Gauss-elimináció ugyanezen a ponton a $p = 2020$ paraméter érték esetén is tilos sort hozna létre, így az egyenletrendszer nem volna megoldható – szemben a feladat szövegével. (2 pont)
Az $u_0 \cdot 2020 + v_0 = 0$ és $u_0 \cdot 2021 + v_0 \neq 0$ összefüggésekből nyilván $u_0 \neq 0$ és így $u_0 \cdot 2022 + v_0 = 2u_0 \neq 0$ is adódik. (1 pont)
Következik, hogy a Gauss-elimináció ugyanezen a ponton a $p = 2022$ választással is tilos sort hoz létre, így az egyenletrendszer $p = 2022$ esetén sem megoldható (vagyis a kérdés eldönthető). (2 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzh, első zárthelyi pótlása — pontozási útmutató
2021. december 13.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot éro megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Mennyi maradékot ad $3^{147} + 70^{147}$ 73-mal osztva?

* * * * *

Első megoldás. $70 \equiv -3 \pmod{73}$, (2 pont)
ezért $70^{147} \equiv (-3)^{147} \pmod{73}$, (4 pont)
vagyis $70^{147} \equiv -3^{147} \pmod{73}$, (2 pont)
tehát $3^{147} + 70^{147}$ 0 maradékot ad 73-mal osztva. (2 pont)

Második megoldás. Ismert, hogy $a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - ba^{2k-1} + b^2a^{2k-2} - \ldots + b^{2k})$.
(2 pont)
Ez alapján mivel 147 páratlan, (1 pont)
$3^{147} + 70^{147} = (3 + 70)(\ldots)$, ahol a második zárójelben lévő kifejezés egész, (6 pont)
tehát $3^{147} + 70^{147}$ 73-mal osztva 0 maradékot ad. (1 pont)

Ha valaki a hatványokra vonatkozó egyenlőség helyett csak annyit ír, hogy $(a^{2k+1} + b^{2k+1})$-ből kiemelhető $a + b$, azt is fogadjuk el.

Harmadik megoldás. 3 és 70 is relatív prím 73-hoz, ezért használhatjuk az Euler-Fermat tételt.
(2 pont)
73 prím, így $\varphi(73) = 72$. (1 pont)
A tétel szerint $3^{72} \equiv 1 \pmod{73}$ és $70^{72} \equiv 1 \pmod{73}$. (1 pont)
Így $3^{147} \equiv 3^{2\cdot72+3} \equiv 3^{2\cdot72} \cdot 3^3 \equiv 3^3 = 27 \pmod{73}$ (1+1 pont)
és $70^{147} \equiv 70^{2\cdot72+3} \equiv 70^{2\cdot72} \cdot 70^3 \equiv 70^3 = 343000 \equiv 46 \pmod{73}$. (1+1+1 pont)
Így a keresett maradék $27 + 46 = 73$ miatt 0. (1 pont)

2. Hány olyan egész szám van 1 és 2021 között, melyre teljesül, hogy 63-mal osztva 18, 91-gyel osztva pedig 34 maradékot ad?

* * * * *

Első megoldás. Ha x ilyen szám, akkor $x \equiv 18 \pmod{63}$ és $x \equiv 34 \pmod{91}$. (1 pont)
Az első kongruencia alapján $x = 63k + 18$ valamely k egészre. (2 pont)
Ezt a második kongruenciába beírva $63k + 18 \equiv 34 \pmod{91}$, vagyis $63k \equiv 16 \pmod{91}$. (2 pont)
A tanultak szerint ez a kongruencia akkor és csak akkor megoldható, ha $(63, 91)|16$ (ahol (a, b) a és b legnagyobb közös osztóját jelöli). (2 pont)
Mivel 63 és 91 is osztható 7-tel, 16 viszont nem, ez nem teljesül, (2 pont)
így 1 és 2021 között (vagy bárhol másutt) ilyen szám nem létezik. (1 pont)

Második megoldás. A keresett számokra teljesül, hogy 7-tel osztva 4 maradékot adnak, (3 pont)
mivel 63 osztható 7-tel és $18 \equiv 4 \pmod 7$. (1 pont)
Teljesül ugyanakkor az is, hogy 7-tel osztva 6 maradékot adnak, (3 pont)
mivel 91 is osztható 7-tel és $34 \equiv 6 \pmod 7$. (1 pont)
Nem létezik olyan szám, melynek két különböző maradéka lenne 7-tel osztva, így egyetlen ilyen szám sincs 1 és 2021 között. (2 pont)
Az ennél a megoldásnál adható részpontoknál különösen ügyeljünk arra az általános szabályra, mely szerint „Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban.”

3. Az e egyenes egyenletrendszere $x = y = \frac{z-3}{2}$, az f egyenes egyenletrendszere $\frac{x-3}{2} = y = z$. Döntsük el, hogy e és f egy síkba esnek-e (vagyis létezik-e olyan sík, amely mindkét egyenest tartalmazza).

* * * * *

Első megoldás. Két egyenes akkor és csak akkor esik egy síkba, ha párhuzamosak vagy metszők. (1 pont)
A két egyenes akkor és csak akkor metsző, ha a két egyenletrendszernek van közös (x, y, z) megoldása. (1 pont)
Az első egyenletrendszer alapján $x = y$, a második alapján $y = z$, (2 pont)
ahonnan $z = (z - 3)/2$, vagyis $x = y = z = -3$ következik. (2 pont)
Ez csakugyan megoldása az egyenletrendszereknek, (2 pont)
így a két egyenes metsző és így egy síkba esik. (2 pont)

Ha valaki nem jut helyes megoldásra, de vizsgálja a két egyenes párhuzamosságának kérdését, az az alábbi pontokat kaphatja még meg (azzal a megkötéssel, hogy a maximális 10 pont alatt kell maradnia a feladat pontszámának):
Az egyenletrendszerekből leolvasható, hogy e irányvektora $(1, 1, 2)$, f irányvektora $(2, 1, 1)$, (1 pont)
a két egyenes tehát nem párhuzamos, mivel az irányvektorok egyike sem számszorosa a másiknak. (1 pont)

Második megoldás. Olyan S síkot keresünk, mely tartalmazza mindkét egyenest (vagyis párhuzamos is mindkettővel), a normálvektora tehát merőleges mindkét egyenes irányvektorára. (1 pont)
Az egyenletrendszerekből leolvasható, hogy e irányvektora $(1, 1, 2)$, f irányvektora $(2, 1, 1)$. (1 pont)
Legyen a kérdéses normálvektor (a, b, c), ekkor a két merőlegességi feltételből (a skaláris szorzat használatával) $a + b + 2c = 0$ és $2a + b + c = 0$. (1 pont)
A második egyenletből az első kivonva $a = c$ adódik, innen pedig $b = -3a$, a normálvektor(ok egyike) tehát $(1, -3, 1)$. (2 pont)

Az $(1,-3,1)$ normálvektorú síkok tehát mindkét egyenessel párhuzamosak, azt kell vizsgálnunk, hogy van-e köztük olyan, ami mindkét egyenest tartalmazza is. (1 pont)
Vegyünk ehhez egy tetszőleges pontot e-ről, legyen ez mondjuk a $(0,0,3)$. (1 pont)
Mivel S tartalmazza ezt a pontot, az egyenlete $x-3y+z=3$. (1 pont)
Vegyünk egy tetszőleges pontot f-ről is, legyen ez a $(3,0,0)$. Az S egyenletébe való behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ez a pont rajta van S-en, (1 pont)
így S tartalmazza e-t és f-et is, hiszen párhuzamos velük és van mindkettővel közös pontja. (1 pont)

A két irányvektorra merőleges vektort most már a vektoriális szorzatra vonatkozó képlet alkalmazásával is ki lehet számítani, hiszen az már szerepelt az előadáson.

4. Döntsük el, hogy alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok a vektorok, melyeknek van két azonos koordinátája.

* * * * *

Jelöljük a kérdéses vektorok halmazát V-vel. Ha V altér, akkor bármely két V-beli vektor összege is V-beli kell legyen. (2 pont)
Az $(1,2,0,0)^T$ és $(0,0,3,4)^T$ vektorok V-ben vannak, az összegük, az $(1,2,3,4)^T$ vektor azonban nincs, (6 pont)
így V nem altér. (2 pont)

Aki nem jut helyes eredményre, de megmutatja, hogy minden V-beli vektor minden skalárszorosa is V-ben van, az kapjon ezért 2 pontot.

5. Tudjuk, hogy az $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ vektorrendszer lineárisan független $\mathbb{R}^4$-ben. Következik-e ebből, hogy az $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}$ rendszer bázis $\mathbb{R}^4$-ben?

* * * * *

Megmutatjuk először, hogy a kérdéses rendszer független. Tekintsük ehhez a vektorok egy olyan lineáris kombinációját, mely a nullvektort adja: $\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}+\gamma\underline{c}+\delta(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d})=\underline{0}$. (1 pont)
A zárójelet felbontva és rendezve $(\alpha+\delta)\underline{a}+(\beta+\delta)\underline{b}+(\gamma+\delta)\underline{c}+\delta\underline{d}=\underline{0}$ adódik. (1 pont)
Mivel az $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ rendszer lineárisan független, ez csak úgy lehetséges, ha $\alpha+\delta=0$, $\beta+\delta=0$, $\gamma+\delta=0$, $\delta=0$, (2 pont)
ahonnan $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$, vagyis a kérdéses vektoroknak csak a triviális lineáris kombinációja lehet a nullvektor, így valóban függetlenek. (2 pont)
A vonatkozó tanult tétel szerint k dimenziós altérben k független vektor bázist alkot, tehát $\mathbb{R}^4$-ben a kérdéses vektorrendszer bázis, hiszen 4 elemű és független, (3 pont)
$\mathbb{R}^4$ pedig a tanultak szerint 4 dimenziós. (1 pont)

6*. Igaz-e, hogy ha az a és b egész számokra $a^{40}\not\equiv b^{40}\pmod{100}$, akkor $a^{40}b^{40}\not\equiv 1\pmod{100}$?

* * * * *

Az állítás igaz. Ha a és b is relatív prím lenne 100-hoz, akkor az Euler-Fermat tétel szerint a $\varphi(100)$. hatványuk 1-gyel lenne kongruens modulo 100. (2 pont)
Mivel a tanult képlet szerint $\varphi(100)=(2^2-2^1)(5^2-5^1)=40$, (1 pont)
ez ellentmondana a feladat feltételének. (2 pont)
Így a és b közül legalább az egyik nem relatív prím 100-hoz, így a szorzatuk sem lesz az, (2 pont)
vagyis annak 40. hatványának is lesz 1-nél nagyobb közös osztója 100-zal. (1 pont)
Ebből következik, hogy a szorzat 40. hatványa nem lehet 1-gyel kongruens modulo 100, hiszen az előadáson tanultuk, hogy modulo m kongruens számok m-mel vett legnagyobb közös osztója azonos. (2 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzh, második zárthelyi pótlása — pontozási útmutató
2021. december 13.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot éro megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Döntsük el, hogy létezik-e az alábbi A mátrixnak inverze. Ha igen, határozzuk meg A^{-1}-et és A^{-1} determinánsát.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Az inverzet Gauss-eliminációval számítjuk ki, menet közben majd arra is fény derül, hogy létezik-e. Az elimináció lépései:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -25 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -20 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -25 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 30 & -18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -25 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

4 pont jár az elimináció hibátlan elvégzéséért és az inverz leolvasásáért, 2 pont pedig azért, ha valaki megmutatja, hogy létezik az inverz, hiszen a bal oldalon létrejött az egységmátrix, tehát a kiindulási mátrix determinánsa nem volt 0, így csakugyan létezik inverze.

A determinánsok szorzástétele alapján $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. (2 pont)
A Gauss-elimináció lépéseiből könnyen leolvasható, hogy a lépcsős alak eléréséig csak egy

olyan lépést tettünk, amely megváltoztatta a determinánst, ez a -1-gyel szorzás volt, így A determinánsa -1, tehát A^{-1} determinánsa is -1. (2 pont)

Az utolsó 2 pont annak jár, akinek csakugyan szándékában áll az inverz determinánsát a determinánsok szorzástételére alapozva kiszámítani (az eredeti mátrix determinánsát az inverz létezésének eldöntésére is ki lehet számítani, de csak ezért nem jár az utolsó 2 pont). Ehelyett természetesen ki lehet számítani az inverz determinánsát (és így megszerezni az utolsó 4 pontot) Gauss-eliminációval is, ennek lépései:

$$\begin{vmatrix} 30 & -18 & 5 \\ -25 & 15 & -4 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 30 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{6} \\ -25 & 15 & -4 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 30 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} \end{vmatrix} = -30 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix} =$$

$$= -30 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = -30 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le, elvi hibákért 4 pontot. Aki elszámolja az inverzet és így rossz mátrix determinánsát számítja ki (helyesen), az megkaphatja a maximális 4 pontot ezért, amennyiben a feladat nem lett egyszerűbb. Ellenkező esetben 1-3 pontot adjunk, a számolás nehézségétől függően.

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} px_1 + px_2 + px_3 &= p \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + (p+3)x_3 &= 3 \end{aligned}$$

* * * * *

Az egyenletrendszert a Gauss-elimináció lépéseit használva oldjuk meg. A kibővített együtthatómátrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & p & p & p \\ 2 & 6 & 10 & 6 \\ 3 & 3 & p+3 & 3 \end{array}\right)$$ (0 pont)

Ha $p = 0$, akkor az első sor csupa 0 sor, így törölhetjük és a

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 10 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$ kibővített együtthatómátrixot kapjuk, amin az elimináció lépéseit már a tanult sorrendben hajtjuk végre. (1 pont)

Folytatva az eliminációt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$ (1 pont)

A megoldás innen $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = \alpha, x_2 = 1 - 2\alpha$. (2 pont)

Ha $p \neq 0$, akkor osztjuk vele az első sort, a kapott kibővített együtthatómátrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & 6 \\ 3 & 3 & p+3 & 3 \end{array}\right)$$ (1 pont)

Folytatva az eliminációt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{array}\right).$$ (0 pont)

Mivel $p \neq 0$, oszthatunk vele. (2 pont)

Tovább folytatva az eliminációt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$ (2 pont)

A megoldás innen $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$. (1 pont)

3. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát a q valós paraméter minden értékére.

$$\begin{pmatrix} 0 & q & 1 & 3 \\ 2 & q & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A harmadik oszlop q-szorosát a második oszlopból kivonva a determináns értéke nem változik:

$$\begin{vmatrix} 0 & q & 1 & 3 \\ 2 & q & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 6-3q & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$ (3 pont)

Ez utóbbi determinánst a kifejtési tétel segítségével számítjuk ki. Fejtsük ki a determinánst a második oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 6-3q & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -(6-3q) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$ (4 pont)

Ennek értéke (ismét a kifejtési tételt használva) $-(6-3q)(1 \cdot (4-3) + 7 \cdot (0-2)) = 13(6-3q) = 39(2-q)$. (3 pont)

A determinánst természetesen máshogy, pl. Gauss-eliminációval is ki lehet számítani. Számolási hibákért 1 pontot, az elvi hibákért 4 pontot vonjunk le darabonként. Ha valaki kifejtési tételt használ, de nem jut el megoldásig, a tétel helyes használatáért (vagy felírásáért) kaphat 2 pontot, ha a tételt olyan sorra vagy oszlopra alkalmazza, amelyben két 0 is van, akkor további 2 pontot.

4. Határozzuk meg a 3. feladat mátrixának rangját a q valós paraméter minden értékére.

* * * * *

Első megoldás. A 3. feladatban láttuk, hogy a mátrix determinánsa $39(2-q)$, vagyis ha $q \neq 2$, akkor nem 0. A determinánsrang definíciója szerint ilyenkor a keresett rang 4. (4 pont)

$q = 2$ esetén használjunk a változatosság kedvéért Gauss-eliminációt.

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3/2 & 3 \\ 0 & -1 & -1/2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 3 & 3/2 & 3 \\ 0 & -1 & -1/2 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 13/2 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 13/2 \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(4 pont)}$$

Az utolsóként kapott mátrix lépcsős alakú és 3 vezéregyes található benne, így a keresett rang q=2 esetén 3. (2 pont)

Második megoldás. A rangot Gauss-eliminációval határozzuk meg, de előtte felcseréljük az első és a harmadik, illetve a második és a negyedik sort, majd a második és a negyedik oszlopot. Ezek a lépések a rangot a tanultak szerint nem változtatják meg.

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & q & 1 & 3 \\ 2 & q & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & q \\ 2 & 4 & 1 & q \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & q \\ 2 & 4 & 1 & q \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & q \\ 0 & -2 & -1 & q-4 \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 3 & 1 & q \\ 0 & -2 & -1 & q-4 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 7/4 & q+3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & q-5 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & (4q+6)/7 \\ 0 & 0 & -3/2 & q-5 \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & (4q+6)/7 \\ 0 & 0 & 0 & (6q+9)/7+q-5 \end{pmatrix}. \qquad \text{(4 pont)}$$

Az utolsó sorban a jobb alsó elemmel pontosan akkor oszthatunk, ha $(6q+9)/7+q-5 \neq 0$, (1 pont)

vagyis ha $6q+9+7(q-5) \neq 0$, ami $13q-26 \neq 0$, azaz $q \neq 2$ esetén teljesül. (1 pont)

Ilyenkor a kapott lépcsős alakban (1 pont)

4 vezéregyesünk lesz, így a rang 4. (1 pont)

$q = 2$ esetén az utolsó sort töröljük, a kapott lépcsős alakban (1 pont)

lévő 3 vezéregyesre tekintettel a rang 3. (1 pont)

5. Legyen A 5 rangú 5×5-ös mátrix. Mutassuk meg, hogy A előállítható 25 darab 1 rangú mátrix összegeként (vagyis léteznek olyan 1 rangú $A_1, A_2, \ldots, A_{25}$ mátrixok, melyekre $A_1+A_2+\ldots+A_{25} = A$).

* * * * *

Legyen A_i az a mátrix, melynek i. sora azonos A i. sorával, a többi eleme pedig 0. (2 pont)

A_i rangja 1, (1 pont)

hiszen négy sora csupa nullákból áll, egy pedig nem (1 pont)

(A-nek nem lehet csupa 0 sora, hiszen a rangja 5). (2 pont)

Nyilvánvaló, hogy $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = A$, (1 pont)

legyen most $B_i = \frac{A_i}{5}$. (1 pont)

Ekkor a B_i mátrixok rangja is 1, (1 pont)
így A-t elő tudjuk állítani 25 darab 1 rangú mátrix összegeként, ha a fenti (A_i-k összegeként történő) előállításban minden A_i-t 5 darab B_i-re cserélünk. (1 pont)

Aki A-t olyan $A_{i,j}$ mátrixok összegeként állítja elő, melyekben az i. sor j. eleme azonos A i. sorának j. elemével, a többi eleme pedig 0, 4 pontot kapjon (ezek a mátrixok lehetnek 1 és 0 rangúak is).

6*. Igaz-e, hogy ha egy 5×5-ös A mátrix minden 2×2-es részmátrixának van inverze, akkor A-nak is van inverze?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az állítás nem igaz. (0 pont)
Legyen például A az a mátrix, melyben az i. sor j. eleme $5(i-1)+j$ (vagyis az elemek soronként balról jobbra felsorolva $1, 2, 3, \ldots, 25$). (2 pont)
Ekkor A sorai lineárisan összefüggők, mert (pl.) az 1. és a 3. sor összege a 2. sor kétszerese. (1 pont)
A determinánsa így a tanultak szerint 0, (1 pont)
vagyis ugyancsak a tanultak szerint nincs inverze. (1 pont)
Legyen most a és b két tetszőlegesen választott sor sorszáma ($a < b$), c és d pedig tetszőlegesen választott oszlop sorszáma ($c < d$). Az ezen sorok és oszlopok által meghatározott 2×2-es részmátrix determinánsa $(5(a-1)+c)(5(b-1)+d) - (5(b-1)+c)(5(a-1)+d) = 5(a-1)(d-c) + 5(b-1)(c-d) = 5(d-c)(a-b)$, (2 pont)
ami nem 0, (2 pont)
így A csakugyan ellenpélda az állításra, hiszen minden 2×2-es részmátrixának van inverze. (1 pont)

Aki helyes ellenpéldát ad meg, de csak azt igazolja, hogy a mátrix nem invertálható, az megkaphatja a fenti megoldásban ennek megfelelő pontokat (helytelen ellenpélda esetén ezek nem járnak).