Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok

2020. október 30.

1. Mely 1 és 111 közötti egész számok 1111-szerese ad 11 maradékot 2020-szal osztva?

2. Milyen maradékot ad 4^{74} 70-nel osztva?

3. Az origón áthaladó S sík tartalmazza az $\frac{x-4}{9} = \frac{3-y}{2} = \frac{z-1}{6}$ egyenletrendszerű e egyenest. Rajta van-e a $P(9;5;3)$ pont az S síkon?

4. Álljon a $V \subseteq \mathbb{R}^4$ halmaz azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból, amelyeknek az első két koordinátája egyenlő. A $W \subseteq \mathbb{R}^4$ halmaz pedig azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból álljon, amiknek az utolsó két koordinátája egyenlő.

a) Alteret alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben a $V \cap W$ halmaz?

b) Alteret alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben a $V \cup W$ halmaz?

5. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ p \\ 8 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

6*. Legyen $f(n) = n^{n+1}$ és $g(n) = (n+2)^{n+3}$ minden $n \geq 1$ esetén. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan n egész létezik, amire fennáll az $f(n)^{g(n)} \equiv 1 \pmod{g(n)}$ kongruencia.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Pótzárthelyi dolgozat

2020. december 14.

1. Mennyi maradékot ad 2020^{2021} 1011-gyel osztva?

2. Egy egész szám 17-szerese 23 maradékot ad 65-tel osztva. Mennyi maradékot adhat a szám 130-cal osztva?

3. Határozzuk meg az $x + 3y + 2z = 7$ és a $4x + 6y + 5z = 10$ egyenletű síkok metszetegyenesének paraméteres egyenletrendszerét.

4. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok a vektorok, melyek koordinátái (felülről lefelé) számtani sorozatot alkotnak?

5. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független $\mathbb{R}^n$-ben. Következik-e ebből, hogy a $2\underline{a}, \underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \underline{c}$ rendszer is lineárisan független?

6*. Határozzuk meg az összes olyan 1 és 100 közti a egész számot, melyre

$$a^{21} \equiv 1 \pmod{100}.$$

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.
Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részének kétszeresét IMSc pontként könyveljük el.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótpótzárthelyi feladatok
2020. december 21.

1. Egy helyi cukrászda úgy dönt, hogy előre csomagolt díszdobozokban, akciósan értékesíti a karácsony előttről megmaradt szaloncukrot, amiknek számáról csak azt tudják, hogy 400 és 600 közötti. Amikor tizenkettesével próbálják dobozolni a cukrokat, akkor hét cukor megmarad. Amikor viszont ehelyett ötvenes megapakkokkal próbálkoznak, akkor az utolsó dobozba épp eggyel kevesebb jut a szükségesnél. Hány szaloncukor marad meg, ha tizenhatosával dobozolják őket?

2. Legyen $n = 987654321$. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg $98n + 27$ és $76n + 21$ legnagyobb közös osztóját. (Az algoritmus végrehajtását dokumentáljuk is.)

3. A $P(5; -6; 28)$ pontban lévő fényforrástól induló fénysugár az útja során érinti a $Q(14; 15; 16)$ pontot és áthalad az $x + 3y - z = 1$ egyenletű síküvegen (nem feltétlen ebben a sorrendben).

a) Határozzuk meg a fénysugár síküveggel való metszéspontját.

b) Döntsük el, hogy P és Q a síküveg azonos vagy különböző oldalán helyezkedik-e el.

(Feltehetjük, hogy a fény egyenes vonalban terjed és a síküvegen irányváltoztatás nélkül halad át.)

4. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok a vektorok, melyek koordinátái (felülről lefelé) mértani sorozatot alkotnak?

5. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{a} = \begin{pmatrix} p \\ p+1 \\ p+2 \\ 2p \end{pmatrix}.$$

Van-e a p valós paraméternek olyan értéke, amire teljesül az $\underline{a} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ állítás? Ha igen, adjuk meg a p összes ilyen értékét.

6*. Legyen $n = 898989\ldots89$ az a 134 jegyű egész szám, aminek a (balról) páratlan sorszámú számjegyei mind 8-cal, a páros sorszámúak pedig 9-cel egyenlők. Milyen maradékot ad n 67-tel osztva?

Figyelem! A dolgozat írása közben írásos segédanyagok használata megengedett, de **mindenfajta kommunikáció tilos**. Számológépet használni **nem lehet**. A dolgozat része minden mellékszámítás is, ami a dolgozat írása közben keletkezik, ezért ezek beadása is kötelező.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el. A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2020. október 30.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Mely 1 és 111 közötti egész számok 1111-szerese ad 11 maradékot 2020-szal osztva?

* * * * *

Ha n ilyen egész, akkor rá $1111n \equiv 11 \pmod{2020}$ teljesül. (2 pont)
$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ és $1111 = 11 \cdot 101$, ezért $(1111, 2020) = 101$. (3 pont)
Mivel $101 \nmid 11$, ezért a lineáris kongruenciák megoldhatóságára tanult tétel értelmében (miszerint $ax \equiv b \pmod{m}$ pontosan akkor megoldható, ha $(a, m) \mid b$) nem létezik ilyen n egész. (5 pont)
2020 és 1111 legnagyobb közös osztója a prímtényezős felbontásuk helyett természetesen az Euklideszi algoritmussal is meghatározható. Ha viszont egy megoldó az Euklideszi algoritmussal próbálja megoldani a lineáris kongruenciát, az (önmagában) nem ér pontot, hiszen az algoritmus (előadáson tanult) változata csak az $(a, m) = 1$ feltétel ellenőrzése után alkalmazható az $ax \equiv b \pmod{m}$ lineáris kongruencia megoldására. Ha egy ilyen számolás végén (a $101n \equiv -99 \pmod{2020}$, majd a $0n \equiv 220 \pmod{2020}$ sorok után) a megoldó felismeri, hogy ebből $(1111, 2020) = 101$ következik (hiszen n együtthatói sorra az Euklideszi algoritmus legnagyobb közös osztó meghatározására szolgáló változatának során keletkező maradékok) és ebből következtet a lineáris kongruencia megoldhatatlanságára, az természetesen jó megoldás. Ugyancsak helyes indoklás, ha a megoldó arra hivatkozik, hogy a számolás során keletkező kongruenciák a kongruenciákkal végzett műveletekkel kapcsolatban tanultak miatt mind következményei az eredetinek, így a $0n \equiv 220 \pmod{2020}$ ellentmondásból a lineáris kongruencia megoldhatatlansága következik. Ha azonban a számolás után mindenféle indoklás nélkül csak a „nincs megoldás” állítás szerepel, az nem ér pontot, mert egy ilyen megoldás se tanult algoritmust nem alkalmaz, se helyes gondolatmenetet nem közöl, így a következtetése indoklás nélküli eredményközlésnek minősül. Ha egy megoldó a lineáris kongruencia felírása után azt 11-gyel (helyesen) elosztja (hivatkozva arra is, hogy a modulus $(2020, 11) = 1$ miatt nem változik), akkor ezért a lépésért (bár az érdemben nem visz közelebb a megoldáshoz) 1 pontot kaphat – feltéve, hogy a megoldás további része nem tartalmaz értékelhető részt.

2. Milyen maradékot ad 4^{74} 70-nel osztva?

* * * * *

Első megoldás. A ismételt négyzetre emelések módszerével oldjuk meg a feladatot. (2 pont)
Kiszámítjuk a $4^1, 4^2, 4^4, \ldots, 4^{64}$ hatványok 70-es maradékát (mindig az előző négyzetre emelésével és a kapott eredmény 70-es maradékának kiszámításával). Ezek sorra: 4, 16, 46, 16, 46, 16, 46. (3 pont)
Mivel $74 = 2 + 8 + 64$, (2 pont)
ezért meghatározzuk először a $4^{10} = 4^2 \cdot 4^8$, majd a $4^{74} = 4^{10} \cdot 4^{64}$ hatványok 70-es maradékait (a korábban kiszámolt megfelelő maradékokkal való szorzással és a kapott eredmények 70-es maradékának meghatározásával). Ezek sorra: 46 és 16. Így a keresett maradék: 16. (3 pont)
A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges a fenti részletességgel leírni az elvégzett műveletek mögötti szándékot, elegendő a helyes számítások közlése. A fenti pontozás szerinti első 2 pont annak jár, aki felismeri, hogy a feladat az ismételt négyzetre emelések módszerével megoldható (és ezt legalább azzal jelzi, hogy az algoritmus alkalmazását megkezdi). Mivel azonban a feladat nem kéri a tanult algoritmus alkalmazását, ezért bármilyen, helyes eredményre vezető és elvileg helyes számolás maximális pontszámot ér – akkor is, ha az fölöslegesen komplikált vagy nem felel meg az algoritmus pontos alkalmazásának. Ha azonban egy megoldás nem (pontosan) követi az algoritmust, akkor a számítások helyessége és az azokból levont következtetések indoklásra szorulnak. Így ha egy megoldó pusztán egy, az algoritmus pontos alkalmazásának nem megfelelő számítást közöl, az nem érhet maximális pontszámot; az ilyen megoldások (helyes számításokat és eredményt feltételezve) 6 pontot érjenek.

Második megoldás. 35 prímtényezős felbontása $35 = 5 \cdot 7$, ezért $\varphi(35) = (5-1) \cdot (7-1) = 24$ a tanult képlet szerint. (1 pont)
Mivel $(4, 35) = 1$, (1 pont)
ezért az Euler-Fermat tételből $4^{24} \equiv 1 \pmod{35}$ következik. (2 pont)
Ezt köbre emelve, majd 4^2-nel szorozva: $4^{72} \equiv 1 \pmod{35}$, illetve $4^{74} \equiv 16 \pmod{35}$. (2 pont)
Azt kaptuk tehát, hogy $35 \mid 4^{74} - 16$. Másrészt nyilván $2 \mid 4^{74} - 16$ is igaz, hiszen 4^{74} és 16 is páros. Ebből viszont $(2, 35) = 1$ miatt $70 \mid 4^{74} - 16$ is következik (hiszen $4^{74} - 16$ prímtényezős felbontásában a 2, 5 és 7 prímek is szerepelnek). Ebből tehát $4^{74} \equiv 16 \pmod{70}$ következik, így a keresett maradék a 16. (4 pont)
Ha egy megoldó az Euler-Fermat tételt hibásan 4-re és 70-re próbálja alkalmazni, majd az így kapott (hamis) kongruenciából kiindulva jut el a helyes végeredményre, akkor ez nem ér pontot. (Még a fenti pontozás szerinti köbre emelésért és beszorzásért, illetve $\varphi(70)$ kiszámításáért járó részpontszám sem adható meg az útmutató elején írt általános alapelvek második bekezdésében írtak szerint.) A fenti pontozás utolsó 4 pontjának megfelelő gondolat helyettesíthető a következővel is:
Mivel egy 35-tel osztva 16 maradékot adó szám 70-nel osztva nyilván 16 vagy 51 maradékot adhat, ezért $4^{74} \equiv 16 \pmod{70}$ vagy $4^{74} \equiv 51 \pmod{70}$. (1 pont)
Az utóbbi eset azonban lehetetlen, mert 4^{74} páros és így nem adhat 70-nel osztva 51 maradékot. Ezért $4^{74} \equiv 16 \pmod{70}$. (3 pont)

3. Az origón áthaladó S sík tartalmazza az $\frac{x-4}{9} = \frac{3-y}{2} = \frac{z-1}{6}$ egyenletrendszerű e egyenest. Rajta van-e a $P(9; 5; 3)$ pont az S síkon?

* * * * *

Az e egyenletrendszeréből (a középső tört $\frac{y-3}{-2}$ alakba való átírása után) kiolvasható, hogy e átmegy a $Q(4; 3; 1)$ ponton és egy irányvektora $\underline{v} = (9; -2; 6)$. (2 pont)
Mivel az origó S-en van, ezért S-sel párhuzamos az origóból a Q-ba mutató $\underline{q} = (4; 3; 1)$ vektor. (1 pont)
S-nek normálvektora lesz az $\underline{n} \neq \underline{0}$ vektor, ha az merőleges $\underline{q}$-ra és $\underline{v}$-re is. (1 pont)
Az $\underline{n} = (a, b, c) \neq \underline{0}$ pontosan akkor ilyen, ha az $\underline{n} \cdot \underline{q}$ és az $\underline{n} \cdot \underline{v}$ skaláris szorzatok értéke 0. (1 pont)
A skaláris szorzat képletéből: $4a + 3b + c = 0$ és $9a - 2b + 6c = 0$. (1 pont)
Az első egyenlet 6-szorosából a másodikat kivonva $15a + 20b = 0$, vagyis $3a + 4b = 0$ következik. Így például az $a = 4$, $b = -3$ választással mindkét egyenletből $c = -7$ adódik, vagyis $\underline{n} = (4; -3; -7)$ normálvektora S-nek. (1 pont)
Ebből (például) az origót használva felírható S egyenlete: $4x - 3y - 7z = 0$. (2 pont)
Ebbe a $P(9; 5; 3)$ pont koordinátáit behelyettesítve az egyenlet teljesül, ezért P rajta van S-en. (1 pont)

A hiánytalan megoldáshoz valójában hozzátartozna annak ellenőrzése is, hogy az O origó nincs rajta e-n (és így $\underline{v} \nparallel \underline{q}$). Mivel azonban a feladat szövege implicite állítja S egyértelműségét és ezáltal az $O \notin e$ állítást, ezért ennek a hiányáért nem vonunk le pontot. A feladat megoldható azt a gondolatot használva is, hogy P akkor és csak akkor van S-en, ha a $\underline{p} = \overrightarrow{OP} = (9; 5; 3)$ helyvektor előáll a $\underline{v}$ és $\underline{q}$ vektorok lineáris kombinációjaként (mert S origón átmenő sík); így a $\underline{p} = \frac{1}{5}\underline{v} + \frac{9}{5}\underline{q}$ állítás mutatja, hogy $P \in S$.

4. Álljon a $V \subseteq \mathbb{R}^4$ halmaz azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból, amelyeknek az első két koordinátája egyenlő. A $W \subseteq \mathbb{R}^4$ halmaz pedig azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból álljon, amiknek az utolsó két koordinátája egyenlő.

a) Alteret alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben a $V \cap W$ halmaz?

b) Alteret alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben a $V \cup W$ halmaz?

* * * * *

a) $(V \cap W)$-ben azok az $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ vektorok vannak, amelyekre $x_1 = x_2$ és $x_3 = x_4$.(1 pont)
Ezért ha $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in V \cap W$ és $\underline{w} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T \in V \cap W$, akkor $\underline{v} + \underline{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)^T \in V \cap W$ szintén teljesül, mert az $x_1 = x_2$ és $y_1 = y_2$ egyenlőségekből $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ következik és ezzel analóg módon adódik $x_3 + y_3 = x_4 + y_4$ is. (1 pont)
Hasonlóan, ha $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in V \cap W$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda \cdot \underline{v} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \lambda \cdot x_3, \lambda \cdot x_4)^T \in V \cap W$ is teljesül, mert az $x_1 = x_2$, illetve $x_3 = x_4$ egyenlőségekből $\lambda \cdot x_1 = \lambda \cdot x_2$, illetve $\lambda \cdot x_3 = \lambda \cdot x_4$ adódik.(1 pont)
Mindezekből következik, hogy $V \cap W$ altér $\mathbb{R}^4$-ben. (2 pont)
A teljes értékű indokláshoz hozzátartozna az is, hogy $V \cap W \neq \emptyset$; ennek hiányáért nem vonunk le pontot, de ha egy megoldó ezt leírja, akkor kaphat érte 1 pontot abban az esetben, ha ezzel az a) feladatra járó összpontszáma nem haladja meg az 5-öt.

b) $\underline{v} = (0, 0, 1, 2)^T \in V$ és $\underline{w} = (1, 2, 0, 0)^T \in W$ a V és a W definíciója szerint, így $\underline{v}$ és $\underline{w}$ is $(V \cup W)$-beli. Azonban a $\underline{v} + \underline{w} = (1, 2, 1, 2)$ vektor nem $(V \cup W)$-beli, mert ez a vektor sem V-be, sem W-be nem tartozik. (3 pont)
Mivel $\underline{v}, \underline{w} \in V \cup W$, de $\underline{v} + \underline{w} \notin V \cup W$, ezért az altér definíciója sérül, vagyis $V \cup W$ nem altér.(2 pont)
Ha egy megoldó az összegre való zártság sérülésére nem tud példát mutatni, de megmutatja, hogy $\underline{v} \in V \cup W$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \cdot \underline{v} \in V \cup W$ is teljesül, akkor – noha ez közvetlenül nem járul hozzá egy helyes megoldáshoz – ezért 1 pontot kaphat; ha pedig a megoldásban nyoma van annak, hogy az összegre való zártságot is elkezdi vizsgálni (és nem csak felírja), akkor ezért további 1 pont adható. (Ez az 1 vagy $1 + 1$ pont tehát csak akkor adható meg, ha a fenti pontozás szerint a b) feladatra egyébként nem járna pont.)

5. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ p \\ 8 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

* * * * *

Tegyük fel, hogy $\alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v} + \gamma \cdot \underline{w} = \underline{0}$ teljesül valamilyen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ skalárokra. (1 pont)
Behelyettesítve $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ konkrét értékét és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - 2\gamma &= 0 \\ 2\alpha - \beta - \gamma &= 0 \\ 3\alpha + p \cdot \beta + \gamma &= 0 \\ p \cdot \alpha + 8\beta + p \cdot \gamma &= 0 \end{aligned}$$

(2 pont)

Az első két egyenlet összegéből $3\alpha - 3\gamma = 0$, vagyis $\alpha = \gamma$. Ezt az első két egyenlet közül bármelyikbe visszahelyettesítve $\alpha = \beta = \gamma$ adódik. (1 pont)
Ezt az utolsó két egyenletbe helyettesítve $(4 + p) \cdot \alpha = 0$, illetve $(8 + 2p) \cdot \alpha = 0$ adódik. (1 pont)
Ha $p = -4$, akkor ez a két egyenlet minden α-ra teljesül. Így ebben az esetben például $\alpha = \beta = \gamma = 1$ megoldása a fenti egyenletrendszernek, ezért a tanultak szerint $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ lineárisan összefüggők. (2 pont)
Ha viszont $p \neq -4$, akkor a $(4 + p) \cdot \alpha = 0$ egyenletből $\alpha = 0$, amiből $\beta = \gamma = 0$ is adódik. Így ebben az esetben $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ lineárisan függetlenek. (3 pont)
Így a feladat kérdésére a válasz: $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ a $p \neq -4$ értékekre lineárisan függetlenek.

A fenti lineáris egyenletrendszer Gauss-eliminációval is megoldható (annak ellenére is, hogy ez nem az első zárthelyi anyagában szerepel). Ha valaki így dolgozik, akkor az eliminációért 2 pont jár, majd annak az eredményéből a $p = -4$, illetve a $p \neq -4$ esetben a helyes következtetés (világosan megindokolt) levonásáért 2, illetve 3 pont jár. Ebből a $2+3$ pontból pedig $1+1$ pont jár az egyenletrendszerre vonatkozó következtetésért (végtelen sok megoldása van, illetve egyértelműen megoldható) és $1+2$ pont a vektorok lineáris függetlenségére vonatkozó helyes következtetésért.

6*. Legyen $f(n) = n^{n+1}$ és $g(n) = (n+2)^{n+3}$ minden $n \geq 1$ esetén. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan n egész létezik, amire fennáll az $f(n)^{g(n)} \equiv 1 \pmod{g(n)}$ kongruencia.

* * * * *

Megmutatjuk, hogy ha $n > 0$ és $n+2$ prímszám, akkor a feladatbeli kongruencia fennáll. Mivel a tanultak szerint a prímek száma végtelen, ezért ebből a feladat állítása következik. (2 pont)
Tegyük fel tehát, hogy $n+2 > 2$ prím. Ekkor a tanult képlet szerint $\varphi(g(n)) = (n+2)^{n+3} - (n+2)^{n+2} = (n+2)^{n+2} \cdot (n+2-1) = (n+1) \cdot (n+2)^{n+2}$. (2 pont)
Mivel $g(n)$ egyedüli prímosztója $n+2$, ez nyilván nem szerepelhet n prímtényezős felbontásában. Így $(n, g(n)) = 1$. (1 pont)
Alkalmazva az Euler-Fermat tételt n-re és $g(n)$-re: $n^{(n+1)\cdot(n+2)^{n+2}} \equiv 1 \pmod{g(n)}$. (2 pont)
Ezt a kongruenciát az $(n+2)$-edik hatványra emelve: $n^{(n+1)\cdot(n+2)^{n+3}} \equiv 1 \pmod{g(n)}$. (2 pont)
Ez pedig $f(n)$ és $g(n)$ definíciói szerint épp a bizonyítandó állítás. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2020. december 14.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot éro megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Mennyi maradékot ad 2020^{2021} 1011-gyel osztva?

* * * * *

1011 és 2020 legnagyobb közös osztója osztja 2022-t és így $2022 - 2020 = 2$-t is és 1011 páratlan, (1 pont)
ezért 1011 és 2020 relatív prímek, így használhatjuk az Euler-Fermat tételt: (1 pont)
$2020^{\varphi(1011)} \equiv 1 \pmod{1011}$. (1 pont)
Mivel 1011 prímtényezős felbontása $3 \cdot 337$, a tanult képlet szerint $\varphi(1011) = 2 \cdot 336 = 672$. (1 pont)
Ezek alapján $2020^{2021} = 2020^{3\cdot672+5} \equiv 2020^5 \pmod{1011}$. (3 pont)
$2020^5 \equiv (-2)^5 = -32 \pmod{1011}$, (2 pont)
a keresett maradék tehát $1011 - 32 = 979$. (1 pont)

2. Egy szám 17-szerese 23 maradékot ad 65-tel osztva. Mennyi maradékot adhat a szám 130-cal osztva?

* * * * *

Először azt döntjük el, hogy milyen maradékot adhat a szám 65-tel osztva. Ehhez a $17x \equiv 23 \pmod{65}$ lineáris kongruenciát kell megoldanunk. (1 pont)
17 és 65 legnagyobb közös osztója 1, így használhatjuk az Euklideszi algoritmust a megoldáshoz. (1 pont)
Az algoritmus végrehajtása során kapott kongruenciák rendre a következők: $65x \equiv 0 \pmod{65}$, $17x \equiv 23 \pmod{65}$, $14x \equiv -69 \equiv -4 \pmod{65}$, $3x \equiv 27 \pmod{65}$, $2x \equiv -112 \equiv 18 \pmod{65}$, $x \equiv 9 \pmod{65}$. (5 pont)
Pontosan azok az x számok jók tehát, melyek 9 maradékot adnak 65-tel osztva, (1 pont)
a kérdéses 130-as osztási maradék tehát 9 vagy 74 lehet. (2 pont)

Számolási hibákért 1 pontot vonjunk le darabonként, de a hiba utáni pontok csak akkor járnak a megoldónak maradéktalanul, ha a megoldás nem lett könnyebb vagy rövidebb. Elírás esetén is hasonlóan

járjunk el (hiszen a végeredményt könnyű visszahelyettesíteni és meggyőződni a helyességéről). Nem hiba, ha valaki a kongruenciák jobb oldalain nem 0 és 64 közti (abszolút értékű) számokat szerepeltet, de a végeredménynek természetesen két 0 és 129 közti számnak kell lennie. Ha valaki más módon oldja meg a lineáris kongruenciát, akkor meg kell indokolnia, hogy a kapott számok miért jók és miért nincs másik megoldás. Ez tipikusan úgy történhet, hogy az átalakításokról belátja, hogy ekivalens átalakítások. Ennek hiányáért darabonként 2 pontot vonjunk le.
Ha valaki Euklideszi algoritmust szeretne használni, de nem követi pontosan annak lépéseit, akkor az átalakításai ugyanúgy magyarázatra szorulnak, mint az előzőként tárgyalt esetben. Pl. ha valaki az utolsó kongruenciát az utolsó előttiből 2-vel osztás útján nyeri, de nem tér ki rá, hogy ez ekvivalens átalakítás, akkor 2 pontot vonjunk le tőle ezért.
Ha valaki csak annyit állapít meg (helyesen), hogy a (mod 65) lineáris kongruenciának van megoldása/egy megoldása van, akkor a vonatkozó 7 pontból 1-et kapjon.

3. Határozzuk meg az $x + 3y + 2z = 7$ és a $4x + 6y + 5z = 10$ egyenletű síkok metszetegyenesének paraméteres egyenletrendszerét.

* * * * *

Az egyenletekből kiolvasható a két sík egy-egy normálvektora: $\underline{n_1} = (1, 3, 2)$, illetve $\underline{n_2} = (4, 6, 5)$. (1 pont)
A keresett egyenes irányvektora (jelöljük (a, b, c)-vel) merőleges $\underline{n}_1$-re és $\underline{n}_2$-re is, (1 pont)
így a skaláris szorzata mindkettővel 0. Ez alapján olyan a, b, c számokat keresünk, melyekre $a+3b+2c = 0$ és $4a + 6b + 5c = 0$. (1 pont)
A második egyenletből az első kétszeresét levonva a $2a + c = 0$ egyenlet adódik, melynek megoldása például $a = 1$, $c = -2$. (1 pont)
Ezeket az értékeket az első és a második egyenletbe helyettesítve is $b = 1$ adódik, az $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$ értékek mellett tehát mindkét kívánt egyenlőség teljesül. Az egyenes irányvektorának így alkalmas az $(1, 1, -2)$ vektor. (1 pont)
Az irányvektort természetesen vektoriális szorzás segítségével is meg lehet határozni.
A paraméteres egyenletrendszer megadásához szükségünk van még az egyenes egy pontjára, keresünk tehát egy olyan pontot, mely mindkét síkon rajta van. (1 pont)
Az (x, y, z) pont akkor és csak akkor van rajta mindkét síkon, ha az x, y, z értékekre mindkét sík egyenlete teljesül. Válasszuk (mondjuk) a z koordináta értékét (mondjuk) 0-nak. Ekkor az $x + 3y = 7$ és a $4x + 6y = 10$ egyenleteket kapjuk. (1 pont)
A másodikból az első kétszeresét kivonva $2x = -4$ adódik, ahonnan $x = -2$ és innen $y = 3$, a $(-2, 3, 0)$ pont tehát rajta van a metszetegyenesen. (1 pont)
A fentiek alapján $x = t-2, y = t+3, z = -2t$ a metszetegyenes (egyik) paraméteres egyenletrendszere. (2 pont)

4. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok a vektorok, melyek koordinátái (felülről lefelé) számtani sorozatot alkotnak?

* * * * *

Egy (nem üres) vektorhalmaz pontosan akkor alkot alteret, ha zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra, (0 pont)
vagyis bármely két, a feltételt kielégítő vektor összege is kielégíti a feltételt és bármely, a feltételt kielégítő vektor minden valós számszorosa is kielégíti a feltételt. (2 pont)
Legyenek ezért $\underline{u}$ és $\underline{v}$ a feltételnek megfelelő, tetszőleges vektorok, λ pedig tetszőleges valós szám. Ekkor $\underline{u}$ felírható $(a, a+d, a+2d, a+3d)^T$, $\underline{v}$ pedig $(b, b+e, b+2e, b+3e)^T$ alakban (ahol a, illetve b a vonatkozó számtani sorozatok első elemei, d, illetve e pedig a számtani sorozatok differenciái. (1 pont)
$\underline{u} + \underline{v} = (a + b, a + b + d + e, a + b + 2d + 2e, a + b + 3d + 3e)^T$, (1 pont)
ahonnan látható, hogy $\underline{u} + \underline{v}$ koordinátái is számtani sorozatot alkotnak, melynek első eleme $a + b$, differenciája pedig $d + e$. (2 pont)
$\lambda\underline{u} = (\lambda a, \lambda(a + d), \lambda(a + 2d), \lambda(a + 3d))^T = (\lambda a, \lambda a + \lambda d, \lambda a + 2\lambda d, \lambda a + 3\lambda d)^T$, (1 pont)
ahonnan látható, hogy $\lambda\underline{u}$ koordinátái is számtani sorozatot alkotnak, melynek első eleme λa,

differenciája pedig λd. (2 pont)
A fentiek szerint a kérdéses halmaz az összeadásra és a skalárral szorzásra is zárt (és nem üres – ennek hiányáért ne vonjunk le pontot), vagyis altér. (1 pont)

5. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független $\mathbb{R}^n$-ben. Következik-e ebből, hogy a $2\underline{a}, \underline{a}+\underline{b}, \underline{a}+\underline{c}$ rendszer is lineárisan független?

* * * * *

Írjuk fel az $2\underline{a}$, $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{a}+\underline{c}$ vektorok egy lineáris kombinációját az α, β, γ együtthatókkal és vizsgáljuk meg, hogy ez mikor lehet $\underline{0}$. (1 pont)
Az

$$\alpha(2\underline{a}) + \beta(\underline{a}+\underline{b}) + \gamma(\underline{a}+\underline{c}) = \underline{0}$$

egyenlőségben a zárójeleket felbontva, majd átrendezve

$$(2\alpha+\beta+\gamma)\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = \underline{0}$$

adódik. (3 pont)
Mivel az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, ez csak akkor lehetséges, ha $2\alpha+\beta+\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. (3 pont)
Ebből azonnal adódik, hogy $\alpha = 0$ is teljesül, (1 pont)
így a $2\underline{a}$, $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{a}+\underline{c}$ vektorok egy lineáris kombinációja csak akkor lehet a nullvektor, ha mindhárom együttható 0, így az előadáson tanult tétel szerint a vektorok függetlenek. (2 pont)

6*. Határozzuk meg az összes olyan 1 és 100 közti a egész számot, melyre

$$a^{21} \equiv 1 \pmod{100}.$$

* * * * *

Az előadáson tanultak szerint az egymással modulo m kongruens számok m-mel vett legnagyobb közös osztói azonosak. Így a^{21} és 1 100-zal vett legnagyobb közös osztói is azonosak, vagyis a^{21} és 100 relatív prímek. Ebből azonnal következik, hogy a és 100 is relatív prímek, (2 pont)
vagyis használhatjuk az Euler-Fermat tételt: $a^{\varphi(100)} \equiv 1 \pmod{100}$. $100 = 2^2 \cdot 5^2$, tehát a tanult képlet szerint $\varphi(100) = (2^2-2)(5^2-5) = 40$, tehát $a^{40} \equiv 1 \pmod{100}$. (1 pont)
A feladat feltétele szerint $a^{21} \equiv 1 \pmod{100}$, így (mindkét oldalt négyzetre emelve)
$a^{42} \equiv 1 \pmod{100}$ adódik, (1 pont)
vagyis $a^{42} \equiv a^{40} \pmod{100}$. (1 pont)
Mivel a^{40} és 100 (is) relatív prímek, ez utóbbi kongruenciát a^{40}-nel osztva az $a^2 \equiv 1 \pmod{100}$ kongruenciát kapjuk. (1 pont)
Mindkét oldalt a tizedikre emelve $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$. (1 pont)
Ezek szerint $a^{20} \equiv a^{21} \pmod{100}$, (1 pont)
ahonnan a^{20}-nal osztva (és ismét felhasználva, hogy a és 100 relatív prímek) $a \equiv 1 \pmod{100}$. (1 pont)
Az 1 és 100 közti egészek közül tehát csak az 1 felel meg a feladat feltételének (és az persze tényleg meg is felel). (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótpótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2020. december 21.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Egy helyi cukrászda úgy dönt, hogy előre csomagolt díszdobozokban, akciósan értékesíti a karácsony előttről megmaradt szaloncukrot, amiknek számáról csak azt tudják, hogy 400 és 600 közötti. Amikor tizenkettesével próbálják dobozolni a cukrokat, akkor hét cukor megmarad. Amikor viszont ehelyett ötvenes megapakkokkal próbálkoznak, akkor az utolsó dobozba épp eggyel kevesebb jut a szükségesnél. Hány szaloncukor marad meg, ha tizenhatosával dobozolják őket?

* * * * *

Ha x jelöli a szaloncukrok számát, akkor a feladat feltételeiből $x \equiv 7 \pmod{12}$ és $x \equiv -1 \pmod{50}$ (valamint $400 \leq x \leq 600$) adódik. (1 pont)

A kapott kongruenciarendszert a tanult módszerrel oldjuk meg. Az első kongruenciából: $x = 12k + 7$ valamely k egészre. Ezt a másodikba helyettesítve: $12k + 7 \equiv -1 \pmod{50}$. Mindkét oldalból 7-et levonva a $12k \equiv -8 \pmod{50}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (2 pont)

4-gyel osztva: $3k \equiv -2 \pmod{25}$, ahol a modulus $(4, 50) = 2$ miatt változott a felére. (2 pont)

$-2 \equiv 48 \pmod{25}$ miatt ez a $3k \equiv 48 \pmod{25}$ alakba írható. 3-mal osztva: $k \equiv 16 \pmod{25}$, ahol a modulus $(3, 25) = 1$ miatt nem változott. (1 pont)

Mivel minden megtett lépésünk ekvivalens átalakítás volt, ezért $k \equiv 16 \pmod{25}$ valóban a lineáris kongruencia megoldáshalmazát adja meg. (1 pont)

Ebből tehát $k = 25\ell + 16$ valamely ℓ egészre. Ezt visszahelyettesítve: $x = 12k + 7 = 12(25\ell + 16) + 7 = 300\ell + 199$. (1 pont)

$400 \leq x \leq 600$ miatt ebből $x = 499$ következik. (1 pont)

Mivel $499 = 31 \cdot 16 + 3$, ezért a szaloncukrokat tizenhatosával csomagolva 3 marad ki. (1 pont)

Ha valaki a megoldás során előállt lineáris kongruenciát az Euklideszi algoritmussal oldja meg, akkor a tanultak szerint $(12, 50) = 2$ miatt először 2-vel osztania kell (2 pont), majd a kapott $6k \equiv -4 \pmod{25}$ kongruencia 4-szeresét a $25k \equiv 0 \pmod{25}$ kongruenciából kivonva (2 pont) kapja a megoldáshalmazt. Ha egy megoldó 2-vel való osztás nélkül kezdi el az algoritmus alkalmazását és az egy kivonás után kapott kongruencia felezése után jut el az (egyébként helyes) megoldáshalmazhoz, az lényeges elvi hibának számít és (egyéb indoklás híján) 3 pont levonást jelent.

2. Legyen $n = 987654321$. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg $98n + 27$ és $76n + 21$ legnagyobb közös osztóját. (Az algoritmus végrehajtását dokumentáljuk is.)

* * * * *

Az euklideszi algoritmust alkalmazzuk. (2 pont)
(Ez a pontszám tehát annak jár, aki felismeri, hogy ezt az algoritmust kell alkalmazni – akkor is, ha ezt külön nem írja le.)
$(98n + 27)$-et $(76n + 21)$-gyel maradékosan osztva: $98n + 27 = 1 \cdot (76n + 21) + 22n + 6$. (1 pont)
$(76n + 21)$-et $(22n + 6)$-tal maradékosan osztva: $76n + 21 = 3 \cdot (22n + 6) + 10n + 3$. (1 pont)
$(22n + 6)$-ot $(10n + 3)$-mal maradékosan osztva: $22n + 6 = 2 \cdot (10n + 3) + 2n$. (1 pont)
$(10n + 3)$-at $2n$-nel maradékosan osztva: $10n + 3 = 5 \cdot (2n) + 3$. (1 pont)
Mivel n számjegyeinek összege 45, vagyis 3-mal osztható, ezért n is, valamint $2n$ is 3-mal osztható. Így $2n$-et 3-mal osztva a maradék 0. (2 pont)
Így a legnagyobb közös osztó (az utolsó nemnulla maradék, vagyis) 3. (2 pont)

3. A $P(5; -6; 28)$ pontban lévő fényforrástól induló fénysugár az útja során érinti a $Q(14; 15; 16)$ pontot és áthalad az $x + 3y - z = 1$ egyenletű síküvegen (nem feltétlen ebben a sorrendben).
a) Határozzuk meg a fénysugár síküveggel való metszéspontját.
b) Döntsük el, hogy P és Q a síküveg azonos vagy különböző oldalán helyezkedik-e el.
(Feltehetjük, hogy a fény egyenes vonalban terjed és a síküvegen irányváltoztatás nélkül halad át.)

* * * * *

a) Jelölje a fénysugár egyenesét f, a síküveg síkját S.
f átmegy P-n és Q-n, így irányvektora a $\overrightarrow{PQ}$ vektor. (1 pont)
A P-be, illetve Q-ba mutató helyvektorokat $\underline{p}$-vel, illetve $\underline{q}$-val jelölve $\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = (9; 21; -12)$.(1 pont)
Ehelyett használhatjuk irányvektornak például a $\overrightarrow{PQ}$ harmadát, a $\underline{v} = (3; 7; -4)$ vektort is. (0 pont)
Így f paraméteres egyenletrendszerét $\underline{v}$ és (például) P segítségével felírva: $x = 5 + 3\lambda$, $y = -6 + 7\lambda$, $z = 28 - 4\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. (2 pont)
f és S metszéspontját arra a λ értékre kapjuk, amire x-nek, y-nak és z-nek ezeket az értékeit S egyenletébe helyettesítve az teljesül: $(5 + 3\lambda) + 3(-6 + 7\lambda) - (28 - 4\lambda) = 1$. Ebből $28\lambda = 42$, $\lambda = \frac{3}{2}$ adódik, amiből tehát a metszéspont: $M(9{,}5; 4{,}5; 22)$. (3 pont)
b) A fentiek szerint M-et a $\lambda = \frac{3}{2}$ értékre kapjuk a paraméteres egyenletrendszerből, vagyis $\underline{m} = \underline{p} + \frac{3}{2} \cdot \underline{v}$ (ahol $\underline{m}$ az M-be mutató helyvektort jelöli). Ugyancsak a fentiekből következik, hogy $\underline{q} = \underline{p} + 3 \cdot \underline{v}$ (hiszen $\underline{v}$-t $\underline{q} - \underline{p}$ harmadaként kaptuk). Következésképp P-ből indulva és a fénysugár félegyenesén haladva először érjük el M-et és utána Q-t, így P és Q különböző oldalán van S-nek. (3 pont)

4. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok a vektorok, melyek koordinátái (felülről lefelé) mértani sorozatot alkotnak?

* * * * *

Jelöljük V-vel azoknak az $\mathbb{R}^4$-beli vektoroknak a halmazát, melyek koordinátái (felülről lefelé) mértani sorozatot alkotnak.
Az $\underline{u} = (1, 0, 0, 0)^T$ és $\underline{v} = (1, 1, 1, 1)^T$ vektorok V-beliek, mert $\underline{u}$, illetve $\underline{v}$ koordinátái 0, illetve 1 kvóciensű mértani sorozatot alkotnak. (2 pont)
Viszont az $\underline{u} + \underline{v} = (2, 1, 1, 1)^T$ vektor nem V-beli, mert a koordinátái nem alkotnak mértani sorozatot. Valóban, $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$ miatt nincs olyan kvóciens, amivel a mértani sorozat definíciója teljesülne. (4 pont)
Mivel $\underline{u}, \underline{v} \in V$, de $\underline{u} + \underline{v} \notin V$, ezért az altér definíciója sérül, vagyis V nem altér. (4 pont)
Noha ez közvetlenül nem járul hozzá egy helyes megoldáshoz, ha valaki (hiánytalanul) megmutatja, hogy $\underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \cdot \underline{v} \in V$ is teljesül, akkor ezért 3 pontot kaphat; ha pedig a megoldásban nyoma van annak, hogy az összegre való zártságot is elkezdi vizsgálni (és nem csak felírja), akkor ezért további 1 pont adható.

5. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{és} \ \underline{a} = \begin{pmatrix} p \\ p+1 \\ p+2 \\ 2p \end{pmatrix}.$$

Van-e a p valós paraméternek olyan értéke, amire teljesül az $\underline{a} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ állítás? Ha igen, adjuk meg a p összes ilyen értékét és mutassuk meg róluk, hogy rájuk valóban igaz ez az állítás.

* * * * *

$\underline{a} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ azt jelenti, hogy $\underline{a}$ kifejezhető $\underline{u}$-ból, $\underline{v}$-ből és $\underline{w}$-ből lineáris kombinációval, vagyis léteznek olyan α, β, γ skalárok, hogy $\alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v} + \gamma \cdot \underline{w} = \underline{a}$. (2 pont)
Behelyettesítve $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$ konkrét értékét és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= p \\ \beta + \gamma &= p+1 \\ 2\alpha + \gamma &= p+2 \\ 2\beta + \gamma &= 2p \end{aligned}$$
(2 pont)

A harmadik és első egyenlet különbségéből $\alpha = 2$, a negyedik és második különbségéből $\beta = p-1$. Ezekből γ értékére az első és harmadik egyenletből $\gamma = p-2$, a másodikból és a negyedikből $\gamma = 2$ adódik. (2 pont)
Következésképp az egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha $p - 2 = 2$, vagyis $p = 4$. (2 pont)
$\underline{a} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ tehát pontosan a $p = 4$ esetben igaz. (2 pont)

6*. Legyen $n = 898989\ldots89$ az a 134 jegyű egész szám, aminek a (balról) páratlan sorszámú számjegyei mind 8-cal, a páros sorszámúak pedig 9-cel egyenlők. Milyen maradékot ad n 67-tel osztva?

* * * * *

$n = 89 + 100 \cdot 89 + 100^2 \cdot 89 + 100^3 \cdot 89 + \ldots + 100^{66} \cdot 89$. (1 pont)
n tehát egy olyan mértani sorozat első 67 elemének az összege, aminek az első tagja 89, a kvóciense 100.
Ezért a mértani sorozat összegképletéből $n = 89 \cdot \dfrac{100^{67} - 1}{100 - 1}$. (1 pont)
Mivel 67 prím, ezért a „kis" Fermat-tétel szerint $100^{67} \equiv 100 \pmod{67}$. (2 pont)
Mindkét oldalból 1-et levonva: $100^{67} - 1 \equiv 99 \pmod{67}$. (1 pont)
Mindkét oldalt 89-cel szorozva: $89(100^{67} - 1) \equiv 89 \cdot 99 \pmod{67}$. (1 pont)
A bal oldal (is) osztható 99-cel, ez következik az n-re adott fenti képletből (hiszen n nyilván egész). (1 pont)
Mindkét oldalt 99-cel osztva a modulus nem változik, mert $(67, 99) = 1$:
$89 \cdot \dfrac{100^{67} - 1}{99} \equiv 89 \pmod{67}$. (1 pont)
Következésképp n 89 maradékot ad 67-tel osztva. (2 pont)
Ha egy megoldó a fenti gondolatmenettől annyiban tér el, hogy először végzi el a 99-cel való osztást és utána a 89-cel való szorzást, akkor indokolnia kell, hogy $100^{67} - 1$ osztható 99-cel; ha ezt elmulasztja, azért a fenti pontozásban a megfelelő, a bal oldal oszthatóságáért járó 1 pontot veszítse el. A $100^{67} \equiv 100 \pmod{67}$ kongruencia természetesen az Euler-Fermat tétel segítségével is indokolható: $\varphi(67) = 66$, mert 67 prím és $(100, 67) = 1$, így $100^{66} \equiv 1 \pmod{67}$; ezt 100-zal szorozva kapjuk a kívánt állítást. Aki így jár el, de a $(100, 67) = 1$ hivatkozást elhagyja, az 1 pontot veszítsen.