Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2018. október 18.

1. Mennyi maradékot ad 363-mal osztva 4^{444}?

2. Az alábbi C kód a bemenetként (10-es számrendszerben) kapott n pozitív egész négyzetét számítja ki. Tegyük fel, hogy a kód végrehajtásakor a gép az alapműveleteket az „írásbeli” összeadás és kivonás segítségével végzi el. Döntsük el, hogy az eljárás polinomiális-e.

```
x = n; y = 0;
while (x > 0) {
   x = x-1;
   y = y+n;
}
printf("Eredmény: %d", y);
```

3. Átmegy-e az origón az az S sík, amely tartalmazza a $P(2;-1;4)$ pontot és az $\frac{x-1}{4} = \frac{1-y}{5} = \frac{z-3}{6}$ egyenletrendszerű e egyenest?

4. Generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben az alábbi $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{és} \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6*. Legyen n egy 8-cal osztható, de 3-mal nem osztható pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy a 3 árulója n-nek (vagyis a Fermat-teszt végrehajtásakor a 3 tanúsítja n összetett voltát).

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.
Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2018. november 29.

1. a) A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a számát.

b) Ha p-nek és q-nak van olyan értéke, amelyre az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a p és q ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 &= 8 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 - 28x_4 &= 23 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 - 31x_4 &= 14 \\ 2x_1 + p \cdot x_4 &= q \end{aligned}$$

2. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden $n \times n$-es A mátrixra.

a) Ha létezik olyan $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer nem megoldható, akkor $\det A = 0$.

b) Ha $\det A = 0$, akkor létezik olyan $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer nem megoldható.

3. Számítsuk ki az A^{2018} mátrixot az alábbi A mátrixra. (A^{2018} azt a 2018 tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Határozzuk meg az A^{-1} és a B mátrixokat, ha az A és az $A \cdot B$ mátrixok az alábbiak.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 777 & 666 \\ 999 & 888 \end{pmatrix}$$

5. Egy 4×6-os A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 + i \cdot j$ minden $1 \le i \le 4$ és $1 \le j \le 6$ esetén. Határozzuk meg A rangját.

6*. Az $L \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt akkor nevezzük *egyenesnek*, ha léteznek olyan $\underline{p}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektorok, hogy $L = \{\underline{p} + \lambda \cdot \underline{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$; vagyis L azokból az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{x}$ vektorokból áll, amelyekre $\underline{x} = \underline{p} + \lambda \cdot \underline{v}$ teljesül valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n változós lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a megoldáshalmaza (mint $\mathbb{R}^n$-beli vektorok halmaza) tartalmaz egyenest.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.
Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

2018. december 10.

1. A pozitív egész n szám 513-szorosának utolsó három számjegye 001. Mi az n utolsó 3 számjegye?

2. Milyen maradékot ad 392-vel osztva $169^{181^{194}}$?

3. Legyen $n = 20181210$. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg $45n + 12$ és $35n + 9$ legnagyobb közös osztóját.

4. Álljon a V halmaz azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból, amelyekben a négy koordináta szorzata nagyobb vagy egyenlő 0-nál. Döntsük el, hogy V alteret alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben.

5. A $W \leq \mathbb{R}^6$ altér álljon azokból az $\mathbb{R}^6$-beli vektorokból, amelyeknek a páratlan sorszámú koordinátái fölülről lefelé haladva 2 kvóciensű, a páros sorszámú koordinátái pedig fölülről lefelé haladva 3 kvóciensű mértani sorozatot alkotnak. (Így például a jobbra látható vektor W-beli.) Határozzuk meg a W altér dimenzióját. (Azt nem szükséges bebizonyítani egy teljes értékű megoldáshoz, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 15 \\ 12 \\ 45 \end{pmatrix}$$

6*. Határozzuk meg az $A(1;5;2)$, $B(2;7;4)$ és $C(2;9;10)$ pontok által meghatározott háromszög A csúcsán átmenő (belső) szögfelezőjének az egyenletrendszerét.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

2018. december 10.

1. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 17x_2 - 19x_3 &= 28 \\ 2x_1 + 11x_2 - 12x_3 &= p + 34 \\ 7x_1 + 26x_2 + p \cdot x_3 &= p + 15 \end{aligned}$$

2. Az 6×6-os A mátrix főátlójában és alatta minden elem 1-es, a jobb felső sarkában álló elem 2018, a mátrix összes többi (14 darab) eleme pedig 0. Határozzuk meg A determinánsát.

3. Számítsuk ki az A^{2018} mátrixot az alábbi A mátrixra. (A^{2018} azt a 2018 tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.)

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Határozzuk meg az alábbi A és B mátrixok hiányzó, betűkkel jelölt elemeit, ha tudjuk, hogy $B = A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & p \\ q & 5 & r \\ s & -26 & 27 \end{pmatrix}$$

5. Az 5×10-es A mátrixról tudjuk, hogy elhagyható belőle egy alkalmasan választott sor és oszlop úgy, hogy a kapott 4×9-es mátrix rangja azonos legyen A rangjával. Azt is tudjuk továbbá, hogy bárhogyan hagyunk el A-ból két sort és két oszlopot, a kapott 3×8-as mátrix rangja már különbözik A rangjától. Határozzuk meg A rangját.

6*. Az $n \times n$-es A és B mátrixokra teljesül, hogy $B \neq 0$ és $A \cdot B = B$. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $n \times n$-es C mátrix, amelyre $C \neq 0$ és $A^T \cdot C = C$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

2018. december 17.

1. Határozzuk meg az összes olyan háromjegyű, pozitív egész számot, amelynek a 7-es és 8-as számrendszerbeli alakjának az utolsó két számjegye is 11.

2. Az alábbi C kód a bemenetként (10-es számrendszerben) kapott n pozitív egész számjegyeinek az összegét számítja ki. Tegyük fel, hogy a kód végrehajtásakor a gép az alapműveleteket az „írásbeli” összeadás, kivonás, szorzás és osztás segítségével végzi el. Döntsük el, hogy az eljárás polinomiális-e. (A `floor(n/10.0)` az $\frac{n}{10}$ alsó egészrészét adja vissza.)

```
x = 0; y = 0;
while (n > 0) {
   x = floor(n/10.0);
   y = y+n-10*x;
   n = x;
}
printf("Eredmény: %d", y);
```

3. A $P(3;17;27)$ pontban lévő fényforrástól induló fénysugár épp merőleges szögben esik be a $3x - y - 2z = 8$ egyenletű síktükörre. Határozzuk meg a beesési pontot. (Feltehetjük, hogy a fény egyenes vonalban terjed.)

4. Generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben az alábbi $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek. Következik-e ebből, hogy a $3\underline{a} - \underline{b}$, $2\underline{a} + \underline{c}$ és $4\underline{b} - 3\underline{c}$ vektorok is mindig lineárisan függetlenek?

6*. Határozzuk meg az 630-nál kisebb, 630-hoz relatív prím pozitív egész számok összegét.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

2018. december 17.

1. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 9 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Oldjuk meg az alábbi A és B mátrixokra az $X \cdot A = B$ mátrixegyenletet (vagyis adjuk meg az összes olyan X mátrixot, amelyre az egyenlet fennáll).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 12 & 24 & 2 & 12 \\ 3 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 & 35 \end{pmatrix}$$

3. A 2018 oszlopú A mátrixra teljesül, hogy léteznek olyan $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{2018}$, $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$ vektorok, amelyekre $A \cdot \underline{x}_1 = A \cdot \underline{x}_2$. Mutassuk meg, hogy ekkor léteznek olyan $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_{2018} \in \mathbb{R}^{2018}$ vektorok is, amelyek közül semelyik kettő nem egyenlő és $A \cdot \underline{z}_1 = A \cdot \underline{z}_2 = \ldots = A \cdot \underline{z}_{2018}$.

4. A p, q és r valós paraméterek minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak és ha létezik, akkor adjuk meg az A^{-1} bal felső sarkában álló elemét.

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & 3 & 8 \\ r & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg a **2.** feladatbeli A mátrix rangját.

6*. Legyen M egy 100 oszlopú mátrix. Jelölje A az M első 70 oszlopából álló, B pedig az M utolsó 70 oszlopából álló mátrixot. Végül jelölje X az M középső 40 oszlopából álló mátrixot. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \geq \mathrm{r}(M) + \mathrm{r}(X).$$

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2018. október 18.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Mennyi maradékot ad 363-mal osztva 4^{444}?

* * * * *

363 prímtényezős felbontása: $363 = 3 \cdot 11^2$. (1 pont)
Ezért a tanult képlet szerint $\varphi(363) = (3-1)(11^2 - 11) = 220$. (2 pont)
Mivel $(4, 363) = 1$ (hiszen 363 páratlan), (1 pont)
ezért az Euler-Fermat tételből $4^{220} \equiv 1 \pmod{363}$ következik. (2 pont)
Mindkét oldalt négyzetre emelve: $4^{440} \equiv 1^2 = 1 \pmod{363}$. (2 pont)
Mindkét oldalt $4^4 = 256$-tal szorozva: $4^{444} \equiv 256 \pmod{363}$. (2 pont)
Így 4^{444} 256 maradékot ad 363-mal osztva.
A feladat elvileg megoldható az ismételt négyzetre emelések módszerével is, de az (különösen számológép nélkül) sokkal kellemetlenebb és hosszabb megoldásra vezet; ha egy hallgató ilyen megoldással próbálkozik (és az ahhoz szükséges számításokat legalább elkezdi), akkor 1 pontot kaphat pusztán annak felismeréséért, hogy ez az algoritmus elvileg alkalmas a kérdés megválaszolására. A további 9 pont a helyes számításokért járhat: a 4^{2^k} hatványok 363-as maradékai a $k = 0, \ldots, 8$ értékekre (ezek sorra: 4, 16, 256, 196, 301, 214, 58, 97, 334) darabonként fél-fél pontot érjenek, a 444 felírása 2-es számrendszerben ($444 = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^7 + 2^8$) 1 pontot, majd a 4^4, 4^{12}, 4^{28}, 4^{60}, 4^{188}, 4^{444} hatványok maradékai (ezek sorra: 256, 82, 361, 298, 229, 256) ismét darabonként fél-fél pontot érjenek, végül a végeredmény megadása is fél pontot.

2. Az alábbi C kód a bemenetként (10-es számrendszerben) kapott n pozitív egész négyzetét számítja ki. Tegyük fel, hogy a kód végrehajtásakor a gép az alapműveleteket az „írásbeli” összeadás és kivonás segítségével végzi el. Döntsük el, hogy az eljárás polinomiális-e.

```
x = n; y = 0;
while (x > 0) {
   x = x-1;
   y = y+n;
}
printf("Eredmény: %d", y);
```

* * * * *

Jelölje n számjegyeinek számát (a 10-es számrendszerben) k. Ekkor az eljárás bemenetének mérete k (hiszen számjegyenként egy bájt szükséges a bemenet tárolásához). (2 pont)
Ekkor tehát $n \geq 10^{k-1}$ (hiszen a k jegyű számok 10^{k-1} és $10^k - 1$ között vannak). (2 pont)
Az eljárás a ciklusmagot n-szer hajtja végre, hiszen az x változó értéke n-től 1-ig csökken, mielőtt a ciklus megáll. (1 pont)
Ezért az algoritmus lépésszáma legalább 10^{k-1} (hiszen ez még akkor is igaz volna, ha a ciklusmag végrehajtásához mindig egyetlen lépés elég volna). (2 pont)
Mivel az eljárás k méretű inputon legalább 10^{k-1} lépést tesz, ezért exponenciális lépésszámú (2 pont)
és így nem polinomiális futásidejű. (1 pont)
Mivel az előadáson az exponenciális algoritmus definíciója az volt, hogy minden $k \geq 1$ esetén van olyan k méretű input, amelyre az eljárás legalább a^k lépést tesz, ahol $a > 1$ fix konstans, ezért a fenti megoldást valójában még ki kellene egészíteni például azzal, hogy $10^{k-1} \geq 3^k$ igaz, ha $k \geq 2$. Ezért a hiányosságért azonban ne vonjunk le pontot, a 10^{k-1}-es alsó becslés is legyen elegendő egy teljes értékű megoldáshoz. Ha egy megoldó nem tudja ugyan precízen indokolni, hogy az eljárás nem polinomiális, de a megoldásából világosan kiderül, hogy látja, hogy az nem hatékony (például: „egy 100 jegyű input esetén legalább 10^{99} összeadást és kivonást végez, ami egy szuperszámítógépnek is évmilliárdokig tartana”), az ezért legföljebb 4 pontot kaphat. (Ebben az esetben azonban ehhez már nem adhatók a fenti pontozás szerinti további részpontok. Így minden ilyen megoldást úgy kell értékelni, hogy a precíz megoldásból származó részpontszám, illetve a nem precíz megoldásért adható legföljebb 4 pont közül a nagyobbat adjuk.)

3. Átmegy-e az origón az az S sík, amely tartalmazza a $P(2; -1; 4)$ pontot és az $\frac{x-1}{4} = \frac{1-y}{5} = \frac{z-3}{6}$ egyenletrendszerű e egyenest?

* * * * *

Az e egyenletrendszeréből (a középső tört $\frac{y-1}{-5}$ alakba való átírása után) kiolvasható, hogy e átmegy a $Q(1; 1; 3)$ ponton és egy irányvektora $\underline{v} = (4; -5; 6)$. (2 pont)
S-sel párhuzamos a $\overrightarrow{QP} = \underline{p} - \underline{q} = (2; -1; 4) - (1; 1; 3) = (1; -2; 1)$ vektor, ahol $\underline{p}$ és $\underline{q}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorokat jelöli. (1 pont)
S-nek normálvektora lesz az $\underline{n} \neq \underline{0}$ vektor, ha az merőleges $\overrightarrow{QP}$-re és $\underline{v}$-re is. (1 pont)
Az $\underline{n} = (a, b, c) \neq \underline{0}$ pontosan akkor ilyen, ha az $\underline{n} \cdot \overrightarrow{QP}$ és az $\underline{n} \cdot \underline{v}$ skaláris szorzatok értéke 0. (1 pont)
A skaláris szorzat képletéből: $a - 2b + c = 0$ és $4a - 5b + 6c = 0$. (1 pont)
A második egyenletből az első 4-szeresét kivonva: $3b + 2c = 0$. Így például a $b = 2$, $c = -3$ választással mindkét egyenletből $a = 7$ adódik, vagyis $\underline{n} = (7; 2; -3)$ normálvektora S-nek. (1 pont)
Ebből (például) P-t használva felírható S egyenlete: $7x + 2y - 3z = 0$. (2 pont)
Mivel a $(0; 0; 0)$ pont ezt kielégíti, ezért S átmegy az origón. (1 pont)
A hiánytalan megoldáshoz valójában hozzátartozna annak ellenőrzése is, hogy $P \notin e$ (és így $\overrightarrow{QP} \nparallel \underline{v}$). Mivel azonban a feladat szövege implicite állítja S egyértelműségét és ezáltal a $P \notin e$ állítást, ezért ennek a hiányáért ne vonjunk le pontot.

4. Generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben az alábbi $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

* * * * *

Első megoldás. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok nem párhuzamosak, mert nem skalárszorosai egymásnak. (1 pont)
Mivel két nem párhuzamos vektorból (1 pont)
az őket tartalmazó sík minden vektora kifejezhető lineáris kombinációval, (1 pont)
ezért ha a $\underline{c}$ benne volna az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített, origón átmenő síkban, akkor léteznének olyan α és β együtthatók, amelyekre $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} = \underline{c}$. (2 pont)
Ebből $\alpha + 2\beta = 3$, $\alpha + 2\beta = 4$ (és $\beta = 2$) adódna. Mivel ezek az egyenletek ellentmondásra vezetnek, ezért ilyen α és β nincs. (2 pont)
Tehát az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok nem esnek egy (origón átmenő) síkba, így az előadáson tanultak szerint generátorrendszert alkotnak $\mathbb{R}^3$-ben (mert $\mathbb{R}^3$ minden vektora kifejezhető belőlük lineáris kombinációval). (3 pont)

Második megoldás. $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamosak, mert nem skalárszorosai egymásnak. (1 pont)
Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített, origón átmenő S síknak normálvektora lesz az $\underline{n} \neq \underline{0}$ vektor, ha az merőleges $\underline{a}$-ra és $\underline{b}$-re is. (1 pont)
Az $\underline{n} = (a, b, c) \neq \underline{0}$ pontosan akkor ilyen, ha az $\underline{n} \cdot \underline{a}$ és az $\underline{n} \cdot \underline{b}$ skaláris szorzatok értéke 0. (1 pont)
A skaláris szorzat képletéből: $a + b = 0$ és $2a + 2b + c = 0$. (1 pont)
Ezeknek megfelel például az $\underline{n} = (1; -1; 0)$ vektor, így az normálvektora S-nek. (1 pont)
Ebből (felhasználva, hogy átmegy az origón) felírható S egyenlete: $x - y = 0$. (1 pont)
Mivel $\underline{c}$ ezt nem elégíti ki, ezért nem fekszik S-ben. (1 pont)
Tehát az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok nem esnek egy (origón átmenő) síkba, így az előadáson tanultak szerint generátorrendszert alkotnak $\mathbb{R}^3$-ben (mert $\mathbb{R}^3$ minden vektora kifejezhető belőlük lineáris kombinációval). (3 pont)

Harmadik megoldás. A $\underline{v} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ vektor pontosan akkor van az $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ generált altérben, ha $\underline{v}$ kifejezhető $\underline{a}$-ból, $\underline{b}$-ből és $\underline{c}$-ből lineáris kombinációval; vagyis ha léteznek olyan α, β, γ együtthatók, hogy $\alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c} = \underline{v}$. (1 pont)
Behelyettesítve $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ konkrét értékét és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 3\gamma &= p \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma &= q \\ \beta + 2\gamma &= r \end{aligned} \qquad \text{(2 pont)}$$

Az első két egyenlet különbségéből: $\gamma = q - p$. Ebből és a harmadik egyenletből: $\beta = r - 2(q - p) = 2p - 2q + r$. Ezeket az első két egyenlet közül bármelyikbe visszahelyettesítve: $\alpha = q - 2r$. (1 pont)
A kapott $\alpha = q - 2r$, $\beta = 2p - 2q + r$, $\gamma = q - p$ valóban megoldása az egyenletrendszernek. (1 pont)
Ebből következik, hogy a fenti egyenletrendszer minden p, q és r esetén megoldható, (1 pont)
vagyis minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ benne van az $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ generált altérben. (2 pont)
Ezért $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ generátorrendszert alkot $\mathbb{R}^3$-ben. (2 pont)

5. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

* * * * *

Tegyük fel, hogy az α, β, γ skalárokra $\alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v} + \gamma \cdot \underline{w} = \underline{0}$ teljesül. (1 pont)
Behelyettesítve $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ konkrét értékét és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} 2\alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \\ 4\alpha + 6\beta + 2\gamma &= 0 \\ 3\alpha + 2\beta &= 0 \\ 6\alpha + 4\beta &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(2 pont)}$$

Látható, hogy a második egyenlet duplája az elsőnek, a negyedik pedig duplája a harmadiknak; ezért a második és negyedik egyenletek elhagyhatók (a megoldáshalmaz változtatása nélkül). (1 pont)
Ekkor például az $\alpha = 2$, $\beta = -3$ választás a harmadik egyenletet kielégíti, amiből az első egyenletből $\gamma = 5$ adódik. (1 pont)
Mindezekből tehát $2\underline{u} - 3\underline{v} + 5\underline{w} = \underline{0}$. (2 pont)
Mivel tehát az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorokból a $\underline{0}$ kifejezhető nem csupa 0 együtthatójú lineáris kombinációval, ezért a tanultak szerint $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ lineárisan összefüggő (és így a válasz: nem). (3 pont)
Ha egy megoldó felírja és meggyőzően (ellenőrzéssel) indokolja a $2\underline{u} - 3\underline{v} + 5\underline{w} = \underline{0}$ összefüggést, azért természetesen akkor is jár az ezért adható maximális részpontszám (7 pont), ha az ehhez vezető utat a megoldó nem részletezi. A feladat megoldható a lineáris függetlenség eredeti definíciójával is: például a fentiekhez hasonló számolással kihozható, hogy $\underline{w} = -\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v}$, amiből definíció szerint szintén következik $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ lineáris összefüggősége.

6*. Legyen n egy 8-cal osztható, de 3-mal nem osztható pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy a 3 árulója n-nek (vagyis a Fermat-teszt végrehajtásakor a 3 tanúsítja n összetett voltát).

* * * * *

Mivel $3 \nmid n$ (és 3 prím), ezért $(3, n) = 1$. (1 pont)
Így a feladat állítása azt jelenti, hogy $3^{n-1} \not\equiv 1 \pmod n$, ezt kell tehát megmutatni. (2 pont)
Tegyük fel ezért indirekt, hogy $3^{n-1} \equiv 1 \pmod n$.
Ebből $8|n$ miatt $3^{n-1} \equiv 1 \pmod 8$ is következik. Valóban: $3^{n-1} \equiv 1 \pmod n$ azt jelenti, hogy $n \big| 3^{n-1} - 1$; ebből $8|n$ miatt $8 \big| 3^{n-1} - 1$, ami ekvivalens a $3^{n-1} \equiv 1 \pmod 8$ állítással. (2 pont)
Mivel $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod 8$, ebből (k-adik hatványra emeléssel) $3^{2k} \equiv 1 \pmod 8$, amiből pedig (3-mal szorzással) $3^{2k+1} \equiv 3 \pmod 8$ minden $k \geq 1$ egészre. (2 pont)
Ebből és a $3^{n-1} \equiv 1 \pmod 8$ állításból következik, hogy $n - 1$ páros, vagyis n páratlan. (1 pont)
Ez pedig $8|n$ miatt ellentmondás, amivel $3^{n-1} \not\equiv 1 \pmod n$ indoklása teljes. (2 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2018. november 29.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. a) A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a számát.

b) Ha p-nek és q-nak van olyan értéke, amelyre az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a p és q ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 &= 8 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 - 28x_4 &= 23 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 - 31x_4 &= 14 \\ 2x_1 + p \cdot x_4 &= q \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -7 & 8 \\ 4 & 4 & 1 & -28 & 23 \\ 5 & 3 & -1 & -31 & 14 \\ 2 & 0 & 0 & p & q \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & 4 & -26 \\ 0 & -2 & -2 & p+14 & q-16 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & -2 & -6 & 4 & -26 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & -2 & p+14 & q-16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & -2 & p+14 & q-16 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & p+10 & q+10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & p+10 & q-2 \end{array}\right) \qquad \text{(2 pont)}$$

Ha $p \neq -10$, akkor az utolsó sort $(p+10)$-zel osztva kapjuk a lépcsős alakot. Mivel minden oszlopban van vezéregyes (és a redukált lépcsős alakig ez már nem változhat meg), ezért ilyenkor a megoldás egyértelmű (vagyis a megoldások száma 1). (2 pont)

Ha $p = -10$ és $q \neq 2$, akkor az utolsó sor „tilos sor”. Ezért ilyenkor nincs megoldás. (1 pont)
Ha $p = -10$ és $q = 2$, akkor az utolsó sor csupa nulla sor, ezért ilyenkor a lépcsős alakot ennek az elhagyásával kapjuk. (1 pont)
Innen a Gauss-eliminációt folytatva kapjuk a redukált lépcsős alakot:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

Így a $p = -10$ és $q = 2$ esetben végtelen sok megoldás van: (1 pont)
$x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$ szabad paraméter és $x_3 = 3$, $x_2 = 4 + 2\alpha$, $x_1 = 1 + 5\alpha$. (2 pont)
A fenti pontozás úgy értendő, hogy az a) feladat hibátlan megoldása önmagában 6 pontot ér. A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

2. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden $n \times n$-es A mátrixra.

a) Ha létezik olyan $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer nem megoldható, akkor $\det A = 0$.

b) Ha $\det A = 0$, akkor létezik olyan $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer nem megoldható.

* * * * *

a) Ha $\det A \neq 0$ volna, akkor a tanult tétel értelmében az $(A|\underline{b})$ lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható kellene legyen minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ezért ez az állítás igaz. (2 pont)

b) Megmutatjuk, hogy ez az állítás is igaz. Legyen ezért $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges és alkalmazzuk a Gauss-eliminációt az $(A|\underline{b})$ lineáris egyenletrendszer megoldására. (1 pont)
A determináns tanult tulajdonságai miatt az elimináció során nem változik meg az, hogy a vonaltól balra álló mátrix determinánsa nulla-e vagy sem. (1 pont)
Ebből következik, hogy a lépcsős alak elérése előtt kell keletkezzen olyan sor, amelynek a vonaltól balra eső része csupa nulla. Valóban: különben a lépcsős alak minden oszlopban tartalmazna vezéregyest és így a vonaltól balra álló mátrix determinánsa 1 volna – ami ellentmondana az iménti állításnak és annak, hogy $\det A = 0$. (2 pont)
Állítsuk meg tehát a Gauss-eliminációt abban a pillanatban, amikor olyan sor keletkezett, amelynek a vonaltól balra eső része csupa 0. Ha most ebben a sorban a vonaltól jobbra nem 0 áll, akkor (tilos sor keletkezése miatt) az egyenletrendszer nem megoldható, vagyis az állítást beláttuk. (1 pont)
Ha viszont a vonaltól balra csupa nulla sorban a vonaltól jobbra is 0 áll, akkor cseréljük most ki ezt a vonaltól jobbra álló elemet (például) 1-esre, majd ettől a ponttól „tekerjük vissza” a Gauss-eliminációt a kezdetéig (vagyis az eddig elvégzett lépéseken visszafelé haladva hajtsuk végre mindegyiknek a megfordítását). (2 pont)
Mivel a vonaltól balra nem változtattunk semmin, ezért ezzel egy olyan $(A|\underline{b}')$ lineáris egyenletrendszert kaptunk, amelyre a Gauss-eliminációt végrehajtva tilos sor keletkezik, így ennek valóban nincs megoldása. (1 pont)

Második megoldás a b) részre. Tegyük fel indirekt, hogy az állítás hamis: $\det A = 0$, de az $(A|\underline{b})$ lineáris egyenletrendszer mégis minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén megoldható. (1 pont)
Jelölje $\underline{e}_i$ az $n \times n$-es egységmátrix i-edik oszlopát (vagyis az $\mathbb{R}^n$-beli standard bázis i-edik vektorát) és legyen $\underline{x}_i$ az $(A|\underline{e}_i)$ lineáris egyenletrendszer egy megoldása (ami ezek szerint létezik). (1 pont)
Ekkor a tanultak szerint $A \cdot \underline{x}_i = \underline{e}_i$ teljesül minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. (1 pont)
Ebből következik (a mátrixszorzás definíciója szerint), hogy $A \cdot X = E$ teljesül arra az $n \times n$-es X mátrixra, amelynek az i-edik oszlopa $\underline{x}_i$ minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. (2 pont)
Alkalmazva a determinánsok szorzástételét: $\det A \cdot \det X = \det(A \cdot X) = \det E = 1$. (2 pont)
Ez pedig ellentmond annak, hogy $\det A = 0$ és így bizonyítja az állítást. (1 pont)

Ha egy megoldó ezt a megoldást adja, de a determinánsok szorzástételének alkalmazása helyett arra hivatkozik, hogy $A \cdot X = E$ miatt $X = A^{-1}$ és így a tanult tétel szerint $\det A \neq 0$ következik, az ezért a pontatlanságért (további indoklás híján) 1 pontot veszítsen. Ha viszont ezt kiegészíti azzal, hogy az előadáson (az inverz létezésére) elhangzott bizonyítás során kiderült, hogy $A \cdot X = E$-ből $X \cdot A = E$ is következik és ebből következtet arra, hogy $X = A^{-1}$, az természetesen maximális pontot ér.

Harmadik megoldás a b) részre. Tegyük fel indirekt, hogy az állítás hamis: $\det A = 0$, de az $(A|\underline{b})$ lineáris egyenletrendszer mégis minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén megoldható. (1 pont)
Jelölje $\underline{a}_i$ az A mátrix i-edik oszlopát minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Az $(A|\underline{b})$ megoldhatósága a tanultak szerint ekvivalens a $\underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$ állítással. Mivel ez a feltevés szerint minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén igaz, ezért ebből következik, hogy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. (1 pont)
Ha most $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ lineárisan összefüggő volna, akkor definíció szerint volna köztük olyan – legyen ez például $\underline{a}_n$ –, amelyik a többiből lineáris kombinációval kifejezhető. Ekkor viszont $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}$ is generátorrendszert alkotna $\mathbb{R}^n$-ben, hiszen $\underline{a}_n \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1} \rangle$ (és az altér definíciója) miatt az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$-ből lineáris kombinációval kifejezhető vektorok mind $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1} \rangle$-ben volnának, vagyis $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1} \rangle = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$ teljesülne. (2 pont)
Ez viszont ellentmondana az FG-egyenlőtlenségnek: $\mathbb{R}^n$-ben volna $(n-1)$ elemű generátorrendszer és n elemű lineárisan független rendszer is – hiszen az utóbbi feltételnek a tanultak szerint $\mathbb{R}^n$ minden bázisa megfelel. (2 pont)
Ezzel tehát megmutattuk, hogy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ lineárisan függetlenek. Ebből pedig a tanult tétel szerint $\det A \neq 0$ következik, ellentmondás. (2 pont)

3. Számítsuk ki az A^{2018} mátrixot az alábbi A mátrixra. (A^{2018} azt a 2018 tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrixszorzás definíciója szerint az A^2, majd az A^3 mátrixokat kiszámítva az alábbiakat kapjuk:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(2+2 pont)}$$

Ezek alapján már sejthető, hogy minden $n \geq 1$ esetén igaz az

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ állítás és így } \qquad A^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2018 \\ 0 & 1 & 0 & 2018 \\ 0 & 0 & 1 & 2018 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(1+1 pont)}$$

Az A^n-re vonatkozó állítást precízen n-re vonatkozó teljes indukcióval láthatjuk be: $n = 1$-re az állítás természetesen igaz. Ha pedig már valamely n-re igaz, akkor az A^n már ismert értékét A-val szorozva azt kapjuk, hogy A^{n+1} is megfelel az állításnak, mert az $A^n \cdot A$ szorzás az első három oszlopot és a jobb alsó sarkot továbbra is változatlanul hagyja, de az utolsó oszlop első három eleme $1 \cdot 1 + n \cdot 1 = n + 1$ lesz. Ezzel tehát az állítást beláttuk. (4 pont)
A pontozás úgy értendő, hogy ha a megoldó A^2 és A^3 kiszámítása után minden magyarázat nélkül közli A^{2018} értékét, arra 5 pontot kaphat. Ha megfogalmazza az A^n-re vonatkozó általános állítást, arra további 1-et. Ha pedig a megoldás legalább részben meggyőzően indokolja, hogy az A^n-re vonatkozó állítás igaz, akkor ezért már további 2 pont adható (a precíz teljes indukcióért járó 4-ből).

4. Határozzuk meg az A^{-1} és a B mátrixokat, ha az A és az $A \cdot B$ mátrixok az alábbiak.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 777 & 666 \\ 999 & 888 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A^{-1}-et a tanultak szerint Gauss-eliminációval számolhatjuk:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -9 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right), \quad \text{(3 pont)}$$

így A^{-1} a kapott alakban a vonaltól jobbra álló 2×2-es mátrix. (2 pont)
A B-t az $A^{-1} \cdot (A \cdot B)$ szorzat kiszámításával határozhatjuk meg. Valóban, a (mátrixszorzás alaptulajdonságairól és az inverzről) tanultak szerint $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = E \cdot B = B$. (3 pont)
Elvégezve a szorzást (amit nagyban könnyít, ha az elemek számításakor 111-et mindig kiemelünk):

$$B = A^{-1} \cdot (A \cdot B) = \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 777 & 666 \\ 999 & 888 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 222 \\ 111 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{(2 pont)}$$

A számolási hibákért szokás szerint 1-1 pont levonás jár, ha az a megoldás menetét érdemben nem befolyásolja. Az A^{-1} és a B létezését a feladat szövege implicite állítja, ezért nem vonunk le pontot egyik esetben sem a létezés indoklásának a hiányáért. A B-t természetesen (több számolással) meghatározhatjuk úgy is, hogy annak az elemeire változókat vezetünk be, ezekre felírjuk az $A \cdot B$ ismert értékéből adódó egyenleteket, majd megoldjuk az így kapott két darab, 2×2-es egyenletrendszert. Ha egy megoldó így jár el, akkor az egyenletek felírásáért összesen 1 pont járjon és a B elemeinek meghatározásáért elemenként további 1-1 pont (számolási hibánként 1 pontot levonva).

5. Egy 4×6-os A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 + i \cdot j$ minden $1 \le i \le 4$ és $1 \le j \le 6$ esetén. Határozzuk meg A rangját.

* * * * *

Vonjuk le a 2., 3., illetve 4. sorból az 1. sor 2-szeresét, 3-szorosát, illetve 4-szeresét. (2 pont)
Ekkor a 2., 3., illetve 4. sor minden eleme $(2j + 4) - 2(j + 1) = 2$, $(3j + 9) - 3(j + 1) = 6$, illetve $(4j + 16) - 4(j + 1) = 12$ lesz. (2 pont)
Vonjuk most le a 3., illetve a 4. sorból a 2. sor 3-szorosát, illetve 6-szorosát. (1 pont)
Ezzel a 3. és a 4. sor csupa nullává változik, így ezeket elhagyhatjuk. (1 pont)
A kapott A' mátrix két sora nem skalárszorosa egymásnak, ezért ez a két sor lineárisan független. Így a sorrang definíciója szerint $r(A') = 2$. (2 pont)
Mivel a Gauss-elimináció lépései a rangot nem változtatják, ezért $r(A) = r(A') = 2$. (2 pont)
Az A' rangjának definíció szerinti meghatározása helyett jó megoldás az is, ha azt további Gauss-eliminációs lépésekkel (az 1. sor megfelezésével, majd a kapott sor 2-szeresének a 2.-ból való kivonásával) lépcsős alakúra hozzuk és hivatkozunk arra, hogy lépcsős alakú mátrix rangja a sorainak a száma. A mátrix elemeire vonatkozó képletekkel való számolás helyett természetesen tökéletes megoldás az is, ha a megoldó elemenként felírja a mátrixot és arra futtatja a Gauss-eliminációt.

6*. Az $L \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt akkor nevezzük *egyenesnek*, ha léteznek olyan $\underline{p}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektorok, hogy $L = \left\{\underline{p} + \lambda \cdot \underline{v} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$; vagyis L azokból az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{x}$ vektorokból áll, amelyekre $\underline{x} = \underline{p} + \lambda \cdot \underline{v}$ teljesül valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n változós lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a megoldáshalmaza (mint $\mathbb{R}^n$-beli vektorok halmaza) tartalmaz egyenest.

* * * * *

Tegyük fel, hogy az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van és legyen $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ két különböző megoldás. (1 pont)
A tanultak szerint ekkor $A \cdot \underline{x}_1 = \underline{b}$ és $A \cdot \underline{x}_2 = \underline{b}$. (1 pont)
Legyen ekkor $\underline{p} = \underline{x}_1$ és $\underline{v} = \underline{x}_2 - \underline{x}_1$. (1 pont)
Ekkor $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$ miatt $\underline{v} \neq \underline{0}$, (1 pont)
a mátrixszorzás tanult tulajdonságai szerint $A \cdot \underline{v} = A \cdot (\underline{x}_2 - \underline{x}_1) = A \cdot \underline{x}_2 - A \cdot \underline{x}_1 = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}$,(2 pont)
és ezért minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $A \cdot (\underline{p} + \lambda \cdot \underline{v}) = A \cdot \underline{x}_1 + \lambda \cdot (A \cdot \underline{v}) = \underline{b} + \lambda \underline{0} = \underline{b}$. (2 pont)
Következésképp $\underline{p} + \lambda \cdot \underline{v}$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén megoldása az $(A|\underline{b})$ lineáris egyenletrendszernek, vagyis a megoldáshalmaz tartalmazza a $\underline{p}$ és $\underline{v}$ által meghatározott egyenest. (2 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2018. december 10.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

1. A pozitív egész n szám 513-szorosának utolsó három számjegye 001. Mi az n utolsó 3 számjegye?

* * * * *

Első megoldás. A feladat szövege szerint $513n \equiv 1 \pmod{1000}$. (1 pont)
Ebből következik, hogy $513n \equiv 1 \pmod{500}$, vagyis $13n \equiv 1 \pmod{500}$ is teljesül. (Ugyanide jutunk, ha a kongruenciát először 2-vel szorozzuk, majd 2-vel osztjuk.) (2 pont)
Mindkét oldalt 39-cel szorozva: $507n \equiv 39 \pmod{500}$, vagyis $7n \equiv 39 \pmod{500}$. (2 pont)
Ez ekvivalens a $7n \equiv 539 \pmod{500}$ kongruenciával, amelynek mindkét oldalát 7-tel osztva: $n \equiv 77 \pmod{500}$, ahol a modulus $(7, 500) = 1$ miatt nem változott. (1 pont)
Ebből tehát $n \equiv 77 \pmod{1000}$ vagy $n \equiv 500 + 77 = 577 \pmod{1000}$. (1 pont)
Ellenőrzéssel látható, hogy $513 \cdot 77 \not\equiv 1 \pmod{1000}$, de $513 \cdot 577 \equiv 1 \pmod{1000}$. (2 pont)
Ezek szerint a lineáris kongruencia egyetlen megoldása $n \equiv 577 \pmod{1000}$, vagyis n utolsó három számjegye 577. (1 pont)
A két ellenőrzés közül az egyik kiváltható azzal, hogy $(513, 1000) = 1 \mid 1$ miatt a lineáris kongruenciának egyetlen megoldása kell legyen modulo 1000. Ha valaki csak ennyit állapít meg, de a lineáris kongruenciát megoldani nem tudja, az ezért (a lineáris kongruencia felírásáért járó 1 ponton kívül további) 1 pontot kaphat. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb.

Második megoldás. A feladat szövege szerint $513n \equiv 1 \pmod{1000}$. (1 pont)
Ezt az előadáson tanult (euklideszi) algoritmussal oldjuk meg.
Ehhez először 513 és 1000 legnagyobb közös osztóját kell meghatározni: mivel $(513, 1000) = 1 \mid 1$, ezért egyetlen megoldás lesz modulo 1000 és az algoritmust osztás nélkül indíthatjuk a bemenetként kapott kongruenciától. (2 pont)
Az algoritmus végrehajtása során kapott kongruenciák sorra a következők: $1000n \equiv 0 \pmod{1000}$, $513n \equiv 1 \pmod{1000}$, $487n \equiv -1 \pmod{1000}$, $26n \equiv 2 \pmod{1000}$, $19n \equiv -37 \pmod{1000}$, $7n \equiv 39 \pmod{1000}$, $5n \equiv -115 \pmod{1000}$, $2n \equiv 154 \pmod{1000}$, $n \equiv -423 \equiv 577 \pmod{1000}$. (6 pont)
Így n utolsó három számjegye 577. (1 pont)
Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a teljes maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a megoldás nem lett könnyebb vagy rövidebb.

2. Milyen maradékot ad 392-vel osztva $169^{181^{194}}$?

* * * * *

Mivel $\varphi(392) = \varphi(2^3 \cdot 7^2) = (2^3 - 2^2)(7^2 - 7^1) = 168$ (1 pont)
és $(169, 392) = 1$, (1 pont)
ezért az Euler-Fermat tétel miatt $169^{168} \equiv 1 \pmod{392}$. (1 pont)
Ezt tetszőleges $k \geq 1$ egészre k-adik hatványra emelhetjük: $169^{168k} \equiv 1^k = 1 \pmod{392}$. (2 pont)
Mivel $181 \equiv 13 \pmod{168}$, ezt négyzetre emelve $181^2 \equiv 13^2 = 169 \equiv 1 \pmod{168}$. Ezt tovább a 97-edikre emelve: $181^{194} \equiv 1^{97} = 1 \pmod{168}$. (2 pont)
Ezért $181^{194} = 168k + 1$ valamely $k \geq 1$ egészre, amiből $169^{181^{194}} = 169^{168k+1}$. (1 pont)
A fentebb látott $169^{168k} \equiv 1 \pmod{392}$ kongruencia mindkét oldalát 169-cel szorozva: $169^{168k+1} \equiv 169 \pmod{392}$. Ezért $169^{181^{194}} \equiv 169 \pmod{392}$, vagyis a válasz: 169. (2 pont)
A $181^{194} \equiv 1 \pmod{168}$ kongruenciát beláthatjuk az Euler-Fermat tétel egy újabb alkalmazásával is (de ettől még az ezért járó pontszám változatlanul 2.)

3. Legyen $n = 20181210$. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg $45n + 12$ és $35n + 9$ legnagyobb közös osztóját.

* * * * *

Az euklideszi algoritmust alkalmazzuk.
$(45n + 12)$-t $(35n + 9)$-cel maradékosan osztva: $45n + 9 = 1 \cdot (35n + 9) + 10n + 3$. (2 pont)
$(35n + 9)$-et $(10n + 3)$-mal maradékosan osztva: $35n + 9 = 3 \cdot (10n + 3) + 5n$. (2 pont)
$(10n + 3)$-at $5n$-nel maradékosan osztva: $10n + 3 = 2 \cdot (5n) + 3$. (1 pont)
Mivel n számjegyeinek összege 15, vagyis 3-mal osztható, ezért n is, valamint $5n$ is 3-mal osztható.
Így $5n$-et 3-mal osztva a maradék 0. (3 pont)
Így a legnagyobb közös osztó (az utolsó nemnulla maradék, vagyis) 3. (2 pont)

4. Álljon a V halmaz azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból, amelyekben a négy koordináta szorzata nagyobb vagy egyenlő 0-nál. Döntsük el, hogy V alteret alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben.

* * * * *

Az $\underline{u} = (1, 0, 0, 0)^T$ és $\underline{v} = (0, -1, 1, 1)^T$ vektorok V-beliek, mert $\underline{u}$ és $\underline{v}$ koordinátáinak szorzata is 0.
Azonban az $\underline{u} + \underline{v} = (1, -1, 1, 1)$ vektor nem V-beli, mert a koordináták szorzata (-1). (6 pont)
Mivel $\underline{u}, \underline{v} \in V$, de $\underline{u} + \underline{v} \notin V$, ezért az altér definíciója sérül, vagyis V nem altér. (4 pont)
Noha ez közvetlenül nem járul hozzá egy helyes megoldáshoz, ha valaki (hiánytalanul) megmutatja, hogy $\underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \cdot \underline{v} \in V$ is teljesül, akkor ezért 3 pontot kaphat; ha pedig a megoldásban nyoma van annak, hogy az összegre való zártságot is elkezdi vizsgálni (és nem csak felírja), akkor ezért további 1 pont adható.

5. A $W \leq \mathbb{R}^6$ altér álljon azokból az $\mathbb{R}^6$-beli vektorokból, amelyeknek a páratlan sorszámú koordinátái fölülről lefelé haladva 2 kvóciensű, a páros sorszámú koordinátái pedig fölülről lefelé haladva 3 kvóciensű mértani sorozatot alkotnak. (Így például a jobbra látható vektor W-beli.) Határozzuk meg a W altér dimenzióját. (Azt nem szükséges bebizonyítani egy teljes értékű megoldáshoz, hogy W valóban altér.) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 15 \\ 12 \\ 45 \end{pmatrix}$

* * * * *

Ha egy $\underline{w} \in W$ első két koordinátája α és β, akkor a feladat szövegéből $\underline{w} = (\alpha, \beta, 2\alpha, 3\beta, 4\alpha, 9\beta)^T$.
Ezért minden $\underline{w} \in W$ felírható így: $\underline{w} = \alpha \cdot (1, 0, 2, 0, 4, 0)^T + \beta \cdot (0, 1, 0, 3, 0, 9)^T$. (2 pont)
Ez tehát azt jelenti, hogy a $\underline{b}_1 = (1, 0, 2, 0, 4, 0)^T$ és $\underline{b}_2 = (0, 1, 0, 3, 0, 9)^T$ vektorok generátorrendszert alkotnak W-ben. (2 pont)
Másrészt $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ lineárisan független rendszer, mert egyik vektor sem skalárszorosa a másiknak. (2 pont)
Így $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ bázis W-ben, (2 pont)
vagyis $\dim W = 2$. (2 pont)

6*. Határozzuk meg az $A(1; 5; 2)$, $B(2; 7; 4)$ és $C(2; 9; 10)$ pontok által meghatározott háromszög A csúcsán átmenő (belső) szögfelezőjének az egyenletrendszerét.

* * * * *

A megoldásban az egyes pontokba mutató helyvektorokat mindig a megfelelő kisbetűvel jelöljük.
$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (1, 2, 2)$ és $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a} = (1, 4, 8)$, (1 pont)
amiből a Pitagorasz-tétel miatt $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$ és $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = 9$. (1 pont)
Jelöje a háromszög AC oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontját H. Ekkor az ABH háromszög egyenlő szárú, mert $|\overrightarrow{AB}| = 3$ és $|\overrightarrow{AH}| = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$. Így az ABC háromszög A csúcsán átmenő belső szögfelezője átmegy a B és H pontok F felezőpontján is. (4 pont)
$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ és így $\underline{h} = \underline{a} + \overrightarrow{AH} = (\frac{4}{3}, \frac{19}{3}, \frac{14}{3})$. (1 pont)
$\underline{f} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{h}) = (\frac{5}{3}, \frac{20}{3}, \frac{13}{3})$, (1 pont)
így az $\overrightarrow{AF} = \underline{f} - \underline{a} = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3})$, illetve ennek a 3-szorosa, a $\underline{v} = (2, 5, 7)$ vektor irányvektora a keresett szögfelezőnek. (1 pont)
Ennek az egyenletrendszere tehát A-ból és $\underline{v}$-ből felírható: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-2}{7}$. (1 pont)
A szögfelező egyenletrendszere megadható paraméteres alakban is. A feladat megoldható a szögfelezőtétel használatával is: mivel az A-n átmenő belső szögfelező a BC oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, ezért átmegy a BC oldal B-hez közelebbi negyedelőpontján (az $N(2, \frac{15}{2}, \frac{11}{2})$ ponton).

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

1. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 17x_2 - 19x_3 &= 28 \\ 2x_1 + 11x_2 - 12x_3 &= p + 34 \\ 7x_1 + 26x_2 + p \cdot x_3 &= p + 15 \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 17 & -19 & 28 \\ 2 & 11 & -12 & p+34 \\ 7 & 26 & p & p+15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 25 \\ 0 & 3 & -6 & p+32 \\ 0 & -2 & p+21 & p+8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & p+17 \\ 0 & 0 & p+17 & p+18 \end{array}\right) \quad \text{(3 pont)}$$

Ha $p \neq -17$, akkor a harmadik sor „tilos sor”, így az egyenletrendszernek nincs megoldása. (2 pont)
Ha viszont $p = -17$, akkor a negyedik sor „tilos sor”, így ekkor sincs megoldás. (3 pont)
Így az egyenletrendszernek semmilyen p esetén sincs megoldása. (2 pont)
A számolási hibák darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha egy elszámolás után a megoldó helyes következtetéseket von le a hibás alakból, akkor a fenti pontszámok közül az első 2 pont akkor adható meg, ha a hibás alakban is keletkezik „tilos sor” és ebből a megoldó a helyes következtetést vonja le; az utána következő 3 pont pedig megadható az elszámolt alakból fakadó (egyértelmű) megoldás helyes meghatározásáért.

2. Az 6×6-os A mátrix főátlójában és alatta minden elem 1-es, a jobb felső sarkában álló elem 2018, a mátrix összes többi (14 darab) eleme pedig 0. Határozzuk meg A determinánsát.

* * * * *

Vonjuk ki a hatodik sorból az ötödiket. Ekkor a hatodik sor (0 0 0 0 0 1)-re változik. (2 pont)
Most vonjuk ki az első sorból a (megváltozott) hatodik sor 2018-szorosát. Ekkor az első sor (1 0 0 0 0 0)-ra változik. (3 pont)
A keletkezett mátrix alsóháromszög-mátrix, amelynek a főátlójában minden elem 1-es, így a determinánsa 1. (2 pont)
Mivel a megtett lépések a determináns értékét nem változtatták, ezért $\det A = 1$. (3 pont)
A feladat megoldható a Gauss-elimináció pontos követésével is (több lépésben), valamint a kifejtési tételt használva is (az első sor vagy az utolsó oszlop szerint), illetve számos más úton is. Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 5 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását, vagy ha a kifejtési tételben nem (jól) veszi figyelembe az előjeleket. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Arányos részpontszám jár minden, a determináns kiszámításának irányába mutató, hasznos lépésért.

3. Számítsuk ki az A^{2018} mátrixot az alábbi A mátrixra. (A^{2018} azt a 2018 tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.)

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrixszorzás definíciója szerint A^2-et kiszámítva: $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. (2 pont)
Látható, hogy $A^2 = -A$. (1 pont)
Ebből $A^3 = A^2 \cdot A = (-A) \cdot A = -A^2 = -(-A) = A$. (1 pont)
Innen már sejthető, hogy A-nak a páros kitevőjű hatványai $(-A)$-val, a páratlan kitevőjű hatványai pedig A-val egyenlők. (1 pont)
Így $A^{2018} = -A$. (1 pont)
Az A hatványaira vonatkozó fenti állítást precízen teljes indukcióval láthatjuk be. $n = 1$-re az állítás nyilván igaz. Ha pedig valamely n-re már teljesül, hogy $A^n = (-1)^{n+1} \cdot A$, akkor A-val szorzás után az $A^{n+1} = A^n \cdot A = ((-1)^{n+1} \cdot A) \cdot A = (-1)^{n+1} \cdot A^2 = (-1)^{n+1} \cdot (-A) = (-1)^{n+2} \cdot A$, vagyis az állítás $(n+1)$-re is teljesül. (4 pont)
A pontozás úgy értendő, hogy ha a megoldó A^2 és A^3 kiszámítása után minden magyarázat nélkül közli A^{2018} értékét, arra 5 pontot kaphat. Ha megfogalmazza az A^n-re vonatkozó általános állítást, arra további 1-et. Ha pedig a megoldás legalább részben meggyőzően indokolja, hogy az A^n-re vonatkozó állítás igaz, akkor ezért már további 2 pont adható (a precíz indoklásért járó 4-ből).

4. Határozzuk meg az alábbi A és B mátrixok hiányzó, betűkkel jelölt elemeit, ha tudjuk, hogy $B = A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & p \\ q & 5 & r \\ s & -26 & 27 \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az $A \cdot B$ szorzatmátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet jelölje $c_{i,j}$.
$B = A^{-1}$ miatt $A \cdot B = E$, (2 pont)
ezért $c_{1,1} = 1$, amiből $5 \cdot 1 + 2q = 1$, így $q = -2$. (1 pont)
Hasonlóan: $c_{2,2} = 1$, amiből $(-1) \cdot (-2) + 5x - 26 = 1$, így $x = 5$. (1 pont)
$c_{2,1} = 0$, amiből $(-1)1 + x \cdot q + s = 0$. Felhasználva x és q értékét: $s = 1 - xq = 11$. (2 pont)
$c_{3,1} = c_{3,2} = 0$, amiből $y - 2z + 11 = 0$ és $-2y + 5z - 26 = 0$. Megoldva az egyenletrendszert: $y = -3$ és $z = 4$. (2 pont)
Végül $c_{1,3} = c_{2,3} = 0$ miatt $5p + 2r = 0$ és $-p + 5r + 27 = 0$, amiből $p = 2$ és $r = -5$. (2 pont)

5. Az 5×10-es A mátrixról tudjuk, hogy elhagyható belőle egy alkalmasan választott sor és oszlop úgy, hogy a kapott 4×9-es mátrix rangja azonos legyen A rangjával. Azt is tudjuk továbbá, hogy bárhogyan hagyunk el A-ból két sort és két oszlopot, a kapott 3×8-as mátrix rangja már különbözik A rangjától. Határozzuk meg A rangját.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Mivel $r(A)$ egyenlő egy 4×9-es mátrix rangjával, ezért (a sorrang definíciója miatt) $r(A) \leq 4$.(3 pont)
Legyen M (a determinánsrang definíciója szerint) egy $r(A) \times r(A)$ méretű, nemnulla determinánsú részmátrix A-ban. (2 pont)
Ha $r(A) \leq 3$ volna, akkor az M-be nem tartozó sorok és oszlopok közül elhagyhatnánk kettőt-kettőt. Az így kapott A' mátrixnak M továbbra is részmátrixa volna, így $r(A') = r(A)$ volna. Mivel ez ellentmondana a feladat szövegének, ezért $r(A) \geq 4$. (4 pont)
Megmutattuk, hogy $r(A) \leq 4$ és $r(A) \geq 4$, így $r(A) = 4$. (1 pont)

6*. Az $n \times n$-es A és B mátrixokra teljesül, hogy $B \neq 0$ és $A \cdot B = B$. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $n \times n$-es C mátrix, amelyre $C \neq 0$ és $A^T \cdot C = C$.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

$AB = B$ miatt $AB - B = 0$, amiből (a mátrixszorzás tulajdonságai miatt) $(A - E)B = 0$. (1 pont)
Ha $\det(A - E) \neq 0$ volna, akkor $(A - E)$-nek volna inverze. Ekkor mindkét oldalt balról $(A - E)^{-1}$-zel szorozva: $(A - E)^{-1}(A - E)B = (A - E)^{-1} \cdot 0$, amiből $B = EB = 0$ következne, szemben a feladat állításával. Így tehát $\det(A - E) = 0$. (2 pont)
Ebből a transzponált determinánsára vonatkozó, tanult tétel miatt $\det(A - E)^T = 0$. (2 pont)
A transzponált és az egységmátrix definíciójából azonnal adódik, hogy $(A - E)^T = A^T - E$.(1 pont)
$\det(A^T - E) = 0$-ból a tanult tétel szerint következik, hogy $A^T - E$ oszlopai lineárisan összefüggők, vagyis létezik olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre $(A^T - E) \cdot \underline{x} = \underline{0}$. (1 pont)
Legyen most C az az $n \times n$-es mátrix, amelynek minden oszlopa $\underline{x}$. Ekkor $\underline{x} \neq \underline{0}$ miatt $C \neq 0$ és $(A^T - E) \cdot \underline{x} = \underline{0}$ miatt $(A^T - E) \cdot C = 0$. (2 pont)
Ebből $A^T \cdot C - C = 0$, vagyis $A^T \cdot C = C$ valóban teljesül. (1 pont)