Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2015. október 22.

1. Határozzuk meg az $x-4=\frac{y+5}{4}=\frac{2-z}{3}$ egyenletrendszerű e egyenes minden olyan P pontját, amelyre a P-t a $Q(7;12;4)$ ponttal összekötő f egyenes merőleges e-re.

2. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok. Tegyük fel, hogy $\underline{w} \neq \underline{0}$ és a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_i + \lambda \cdot \underline{w}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_k$ vektorrendszer lineárisan független a $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár és az $1 \leq i \leq k$ egész bármely megválasztása esetén. Következik-e ebből, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}$ rendszer is lineárisan független?

3. Álljon a $V \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból az $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ oszlopvektorokból, amelyekre fennállnak az $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ és a $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$ egyenletek (ahol x_i az $\underline{x}$ vektor i-edik koordinátáját jelöli minden $i = 1,2,3,4$ esetén). Határozzuk meg a V altér dimenzióját. (A feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges megmutatni, hogy V valóban altér.)

4. Találtunk egy lapot, amin valaki a (lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló) Gauss-eliminációt gyakorolta. A papír sajnos erősen megrongálódott, ezért csak a kiinduló feladat részletei és a néhány lépés után kapott lépcsős alak olvasható:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \square & 6 & \square & \square & \square \\ 2 & 4 & -4 & 7 & \square \\ 5 & 10 & \square & \square & -4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A kiinduló feladatban a $\square$-val jelölt számok olvashatatlanok. (Ezek persze egymástól különböző értékek is lehetnek.) Rekonstruáljuk a lap elveszett részeit: adjuk meg a $\square$-kban álló értékeket, majd futtassuk le a Gauss-eliminációt és adjuk meg az egyenletrendszer megoldásait.
(Feltételezhetjük, hogy a lap tulajdonosa helyesen ismerte a Gauss-elimináció tanult algoritmusát és számolási hibát sem ejtett. Egy teljes értékű megoldásnak természetesen része annak az indoklása is, hogy a $\square$-k helyes kitöltésére miért nincs más lehetőség.)

5. Számítsuk ki az alábbi determinánst a p valós paraméter minden értékére.

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 5 & p \\ 6 & p & 4 & 0 \\ 7 & 2 & p & 0 \\ 6 & p & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

6. a) Számítsuk ki az A^{2015} mátrixot az alábbi A mátrixra.
b) Számítsuk ki $\det\left(B^{2015}\right)$ értékét az alábbi B mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(X^{2015} azt a 2015 tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője X.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.
Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2015. november 26.

1. Határozzuk meg az alábbi A mátrix inverzének bal felső sarkában álló elemét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. A 6×10-es A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 3$. Igaz-e mindig, hogy A-nak elhagyható egy sora és egy oszlopa úgy, hogy a kapott 5×9-es B mátrixra $\mathrm{r}(B) = 3$ teljesüljön?

3. A 6×10-es A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 3$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_7 \in \mathbb{R}^{10}$ vektorok, amelyekre $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_7$ lineárisan független rendszert alkot és $A \cdot \underline{v}_1 = \underline{0}$, $A \cdot \underline{v}_2 = \underline{0}$, …, $A \cdot \underline{v}_7 = \underline{0}$ teljesül.

4. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció $B = \{\underline{b}_1 = (1; 1; 0),\ \underline{b}_2 = (2; 0; 3),\ \underline{b}_3 = (0; 1; -2)\}$ bázis szerinti mátrixa az alábbi. Az $\mathbb{R}^3$ melyik elemét rendeli f a $2\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + 3\underline{b}_3$ vektorhoz?

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Adjuk meg a p paraméter értékét és az alábbi A mátrix egy sajátvektorát, ha tudjuk, hogy az 5 sajátértéke A-nak.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & p \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Milyen maradékot adhat az n egész szám 142-vel osztva, ha $20n+4$ és $72n-12$ azonos maradékot ad 142-vel osztva?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2015. december 7.

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $Q(9; -2; 5)$ ponton és a p valós paraméter minden értéke esetén merőleges a $7x - 2y + p \cdot z = 4$ egyenletű síkra.

2. Legyen $F = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k\}$ lineárisan független rendszer, $G = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \ldots, \underline{g}_m\}$ pedig generátorrendszer a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. Mutassuk meg, hogy F kiegészíthető néhány (esetleg nulla) G-beli vektorral úgy, hogy ezáltal V egy bázisát kapjuk.

3. A W halmaz álljon azokból a $\underline{v} \in \mathbb{R}^5$ vektorokból, amelyekre teljesül, hogy $\underline{v}$ bármely két koordinátájának a különbsége egész szám. Döntsük el, hogy W alteret alkot-e $\mathbb{R}^5$-ben és ha igen, akkor határozzuk meg a dimenzióját.

4. Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 14x_3 &= -17 \\ 2x_1 - 6x_2 - 28x_3 + p \cdot x_4 &= q - 34 \\ 3x_1 - 7x_2 - 36x_3 + 4p \cdot x_4 &= 4q - 37 \end{aligned}$$

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

6. Az 5×3-as A mátrixra teljesül, hogy az $A \cdot A^T$ mátrix bal alsó sarkában álló elem 2015. Mi állhat az $A \cdot A^T$ mátrix jobb felső sarkában?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2015. december 7.

1. Határozzuk meg az A és a B mátrixokat, ha az A^{-1} és az $A \cdot B$ mátrixok az alábbiak.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. A 6×10-es A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 3$. Igaz-e mindig, hogy A-nak elhagyható egy sora és egy oszlopa úgy, hogy a kapott 5×9-es B mátrixra $\mathrm{r}(B) = 2$ teljesüljön?

3. A $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ függvény rendelje minden $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz a $(2x_1, 2x_2, 2x_3, 0) \in \mathbb{R}^4$ vektort. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ egy bázis $\mathbb{R}^3$-ben és tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezésre $f(\underline{b}_1) = g(\underline{b}_1)$, $f(\underline{b}_2) = g(\underline{b}_2)$ és $f(\underline{b}_3) = g(\underline{b}_3)$ teljesül. Írjuk fel f-nek az $[f]$ mátrixát.

4. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben. Legyen az f mátrixa a B bázis szerint az alábbi mátrix:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások.

a) $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 \in \operatorname{Ker} f$ b) $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 \in \operatorname{Im} f$

5. Adjuk meg a p paraméter értékét és az alábbi A mátrix összes sajátértékét, ha tudjuk, hogy az alábbi $\underline{v}$ vektor sajátvektora A-nak.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & p \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6. Az n pozitív egész 6247-szeresének az utolsó három számjegye 713. Mi lehet az n utolsó két számjegye?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2015. december 18.

1. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli vektorrendszerek generált alterét. Amennyiben ez az altér egyenes vagy sík, adjuk meg az egyenlet(rendszer)ét.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$

2. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ $\mathbb{R}^4$-beli vektorok. Tegyük fel, hogy bármely k, ℓ és m egész számokra, amelyek nem mindegyike 0, a $k \cdot \underline{a} + \ell \cdot \underline{b} + m \cdot \underline{c}$ lineáris kombináció értéke különbözik a $\underline{0}$-tól. Következik-e ebből, hogy $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független rendszer?

3. A V halmaz álljon azokból az $\mathbb{R}^5$-beli vektorokból, amelyekre teljesül, hogy minden koordinátájukhoz egy alkalmasan választott, közös értéket adva egy olyan oszlopvektort kaphatunk, amelynek a koordinátái (fölülről lefelé haladva) 2 kvóciensű mértani sorozatot alkotnak. (Így például a jobbra látható vektor V-beli, mert minden koordinátájához 3-at adva 2 kvóciensű mértani sorozatot kapunk.) Döntsük el, hogy V alteret alkot-e $\mathbb{R}^5$-ben és ha igen, akkor határozzuk meg a dimenzióját.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 17 \\ 37 \\ 77 \end{pmatrix}$$

4. Egy négy változós lineáris egyenletrendszerből bárhogyan is hagyunk el egy egyenletetet, a kapott egyenletrendszer egyértelműen megoldható lesz. Legkevesebb hány egyenletet kell tartalmazzon az (eredeti) egyenletrendszer?

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 11 & -7 \\ -3 & 9 & -5 & -9 & 5 \\ 4 & -12 & 8 & 13 & -2 \\ 5 & -11 & 10 & -1 & -12 \end{vmatrix}$$

6. Számítsuk ki az A^{101} mátrixot (vagyis annak a 101 tényezős szorzatnak az értékét, amelynek minden tényezője A) az alábbi A mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2015. december 18.

1. Tegyük fel, hogy a 3×3-as A mátrix inverze létezik és A-nak és A^{-1}-nek is minden eleme egész szám. Milyen értékeket vehet fel az A determinánsa?

2. Milyen értékeket vehet föl az alábbi mátrix rangja (ahol p és q valós paraméterek)?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & p \\ 3 & 4 & q & 2 \end{pmatrix}$$

3. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezésre teljesül, hogy az $\underline{x}$-hez és $(-\underline{x})$-hez ugyanazt a vektort rendeli minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ esetén. Írjuk fel f-nek az $[f]$ mátrixát.

4. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$, valamint $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ két különböző bázis $\mathbb{R}^2$-ben. Legyen az f mátrixa a B bázis szerint az alábbi mátrix:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Írjuk fel az f-nek a C bázis szerinti $[f]_C$ mátrixát ha tudjuk, hogy $\underline{c}_1 = \underline{b}_1 + \underline{b}_2$ és $\underline{c}_2 = \underline{b}_1 - \underline{b}_2$.

5. Az alábbi A mátrix $\square$-val jelölt elemeit nem ismerjük, de azt tudjuk, hogy A-nak a 3 sajátértéke. Adjuk meg A-nak egy másik (3-tól különböző) sajátértékét is.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \square \\ \square & 6 \end{pmatrix}$$

6. A 2×2015-ös A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem legyen a $62 \cdot i \cdot j$ szám 2015-ös maradéka minden $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 2015$ esetén. Van-e A-nak olyan oszlopa, amelyben az első elem éppen 1-gyel kisebb a másodiknál? Ha igen, akkor milyen sorszámú oszlopokra teljesül ez?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2015. október 22.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Határozzuk meg az $x-4=\frac{y+5}{4}=\frac{2-z}{3}$ egyenletrendszerű e egyenes minden olyan P pontját, amelyre a P-t a $Q(7;12;4)$ ponttal összekötő f egyenes merőleges e-re.

* * * * *

Első megoldás. A PQ egyenes akkor és csak akkor merőleges e-re, ha P rajta van azon az S síkon, amely Q-t tartalmazza és a normálvektora azonos e irányvektorával. P-t tehát e és S metszéspontjaként kereshetjük. (2 pont)
e egyenletrendszeréből kiolvasható egy irányvektora: $\underline{v}_e=(1;4;-3)$. (2 pont)
A $\underline{v}_e$ normálvektorú, Q-n átmenő S sík egyenlete: $x+4y-3z=1\cdot 7+4\cdot 12-3\cdot 4=43$. (2 pont)
$S\cap e$ meghatározásához tehát megoldjuk az e egyenletrendszeréből és S egyenletéből álló egyenletrendszert. (1 pont)
e egyenletrendszeréből $y=4x-21$, $z=14-3x$. Ezekből az $x+4\cdot(4x-21)-3(14-3x)=43$ egyenletet kapjuk S egyenletébe való helyettesítés után. Ebből $x=\frac{13}{2}$, így $y=5$ és $z=-\frac{11}{2}$. (2 pont)
A keresett P pont tehát csak a $P(\frac{13}{2};5;-\frac{11}{2})$ lehet. (1 pont)

* * * * *

Második megoldás. Az e egyenes $\underline{v}_e=(1;4;-3)$ irányvektora és $R(4;-5;2)$ pontja kiolvasható az egyenletrendszeréből. (2 pont)
Ebből felírható e paraméteres egyenletrendszere: $x=4+t$, $y=-5+4t$, $z=2-3t$, ahol $t\in\mathbb{R}$. (1 pont)
Rögzített t-re az így kapott $P_t\in e$ pontból a Q-ba mutató vektort a megfelelő helyvektorok különbségeként kaphatjuk: $\overrightarrow{P_tQ}=\big(7-(4+t);12-(-5+4t);4-(2-3t)\big)=(3-t;17-4t;2+3t)$. (2 pont)
Az $f=P_tQ$ egyenes pontosan akkor merőleges e-re, ha $\overrightarrow{P_tQ}$ merőleges $\underline{v}_e$-re. Ez pedig pontosan akkor igaz, ha $\overrightarrow{P_tQ}\cdot\underline{v}_e=0$. (2 pont)
Meghatározva a skaláris szorzatot: $\overrightarrow{P_tQ}\cdot\underline{v}_e=1\cdot(3-t)+4\cdot(17-4t)-3\cdot(2+3t)=65-26t$. (1 pont)
Így $\overrightarrow{P_tQ}\cdot\underline{v}_e=0$ a $t=\frac{5}{2}$ értékre teljesül. Ezt P_t koordinátáiba helyettesítve kapjuk, hogy a $P(\frac{13}{2};5;-\frac{11}{2})$ az e egyetlen megfelelő pontja. (2 pont)

2. Legyenek $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k,\underline{w}\in\mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok. Tegyük fel, hogy $\underline{w}\neq\underline{0}$ és a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_i+\lambda\cdot\underline{w},\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_k$ vektorrendszer lineárisan független a $\lambda\in\mathbb{R}$ skalár és az $1\le i\le k$ egész bármely megválasztása esetén. Következik-e ebből, hogy a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k,\underline{w}$ rendszer is lineárisan független?

* * * * *

A válasz igen, a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}$ rendszer lineárisan független.
A $\lambda = 0$ (és tetszőleges $1 \leq i \leq k$) választással kapjuk, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ lineárisan független.(1 pont)
Ezért indirekt feltéve, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}$ lineárisan összefüggő, az „újonnan érkező vektor" lemmájából kapjuk, hogy létezik a $\underline{w} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{v}_k$ lineáris kombináció. (2 pont)
$\underline{w} \neq \underline{0}$ miatt az α_i együtthatók között kell legyen 0-tól különböző. Mivel a $\underline{v}_i$-k számozása tetszőleges, az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $\alpha_1 \neq 0$. (2 pont)
Így a $\underline{w}$-t kifejező lineáris kombináció átrendezésével az $\alpha_1(\underline{v}_1 - \frac{1}{\alpha_1}\underline{w}) + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{v}_k = \underline{0}$ alakot kapjuk. (2 pont)
Ez az $i = 1$ és $\lambda = -\frac{1}{\alpha_1}$ választással ellentmond a feladatban írt feltételnek (a lineáris függetlenség ekvivalens definíciója szerint), mert a fenti $\underline{0}$-t adó lineáris kombináció $\alpha_1 \neq 0$ miatt nem triviális. Ez az ellentmondás tehát bizonyítja a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}$ rendszer lineáris függetlenségét. (3 pont)

3. Álljon a $V \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból az $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ oszlopvektorokból, amelyekre fennállnak az $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ és a $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$ egyenletek (ahol x_i az $\underline{x}$ vektor i-edik koordinátáját jelöli minden $i = 1, 2, 3, 4$ esetén). Határozzuk meg a V altér dimenzióját. (A feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges megmutatni, hogy V valóban altér.)

* * * * *

Legyen $\underline{b}_1 = (1, 0, -1, -3)^T$ és $\underline{b}_2 = (0, 1, 1, -2)^T$. Ekkor $\underline{b}_1, \underline{b}_2 \in V$, mert a vektorok koordinátái kielégítik a feladatbeli egyenleteket. (1 pont)
$\underline{b}_1, \underline{b}_2$ nyilván lineárisan független, mert a két vektor közül egyik sem skalárszorosa a másiknak.(2 pont)
Megmutatjuk, hogy $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ generátorrendszer V-ben.
Legyen $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in V$ egy tetszőleges V-beli vektor. Ekkor a V-t leíró egyenletekből $x_3 = -x_1 + x_2$ és $x_4 = -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3x_1 - 2x_2$ adódik. (2 pont)
A $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ egy tetszőleges lineáris kombinációját véve: $\lambda\underline{b}_1 + \mu\underline{b}_2 = (\lambda, \mu, -\lambda + \mu, -3\lambda - 2\mu)$. (1 pont)
Ebből következik, hogy a fenti lineáris kombinációban a $\lambda = x_1$ és $\mu = x_2$ választással épp $\underline{v}$-t kapjuk.
Így $\langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle = V$ valóban igaz. (2 pont)
Megmutattuk, hogy $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ lineárisan független és generátorrendszer V-ben. Következésképp $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ bázis V-ben, így $\dim V = 2$. (2 pont)

4. Találtunk egy lapot, amin valaki a (lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló) Gauss-eliminációt gyakorolta. A papír sajnos erősen megrongálódott, ezért csak a kiinduló feladat részletei és a néhány lépés után kapott lépcsős alak olvasható:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \square & 6 & \square & \square & \square \\ 2 & 4 & -4 & 7 & \square \\ 5 & 10 & \square & \square & -4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A kiinduló feladatban a $\square$-val jelölt számok olvashatatlanok. (Ezek persze egymástól különböző értékek is lehetnek.) Rekonstruáljuk a lap elveszett részeit: adjuk meg a $\square$-kban álló értékeket, majd futtassuk le a Gauss-eliminációt és adjuk meg az egyenletrendszer megoldásait.
(Feltételezhetjük, hogy a lap tulajdonosa helyesen ismerte a Gauss-elimináció tanult algoritmusát és számolási hibát sem ejtett. Egy teljes értékű megoldásnak természetesen része annak az indoklása is, hogy a $\square$-k helyes kitöltésére miért nincs más lehetőség.)

* * * * *

Ha a kiinduló feladatban a bal felső sarokban 0 állna, akkor az algoritmus először felcserélné az első sort a másodikkal (illetve esetleg a harmadikkal), majd az új első sort leosztaná 2-vel (illetve 5-tel). Ez azonban lehetetlen: az így kapott első soron az eljárás a lépcsős alak eléréséig már nem változtatna, így a lépcsős alak első sorában a negyedik helyen $\frac{7}{2}$ (illetve az ötödik helyen $-\frac{4}{5}$) állna. (1 pont)
Ebből következik, hogy a lépcsős alak első sora az eredeti első sor skalárral szorzásából keletkezik. Újra felhasználva, hogy az a lépcsős alak eléréséig már nem változhat és a második helyen álló 6-ost a lépcsős alak megfelelő helyén álló 2-essel összevetve kapjuk, hogy az eljárás az első sort 3-mal osztotta. Következik, hogy az első sor kezdetben $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -6 & 3 & -9 \end{array}\right)$ kellett legyen. (2 pont)

A kiinduló feladatbeli további három ismeretlen értéket a p, q, illetve r paraméterekkel jelölve végrehajtjuk a Gauss-eliminációt (annak a lépcsős alakig tartó első fázisát):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -6 & 3 & -9 \\ 2 & 4 & -4 & 7 & p \\ 5 & 10 & q & r & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & p+6 \\ 0 & 0 & q+10 & r-5 & 11 \end{array}\right) \sim \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha itt $q+10=0$ volna, akkor az eljárás a harmadik oszlopban nem hozna létre vezéregyest, a második sorban maradva tovább lépne a negyedik oszlopba. Mivel azonban a lépcsős alak tartalmaz a harmadik oszlopban vezéregyest, $q+10 \neq 0$. (1 pont)

Ezért az eljárás sorcserével, majd a második sor $(q+10)$-zel való, végül a harmadik sor 5-tel való osztásával folytatódik:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & q+10 & r-5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & p+6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{r-5}{q+10} & \frac{11}{q+10} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & p+6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{r-5}{q+10} & \frac{11}{q+10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{p+6}{5} \end{array}\right) \text{(2 pont)}$$

Ezzel megkaptuk a lépcsős alakot, amit a feladatban megadottal összevetve a $\frac{p+6}{5} = 2$, $\frac{11}{q+10} = 11$, illetve az $\frac{r-5}{q+10} = -1$ egyenleteket kapjuk. Ezekből sorban $p = 4$, $q = -9$, illetve $r = 4$ adódik.(1 pont)

A Gauss-eliminációt tehát a lépcsős alak eléréséig (a p, q és r kapott értékeinek behelyettesítése után) már lefuttattuk, onnan pedig a redukált lépcsős alakig a három darab, vezéregyes fölötti nemnulla érték nullává változtatásával vezet az út:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

A redukált lépcsős alakból kiolvasva az egyenletrendszer megoldásait: $x_2 = \alpha \in \mathbb{R}$ szabad paraméter, $x_4 = 2$, $x_3 = 13$ és $x_1 = 21 - 2\alpha$. (1 pont)

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A lépcsős alaktól a redukált lépcsős alakig tartó eliminációért, illetve az egyenletrendszer megoldásainak megadásárt járó pontszám természetesen akkor is megadható, ha a megoldás első fele részben vagy teljesen hiányzik. (Az útmutató elején írtaknak megfelelően viszont a lépcsős alakig vezető eliminációért járó pontszám nem adható meg akkor, ha a megoldó ötletszerűen, vagy minden követhető gondolatmenet híján tölti ki a hiányzó értékeket.) A fenti megoldásban p-vel jelölt hiányzó érték megkapható a következő gondolatmenettel is: a lépcsős alakból azonnal kiolvasható, hogy $x_4 = 2$, $x_3 = 13$, $x_2 = 0$ és $x_1 = 21$ megoldása az egyenletrendszernek; ezt behelyettesítve az eredeti feladat második egyenletébe $p = 4$ adódik. Ha egy megoldó ezen az úton csak p értékét tudja meghatározni, akkor ezért a fenti pontozás szerint a p, q és r meghatározásáért járó, összesen 5 pontból 2 adható.

5. Számítsuk ki az alábbi determinánst a p valós paraméter minden értékére.

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 5 & p \\ 6 & p & 4 & 0 \\ 7 & 2 & p & 0 \\ 6 & p & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Jelöljük a determináns keresett értékét D-vel. A kifejtési tételt az utolsó oszlopra alkalmazva:

$$D = -p \cdot \begin{vmatrix} 6 & p & 4 \\ 7 & 2 & p \\ 6 & p & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} p & 0 & 5 \\ 6 & p & 4 \\ 7 & 2 & p \end{vmatrix} \qquad \text{(3 pont)}$$

(Itt a 0-val szorzott tagokat már elhagytuk.) Az első, $(-p)$-vel szorzott determináns két sora azonos, így az értéke 0 (hiszen az egyikből a másik sort kivonva csupa 0 sort kapnánk). (2 pont)

A második, 3-mal szorzott determinánsra ismét a kifejtési tételt alkalmazzuk, most az első sora szerint:

$$D = 3 \cdot \left(p \cdot \begin{vmatrix} p & 4 \\ 2 & p \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & p \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \right) \qquad \text{(3 pont)}$$

Ebből a (2×2)-es determinánsok kiszámítására vonatkozó ismert szabállyal fejezhetjük be a megoldást:

$$D = 3 \cdot (p \cdot (p^2 - 8) + 5 \cdot (12 - 7p)) = 3p^3 - 129p + 180 \qquad \text{(2 pont)}$$

Természetesen a determináns értéke sok más úton is megkapható. Alkalmazható a Gauss-elimináció is, de paramétert tartalmazó kifejezéssel leosztva meg kell különböztetni azt az esetet, amikor annak az értéke 0. Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyenek például: a kifejtési tételben a sakktáblaszabályból származó előjel elhagyása, vagy helytelen megállapítása; paramétert tartalmazó kifejezéssel való osztás a szükséges esetvizsgálat nélkül; egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után a determináns értékváltozásának figyelmen kívül hagyása vagy hibás követése. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Ha egy megoldó a determináns definíciójának alkalmazásával kísérletezik, akkor minden szorzat (helyes) kiszámítása és előjelezése darabonként 1-1 pontot ér (de több különböző megoldási kísérlet esetén nyilván legföljebb csak az egyikre adható pont).

6. a) Számítsuk ki az A^{2015} mátrixot az alábbi A mátrixra.
b) Számítsuk ki $\det\left(B^{2015}\right)$ értékét az alábbi B mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(X^{2015} azt a 2015 tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője X.)

* * * * *

a) Az A^2 mátrixot a mátrixszorzás definíciója szerint meghatározva:

$$\begin{array}{rcl} & & \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = A \\ A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^2 \end{array} \qquad \text{(2 pont)}$$

Mivel $A^2 = -E$, ezért $A^3 = A^2 \cdot A = (-E) \cdot A = -A$. Hasonlóan: $A^4 = A^3 \cdot A = (-A) \cdot A = -A^2 = E$, $A^5 = A^4 \cdot A = E \cdot A = A$ és A hatványai innen nyilván ciklikusan ismétlődnek. (2 pont)
Mivel a 2015 4-gyel osztva 3 maradékot ad, ezért $A^{2015} = A^3 = -A$, (1 pont)
vagyis $A^{2015} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. (1 pont)

b) $\det B = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = -1$ a (2×2)-es determinánsokra vonatkozó szabály szerint. (1 pont)
A determinánsok szorzástételéből következik, hogy $\det\left(B^{2015}\right) = \left(\det B\right)^{2015}$. (2 pont)
Így $\det\left(B^{2015}\right) = (-1)^{2015} = -1$. (1 pont)

Az a) feladatban elfogadható az $A^{2015} = (A^2)^{1007} \cdot A = (-E)^{1007} \cdot A = (-E) \cdot A = -A$ számítás is (akkor is, ha a megoldó az $(A^n)^m = A^{n \cdot m}$ azonosságot indoklás nélkül használja fel). A b) feladatban sem elvárás, hogy a megoldó a $\det\left(B^{2015}\right) = \left(\det B\right)^{2015}$ állítást a determinánsok szorzástételére való hivatkozásnál részletesebben indokolja (vagyis például annak 2014-szeri ismételt alkalmazásáról szóljon).

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2015. november 26.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Határozzuk meg az alábbi A mátrix inverzének bal felső sarkában álló elemét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Az A^{-1} mátrix első oszlopát (a definíció, vagy az A^{-1} meghatározására tanult eljárás szerint) az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_1$ lineáris egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk (ahol $\underline{e}_1$ az egységmátrix első oszlopát jelöli). (2 pont)

Azonban ebből a lineáris egyenletrendszerből is csak x_1-et, vagyis az $\underline{x}$ megoldás első koordinátáját kérdezi a feladat. (2 pont)

Az $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ kibővített együtthatómátrixú $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_1$ lineáris egyenletrendszerben a harmadik sorból az elsőt levonva az $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ alakot kapjuk. (3 pont)

Ennek utolsó sora mutatja, hogy x_1 értéke, vagyis az A^{-1} bal felső sarkában álló elem (-1). (3 pont)

Természetesen nem hiba, csak fölösleges akár az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_1$ megoldására, akár az A^{-1} meghatározására vonatkozó teljes Gauss-eliminációt elvégezni és abból kiolvasni a keresett értéket. Aki ezt megteszi, az eredményül az $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot (illetve $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_1$ esetében ennek első oszlopát) kapja.

Ha egy megoldó így jár el, akkor minden, a megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hiba darabonként 1 pont levonást jelent (akkor is, ha a szóban forgó számolási hiba a végeredményként kapott bal felső elemet egyébként nem érinti).

2. A 6×10-es A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 3$. Igaz-e mindig, hogy A-nak elhagyható egy sora és egy oszlopa úgy, hogy a kapott 5×9-es B mátrixra $\mathrm{r}(B) = 3$ teljesüljön?

* * * * *

Első megoldás. $\mathrm{r}(A) = 3$-ból az oszloprang definíciója szerint következik, hogy A-nak kiválasztható 3 lineárisan független oszlopa. (1 pont)
Hagyjunk el A-ból egy ettől a háromtól különböző oszlopot, a kapott 6×9-es mátrix legyen C. (1 pont)
Ekkor C-ben továbbra is megtalálható ugyanaz a 3 lineárisan független oszlop. (1 pont)
Ennél több viszont nyilván nem, különben A-ban is kiválasztható lenne 3-nál több lineárisan független oszlop, ellentmondásban $\mathrm{r}(A) = 3$-mal. (1 pont)
Így $\mathrm{r}(C) = 3$ (az oszloprang definíciója szerint). (1 pont)
Ezért a sorrang definíciója szerint C-nek kiválasztható 3 lineárisan független sora. (1 pont)
Hagyjunk el C-ből egy ettől a háromtól különböző sort, a kapott 5×9-es mátrix legyen B. (1 pont)
A fenti gondolatmenettel analóg módon következik, hogy $\mathrm{r}(B) = 3$: B-nek továbbra is kiválasztható 3 lineárisan független sora, de annál több $\mathrm{r}(C) = 3$ miatt nem. (1 pont)
Mivel B az A-ból egy oszlop, majd egy sor elhagyásával keletkezett és $\mathrm{r}(B) = 3$, az állítás igaz. (2 pont)

Második megoldás. A determinánsrang definíciója szerint A-nak kiválasztható 3 sora és 3 oszlopa úgy, hogy az ezek kereszteződéseiben kialakuló 3×3-as M részmátrixra $\det M \neq 0$. (2 pont)
Hagyjuk most el A-nak egy olyan sorát és egy olyan oszlopát, amelyek az M négyzetes részmátrix kiválasztásában nem játszottak szerepet, a kapott 5×9-es mátrix legyen B. (2 pont)
Most M nyilván a B-nek is nemnulla determinánsú, 3×3-as részmátrixa. (2 pont)
De 3×3-asnál nagyobb, nemnulla determinánsú, négyzetes részmátrix nyilván nem választható ki B-ből, hiszen ugyanez A-ból is kiválasztható volna, ellentmondásban $\mathrm{r}(A) = 3$-mal. (2 pont)
Mindezekből $\mathrm{r}(B) = 3$, vagyis az állítás igaz. (2 pont)

3. A 6×10-es A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 3$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_7 \in \mathbb{R}^{10}$ vektorok, amelyekre $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_7$ lineárisan független rendszert alkot és $A \cdot \underline{v}_1 = \underline{0}$, $A \cdot \underline{v}_2 = \underline{0}$, …, $A \cdot \underline{v}_7 = \underline{0}$ teljesül.

* * * * *

Legyen $f : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^6$ az $\underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x}$ lineáris leképezés (amelyre tehát $[f] = A$). (1 pont)
A tanultak szerint $\mathrm{Im}\, f$ az A oszlopainak (mint $\mathbb{R}^6$-beli vektoroknak) a generált altere. (1 pont)
A szintén az anyagban szerepelt tétel szerint $\mathrm{r}(A)$ az A oszlopai generált alterének a dimenziója. (1 pont)
Mindezekből tehát $\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{r}(A) = 3$. (1 pont)
Ebből és a dimeziótételből $\dim \mathrm{Ker}\, f = 7$ következik. (1 pont)
Legyen ezért $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_7$ a $\mathrm{Ker}\, f$ egy bázisa. (2 pont)
Ekkor $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_7$ lineárisan független (hiszen bázis) (1 pont)
és $A \cdot \underline{v}_1 = f(\underline{v}_1) = \underline{0}, \ldots, A \cdot \underline{v}_7 = f(\underline{v}_7) = \underline{0}$ következik a $\mathrm{Ker}\, f$ definíciójából. (2 pont)

4. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció $B = \{\underline{b}_1 = (1;1;0),\ \underline{b}_2 = (2;0;3),\ \underline{b}_3 = (0;1;-2)\}$ bázis szerinti mátrixa az alábbi. Az $\mathbb{R}^3$ melyik elemét rendeli f a $2\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + 3\underline{b}_3$ vektorhoz?

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. A $\underline{v} = 2\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + 3\underline{b}_3$ jelöléssel nyilván $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. (2 pont)

Az $[f]_B$ definíciójából következik, hogy $[f(\underline{v})]_B = [f]_B \cdot [\underline{v}]_B$. (2 pont)

Elvégezve a szorzást: $[f(\underline{v})]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. (1 pont)

A koordinátavektor definíciója szerint tehát $f(\underline{v}) = \underline{b}_1 + 5\underline{b}_2 + 2\underline{b}_3$. (3 pont)
Ebbe helyettesítve a $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ megadott értékeit: $f(\underline{v}) = (11;3;11)$. (2 pont)

Ha egy megoldó csak az $[f]_B \cdot (2;-1;3)^T$ szorzást végzi el és a kapott $(1;5;2)$-t hiszi végeredménynek, az (a fentiek szerint) megkaphatja a szorzásért járó 1 pontot; továbbá (esetleg részben) még a $[\underline{v}]_B$ felírásáért járó 2 pontot is, ha a megoldásból (például – de nem feltétlen – a $[\underline{v}]_B$ jelölés használata révén) kiderül, hogy a megoldó értve használta a koordinátavektor fogalmát. Ha azonban a megoldás csak ennyire szorítkozik, akkor 3-nál több pontot nem érhet. Igaz ez még akkor is, ha az $[f(\underline{v})]_B = [f]_B \cdot [\underline{v}]_B$ „képlet" szerepel a megoldásban, de alkalmazást nem nyer (az útmutató elején írtakkal összhangban). Ettől természetesen különbözik az az eset, ha egy megoldó eljut az $f(\underline{v}) = \underline{b}_1 + 5\underline{b}_2 + 2\underline{b}_3$ alak felírásáig, csak a $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ behelyettesítése marad el: ez a fentiek szerint 8 pontot érhet.

Az alábbi megoldás a fentinél jóval hosszadalmasabb, fölöslegesen sok számolást igényel. Csak azért szerepel a pontozási útmutatóban, hogy az ezt írók dolgozata egységesen értékelhető legyen.

Második megoldás.

A B bázisnak megfelelő $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix inverze $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, amit a tanult, Gauss-elimináción alapuló módszerrel határozhatunk meg. (2 pont)
A tanult tétel szerint $[f]_B = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$. Ezt az összefüggést balról B-vel, jobbról B^{-1}-zel szorozva: $B \cdot [f]_B \cdot B^{-1} = [f]$. (2 pont)
Behelyettesítve B-t, $[f]_B$-t és B^{-1}-et az $[f] = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -10 & 13 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixot kapjuk. (2 pont)
A feladatbeli $\underline{v} = 2\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + 3\underline{b}_3$ vektort kiszámítva: $\underline{v} = (0;5;-9)^T$. (1 pont)
$[f]$ definíciójából $f(\underline{v}) = [f] \cdot \underline{v}$. (2 pont)
A szorzást elvégezve a fentiekből $f(\underline{v}) = (11;3;11)$ (illetve ennek transzponáltja) adódik. (1 pont)

5. Adjuk meg a p paraméter értékét és az alábbi A mátrix egy sajátvektorát, ha tudjuk, hogy az 5 sajátértéke A-nak.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & p \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Mivel az 5 sajátértéke A-nak, ezért a tanult tétel szerint $\det(A - 5E) = 0$, (1 pont)
vagyis $\begin{vmatrix} -2 & p \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. (2 pont)
Ebből $(-1)\cdot(-2) - 1 \cdot p = 0$, vagyis $p = 2$. (2 pont)
Az 5-höz tartozó sajátvektorokat az $A \cdot \underline{x} = 5 \cdot \underline{x}$ (vagy az ezzel ekvivalens $(A - 5E) \cdot \underline{x} = \underline{0}$) lineáris egyenletrendszer megoldásával kereshetjük. (1 pont)
Ezt részletezve a $-2x_1 + 2x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$ egyenletrendszerre jutunk. (2 pont)
Ennek megoldása például $x_1 = x_2 = 1$, így az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor sajátvektora A-nak. (2 pont)
A $p = 2$ ismeretében természetesen nincs akadálya annak sem, hogy A minden sajátértékét és sajátvektorát meghatározzuk: az 5 sajátértékhez tartozó, a fenti megoldásban talált $(x,x)^T$ $(x \neq 0)$ sajátvektorokon kívül sajátérték még a 2 is, az ehhez tartozó sajátvektorok pedig a $(2x,-x)^T$ $(x \neq 0)$ alakú vektorok. Ezek bármelyike is elfogadható tehát jó eredményként, noha a 2 sajátérték meghatározása a megoldás szempontjából fölösleges munka. Megjegyezzük, hogy p és az 5-höz tartozó sajátvektorok meghatározása egyszerre is végezhető: $A \cdot \underline{x} = 5 \cdot \underline{x}$-ből a $-2x_1 + p \cdot x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$ egyenletrendszert kapjuk, amiből $x_1 = x_2$ behelyettesítésével a $(p-2)x_2 = 0$ egyenletet; ebből pedig $p = 2$, különben $x_2 = x_1 = 0$ adódna, így az 5 nem volna sajátérték.

6. Milyen maradékot adhat az n egész szám 142-vel osztva, ha $20n + 4$ és $72n - 12$ azonos maradékot ad 142-vel osztva?

* * * * *

A feladat szövege szerint $20n + 4 \equiv 72n - 12 \pmod{142}$, amit átrendezve az $52n \equiv 16 \pmod{142}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)

Mindkét oldalt 4-gyel osztva: $13n \equiv 4 \pmod{71}$, ahol a modulust $(4, 142) = 2$ miatt kellett 2-vel elosztani. (1 pont)

Mindkét oldalt 5-tel szorozva: $65n \equiv 20 \pmod{71}$, vagyis $-6n \equiv 20 \pmod{71}$. (1 pont)

Mindkét oldalt (-2)-vel osztva: $3n \equiv -10 \equiv 61 \pmod{71}$, ahol a modulus $(-2, 71) = 1$ miatt nem változott. (1 pont)

A jobb oldalhoz 71-et adva: $3n \equiv 132 \pmod{71}$, amiből 3-mal osztás után $n \equiv 44 \pmod{71}$ (és a modulus $(3, 71) = 1$ miatt nem változott). (1 pont)

Minden megtett lépés ekvivalens lépés volt – beleértve az 5-tel való szorzást is, $(5, 71) = 1$ miatt. Ezért a kapott eredmények valóban megoldásai a lineáris kongruenciának. (3 pont)

Ebből végül $n \equiv 44 \pmod{142}$ vagy $n \equiv 115 \pmod{142}$, vagyis az n egész 44 vagy 115 maradékot adhat 142-vel osztva. (2 pont)

A lépések ekvivalenciája helyett hivatkozhatunk arra is, hogy $(52, 142) = 2$ miatt két megoldás kell legyen modulo 142, vagy akár ellenőrizhetjük is a kapott eredményeket. (Viszont a három érv közül valamelyikre szükség van annak annak kizárásához, hogy a kapott eredmények között hamis gyök lehessen.) Ha egy megoldó csak azt ellenőrzi, hogy $(52, 142) = 2 \mid 16$, így a lineáris kongruenciának két megoldása van modulo 142, de ezeket kiszámolni nem tudja, az (az átrendezéssel együtt) összesen 3 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb. A lineáris kongruenciának természetesen számos más, jó megoldása is van – például a fenti megoldásban szereplő 5-tel való szorzás helyett akár 6-tal, akár 7-tel szorozva is célhoz érhetünk.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2015. december 7.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $Q(9;-2;5)$ ponton és a p valós paraméter minden értéke esetén merőleges a $7x-2y+p\cdot z=4$ egyenletű síkra.

* * * * *

Első megoldás. A $7x-2y+p\cdot z=4$ egyenletű sík egy normálvektorát kiolvasva: $\underline{n}_p=(7;-2;p)$.(1 pont)
A keresett sík normálvektora legyen $\underline{m}=(a,b,c)$. A síkok merőlegessége ekvivalens a normálvektoraik merőlegességével, így $\underline{n}_p$ merőleges $\underline{m}$-re a p minden értékére. (2 pont)
Ez pedig a skaláris szorzatuk nulla voltával ekvivalens: $\underline{n}_p\cdot\underline{m}=0$ minden p-re . (1 pont)
Ezt kifejtve: $7a-2b+p\cdot c=0$ minden p-re. (1 pont)
Ebből $c=0$ következik (különben a és b értékét bárhogyan rögzítve a $7a-2b+p\cdot c$ kifejezés minden valós értéket felvehetne). (2 pont)
A $7a-2b=0$ egyenletnek megoldása például $a=2$, $b=7$. Így a keresett síknak normálvektora például $\underline{m}=(2;7;0)$ (mert erre $\underline{n}_p\cdot\underline{m}=0$ valóban minden p-re teljesül). (1 pont)
Ebből és a megadott Q-ból felírható a keresett sík egyenlete: $2x+7y=4$. (2 pont)

Második megoldás. A keresett sík merőleges például a $7x-2y+z=4$ és a $7x-2y=4$ egyenletű síkokra is ($p=1$, illetve $p=0$ paraméterválasztással). (1 pont)
Ezeknek a normálvektorait az egyenletükből kiolvasva: $\underline{n}_1=(7;-2;1)$, illetve $\underline{n}_2=(7;-2;0)$. (1 pont)
Mivel a síkok merőlegessége ekvivalens a normálvektoraik merőlegességével, ezért a keresett sík normálvektora merőleges $\underline{n}_1$-re és $\underline{n}_2$-re. (2 pont)
Ezért az $\underline{n}_1\times\underline{n}_2$ vektoriális szorzat normálvektora lesz a keresett síknak. (2 pont)

Ezt a tanult módon meghatározva: $\underline{n}_1\times\underline{n}_2=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 7 & -2 & 1\\ 7 & -2 & 0\end{vmatrix}=2\underline{i}+7\underline{j}+0\underline{k}=(2;7;0).$ (2 pont)

Ebből és a megadott Q-ból felírható a keresett sík egyenlete: $2x+7y=4$. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a fenti két megoldás tartalmilag különbözik annyiban, hogy míg az elsőből egy ilyen sík létezésének a ténye is kiderül, addig a második eleve feltételezi azt. A feladat szövege azonban implicite állítja egy ilyen sík létezését, így ennek a hiányáért nem vonunk le pontot. Így ha egy megoldó az első megoldást írja, de ekvivalencia helyett csak egyirányú következtetéseket von le, azt is teljes értékű megoldásnak tekintjük.

2. Legyen $F = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k\}$ lineárisan független rendszer, $G = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \ldots, \underline{g}_m\}$ pedig generátorrendszer a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. Mutassuk meg, hogy F kiegészíthető néhány (esetleg nulla) G-beli vektorral úgy, hogy ezáltal V egy bázisát kapjuk.

* * * * *

A tanultak szerint, ha egy V-beli lineárisan független rendszert mindig egy olyan vektorral bővítünk, ami nem tartozik a korábbi vektorok generált alteréhez, akkor a rendszer lineáris függetlensége megmarad és véges sok lépés után V egy bázisát kapjuk. (1 pont)
A feladat megoldásához tehát azt kell megmutatni, hogy ez az eljárás elvégezhető úgy is, hogy mindig a G egy elemével bővítünk. (1 pont)
Tegyük fel, hogy néhány (esetleg 0) bővítés után most az $F' = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_t\}$ lineárisan független rendszernél tartunk. Azt kell megmutatni, hogy ha az eljárás még nem állt meg (vagyis F' még nem bázis), akkor G-nek van az $\langle \underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_t \rangle$ generált altérhez nem tartozó eleme. (2 pont)
Tegyük fel ezért indirekt, hogy az $\langle \underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_t \rangle$ altér tartalmazza G-t. (2 pont)
Ekkor tehát az F' elemeiből G minden eleme kifejezhető lineáris kombinációval. Viszont mivel G generátorrendszer V-ben, ezért G elemeiből V minden vektora kifejezhető lineáris kombinációval. Ezekből együtt következik, hogy F' elemeiből V minden vektora is kifejezhető lineáris kombinációval, vagyis F' generátorrendszer V-ben. (2 pont)
Így F' lineárisan független generátorrendszer, vagyis bázis V-ben. Ez ellentmond annak a feltevésünknek, hogy az eljárás F'-vel még nem állt meg és így bizonyítja a feladat állítását. (2 pont)

3. A W halmaz álljon azokból a $\underline{v} \in \mathbb{R}^5$ vektorokból, amelyekre teljesül, hogy $\underline{v}$ bármely két koordinátájának a különbsége egész szám. Döntsük el, hogy W alteret alkot-e $\mathbb{R}^5$-ben és ha igen, akkor határozzuk meg a dimenzióját.

* * * * *

A $\underline{v} = (0; 0; 0; 0; 1)^T$ vektor például W-beli (hiszen egész számok különbsége is egész). (2 pont)
Azonban az $\frac{1}{2}\underline{v} = (0; 0; 0; 0; \frac{1}{2})^T$ vektor már nem W-beli, hiszen (például) az utolsó két koordináta különbsége nem egész. (4 pont)
Mivel az altér definíciója szerint egy altér egy $\underline{v}$ elemére $\lambda \cdot \underline{v}$-nek is az altérhez kellene tartoznia minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, ezért W nem altér. (4 pont)
A W halmaz az összeadásra zárt, így W az altér definíciójának másik feltételét egyébként teljesíti. Ha egy megoldó ezt megmutatja (és nem csak kijelenti), akkor ezért adható legföljebb 3 pont akkor is, ha ebből (és esetleg a skalárral szorzásra való zártságra vonatkozó hibás indoklásból) azt a téves következtetést vonja le, hogy W altér. Ez a pontszám azonban nem jár akkor, ha a W altér voltában való (téves) hit nyomán a megoldó a dimenzió meghatározására tett kísérletei közben olyan állítás(oka)t ír, amely(ek)ből az alterekkel kapcsolatos alapfogalmak körüli súlyos tájékozatlanságára lehet következtetni. (Ha például egy megoldó – tévesen – azt állítja, hogy W-ben bázis az $\mathbb{R}^5$-beli standard bázis – hiszen W-beli vektorokból áll, lineárisan független és W minden vektora kifejezhető belőle –, akkor erre a fenti megjegyzés nem vonatkozik és a 3 pont megadható, mert ez a „gondolat" többé-kevésbé logikus folytatása annak a téves állításnak, hogy W altér.) Azonban egy ilyen, téves következtetésre jutó megoldásért legföljebb a fenti 3 pont adható meg, a (téves) következtetés levonásáért nem adunk pontot (akkor sem, ha az a korábbiakból egyébként logikusan következne).

4. Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 14x_3 &= -17 \\ 2x_1 - 6x_2 - 28x_3 + p \cdot x_4 &= q - 34 \\ 3x_1 - 7x_2 - 36x_3 + 4p \cdot x_4 &= 4q - 37 \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -14 & 0 & -17 \\ 2 & -6 & -28 & p & q-34 \\ 3 & -7 & -36 & 4p & 4q-37 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -14 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \\ 0 & 2 & 6 & 4p & 4q+14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -14 & 0 & -17 \\ 0 & 2 & 6 & 4p & 4q+14 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -14 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 3 & 2p & 2q+7 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Ha $p = 0$ és $q \neq 0$, akkor az utolsó sor „tilos sor”, így az egyenletrendszernek nincs megoldása. (2 pont)
Ha $p = 0$ és $q = 0$, akkor az utolsó sor elhagyásával kapjuk a lépcsős alakot, majd ebből az első sor (-3)-as elemének „kinullázásával” a redukált lépcsős alakot:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -14 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right) \quad \text{(1 pont)}$$

Így a $p = q = 0$ esetben az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ és $x_4 = \beta \in \mathbb{R}$ szabad paraméterek és $x_1 = 4 + 5\alpha$, $x_2 = 7 - 3\alpha$. (2 pont)
Maradt a $p \neq 0$ eset vizsgálata. Ekkor a harmadik sor p-vel való osztása után kapjuk a lépcsős alakot, majd az első sor (-3)-as és a második sor $2p$ elemének a „kinullázásával” a redukált lépcsős alakot:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -14 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 3 & 2p & 2q+7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q/p \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q/p \end{array}\right) \quad \text{(1 pont)}$$

Így a $p \neq 0$ esetben is végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ szabad paraméter és $x_1 = 4 + 5\alpha$, $x_2 = 7 - 3\alpha$, $x_4 = q/p$. (2 pont)
A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A definícióban összeadandóként szereplő szorzatok közül csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem tartalmaznak 0 tényezőt, mert a többi nem befolyásolja a determináns értékét. (1 pont)
Egy ilyen szorzatban tehát a harmadik oszlopból csak az 5-ös választható. Ezért az első oszlopból már csak az 1-es választható (hiszen az első sorból már vettünk elemet) és így a negyedik oszlopból csak a 2-es. (1 pont)
Eddig a második és ötödik oszlopból, illetve a második és negyedik sorból nem választottunk elemet, így kétféleképp fejezhető be a 0-t nem tartalmazó bástyaelhelyezés kiválasztása: a második oszlopból a 2-est és az ötödikből a 3-ast választva, vagy a másodikból az 1-est és az ötödikből a 6-ost. (1 pont)
Így két darab, nullát nem tartalmazó szorzat van: $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1$, illetve $5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$. (1 pont)
Az elsőhöz tartozó π permutáció $3, 2, 4, 5, 1$ (mert az első sorból a harmadik elemet vettük ki, a másodikból a másodikat, stb). (1 pont)
π inverziószáma $I(\pi) = 5$ (az inverzióban álló elempárok $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(2, 1)$, $(4, 1)$ és $(5, 1)$). (1 pont)
Mivel $I(\pi)$ páratlan, az első szorzat negatív előjelet kap. (1 pont)
Hasonlóan, a második szorzathoz tartozó permutáció a $3, 5, 4, 2, 1$, ennek az inverziószáma 8, így a szorzat előjele pozitív. (1 pont)
Végül is tehát a determináns értéke $-5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. (2 pont)

6. Az 5×3-as A mátrixra teljesül, hogy az $A \cdot A^T$ mátrix bal alsó sarkában álló elem 2015. Mi állhat az $A \cdot A^T$ mátrix jobb felső sarkában?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Jelölje az A első sorának három elemét sorban a, b és c, az ötödik sor elemeit sorban d, e és f.
Ekkor az A^T első oszlopában álló elemek fölülről lefelé a, b és c. (2 pont)
Így a mátrixszorzás definíciója szerint az $A \cdot A^T$ bal alsó sarkában álló elem $da + eb + fc$. (2 pont)
Hasonlóan, az A^T utolsó oszlopának elemei fölülről lefelé d, e és f, (2 pont)
így az $A \cdot A^T$ jobb felső sarkában álló elem $ad + be + cf$. (2 pont)
Következik, hogy az $A \cdot A^T$ bal alsó, illetve jobb felső sarkában álló elemei egyenlők, vagyis a jobb felső sarokban is 2015 áll. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a megoldás rövidebben is indokolható a tanult $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ összefüggést használva: ezt $B = A^T$-ra alkalmazva $(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$ adódik, vagyis $A \cdot A^T$ transzponáltja sajátmaga, így (például) a bal alsó és jobb felső sarkában álló elemei egyenlők.

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

1. Határozzuk meg az A és a B mátrixokat, ha az A^{-1} és az $A \cdot B$ mátrixok az alábbiak.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad\qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az A az A^{-1} inverze, így ezt a tanult, Gauss-elimináción alapuló eljárással határozhatjuk meg: (1 pont)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & -7/4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & -7/4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

Így tehát $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$. (4 pont)
$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = E \cdot B = B$ adódik a mátrixszorzás tanult tulajdonságait, illetve az inverz definícióját használva, így B-t megkaphatjuk az adott A^{-1} és $A \cdot B$ szorzataként. (3 pont)
Ebből $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. (2 pont)

2. A 6×10-es A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 3$. Igaz-e mindig, hogy A-nak elhagyható egy sora és egy oszlopa úgy, hogy a kapott 5×9-es B mátrixra $\mathrm{r}(B) = 2$ teljesüljön?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az állítás nem (mindig) igaz, mutatunk rá egy ellenpéldát.
A 6×10-es A mátrix mind a négy sarkában álljon a 3×3-as egységmátrix, az A középső négy oszlopának minden eleme pedig legyen 0. (2 pont)
Ekkor A-ból kiválasztható 3×3-as, nemnulla determinánsú részmátrix: bármelyik sarkában álló egységmátrix ilyen. (2 pont)
4×4-es, nemnulla determinánsú részmátrix viszont nem választható A-ból, mert az A minden 4×4-es részmátrixának van két azonos sora (hiszen az A felső három sora rendre azonos az alsó hárommal). (2 pont)
Így a determinánsrang definíciója szerint $\mathrm{r}(A) = 3$. (1 pont)
Ha most A-nak tetszőlegesen elhagyjuk egy sorát és egy oszlopát, akkor az A négy sarkában álló négy egységmátrix közül legalább egy biztosan érintetlen marad, így a kapott B mátrixnak továbbra is lesz 3×3-as, nemnulla determinánsú részmátrixa. (2 pont)
Vagyis a kapott 5×9-es B mátrixra $\mathrm{r}(B) \geq 3$ (és így nyilván $\mathrm{r}(B) = 3$ is) igaz. Ezért A valóban jó ellenpélda az állításra. (1 pont)

3. A $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ függvény rendelje minden $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz a $(2x_1, 2x_2, 2x_3, 0) \in \mathbb{R}^4$ vektort. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ egy bázis $\mathbb{R}^3$-ben és tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezésre $f(\underline{b}_1) = g(\underline{b}_1)$, $f(\underline{b}_2) = g(\underline{b}_2)$ és $f(\underline{b}_3) = g(\underline{b}_3)$ teljesül. Írjuk fel f-nek az $[f]$ mátrixát.

* * * * *

Első megoldás. Először is vegyük észre, hogy g is lineáris leképezés: a $[g] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixszal való szorzás épp g-t „valósítja meg”. (3 pont)
Legyen $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy $f(\underline{v}) = g(\underline{v})$ igaz.
Mivel B bázis $\mathbb{R}^3$-ben, ezért létezik a $\underline{v} = \alpha_1\underline{b}_1 + \alpha_2\underline{b}_2 + \alpha_3\underline{b}_3$ lineáris kombináció. (1 pont)
Ebből $f(\underline{v}) = f(\alpha_1\underline{b}_1) + f(\alpha_2\underline{b}_2) + f(\alpha_3\underline{b}_3) = \alpha_1 f(\underline{b}_1) + \alpha_2 f(\underline{b}_2) + \alpha_3 f(\underline{b}_3)$ következik a lineáris leképezések tanult tulajdonságait használva. (2 pont)
Ugyanez g-ről is elmondható, hiszen g is lineáris leképezés: $g(\underline{v}) = \alpha_1 g(\underline{b}_1) + \alpha_2 g(\underline{b}_2) + \alpha_3 g(\underline{b}_3)$. (1 pont)
Mivel azonban $f(\underline{b}_i) = g(\underline{b}_i)$ igaz minden $i = 1, 2, 3$-ra, ezért $f(\underline{v}) = g(\underline{v})$ valóban következik. (1 pont)
Mivel az f és a g lineáris leképezések azonosak, ezért a mátrixaik is azok (hiszen a lineáris leképezések mátrixa a tanult tétel szerint egyértelmű). Így $[f]$ a fentebb látható $[g]$-vel azonos. (2 pont)

Második megoldás. Az első megoldásban írtak szerint g is lineáris leképezés és a mátrixa a fenti.(3 pont)
Legyen B a $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ egyesítésével keletkező 3×3-as mátrix.
A mátrixszorzás definíciójából következik, hogy az $[f] \cdot B$ szorzatmátrix oszlopai sorban $[f] \cdot \underline{b}_1$, $[f] \cdot \underline{b}_2$ és $[f] \cdot \underline{b}_3$. Mivel $[f] \cdot \underline{b}_i = f(\underline{b}_i)$ a lineáris leképezés (mátrixának) definíciója szerint, ezért az $[f] \cdot B$ oszlopai az $f(\underline{b}_i)$ vektorok. (2 pont)
Mivel g is lineáris leképezés, ezért ugyanez g-ről is elmondható: a $[g] \cdot B$ oszlopai az $g(\underline{b}_i)$ vektorok.(1 pont)
Mivel $f(\underline{b}_i) = g(\underline{b}_i)$ igaz minden $i = 1, 2, 3$-ra, ezért $[f] \cdot B = [g] \cdot B$. (1 pont)
Mivel a B oszlopai (vagyis a $\underline{b}_i$-k) lineárisan függetlenek, ezért a tanultak szerint $\det B \neq 0$ és így létezik a B^{-1} mátrix. (1 pont)
Az $[f] \cdot B = [g] \cdot B$ egyenlet mindkét oldalát jobbról B^{-1}-zel szorozva $[f] = [g]$ adódik, így $[f]$ a fentebb látott $[g]$-vel azonos. (2 pont)

4. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben. Legyen az f mátrixa a B bázis szerint az alábbi mátrix:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások.

a) $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 \in \operatorname{Ker} f$

b) $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 \in \operatorname{Im} f$

* * * * *

Legyen $\underline{v} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2$. Ekkor a koordinátavektor definíciója szerint $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1 pont)
Így az $[f(\underline{v})]_B = [f]_B \cdot [\underline{v}]_B$ összefüggés (vagyis $[f]_B$ definíciója) szerint $[f(\underline{v})]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$. (1 pont)
Ha $f(\underline{v}) = \underline{0}$ teljesülne, akkor $[f(\underline{v})]_B = [\underline{0}]_B$ is igaz volna (hiszen a koordinátavektor egyértelmű). Azonban (ismét a koordinátavektor definíciója miatt) $[\underline{0}]_B = \underline{0}$, így $[f(\underline{v})]_B \neq [\underline{0}]_B$, vagyis $f(\underline{v}) \neq \underline{0}$. (2 pont)
Így tehát $\underline{v} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 \notin \operatorname{Ker} f$, az a) állítás hamis. (1 pont)
$\underline{v} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 \in \operatorname{Im} f$ azt jelenti, hogy létezik olyan $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ vektor, amelyre $f(\underline{a}) = \underline{v}$. (1 pont)
Ez ekvivalens az $[f(\underline{a})]_B = [\underline{v}]_B$ állítással (ismét a koordinátavektor egyértelműsége miatt). (1 pont)
Bevezetve a $[\underline{a}]_B = \underline{x}$ jelölést kapjuk, hogy a b) állítás ekvivalens az $[f]_B \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ feltételnek eleget tevő $\underline{x}$ létezésével. (1 pont)
Ez tehát az $x_1 + 2x_2 = 1$, $3x_1 + 7x_2 = 1$ lineáris egyenletrendszerre vezet (ahol x_1 és x_2 az $\underline{x}$ koordinátái). Ez könnyen megoldható: $x_1 = 5$, $x_2 = -2$. (1 pont)
Azt kaptuk tehát, hogy a b) állítás igaz: az $\underline{a} = 5\underline{b}_1 - 2\underline{b}_2$ vektorra $f(\underline{a}) = \underline{v}$, így $\underline{v} \in \operatorname{Im} f$. (1 pont)

5. Adjuk meg a p paraméter értékét és az alábbi A mátrix összes sajátértékét, ha tudjuk, hogy az alábbi $\underline{v}$ vektor sajátvektora A-nak.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & p \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Mivel $\underline{v}$ sajátvektor, ezért $A \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 6+3p \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \underline{v}$ kell teljesüljön alkalmas λ-ra. (2 pont)
A második koordináták egyezéséből $3\lambda = 27$, vagyis $\lambda = 9$ adódik. (1 pont)
Így az első koordináták egyezéséből $6 + 3p = 9$, vagyis $p = 1$ következik. (1 pont)
Ebből A sajátértékeit a tanult módszerrel határozhatjuk meg: $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 \\ 9 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$(2 pont)
$= (6-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 12\lambda + 27.$ (2 pont)
Így A sajátértékei a $0 = \lambda^2 - 12\lambda + 27 = (\lambda - 9)(\lambda - 3)$ egyenlet megoldásai, vagyis $\lambda = 9$ és $\lambda = 3$.(2 pont)
Ha egy megoldó a p meghatározása során megállapítja, hogy $\lambda = 9$ sajátérték, de a másik sajátértéket nem határozza meg, akkor a sajátértékekért a fenti pontozás szerint kapható összesen 6 pontból legföljebb 2-t megszerezhet.

6. Az n pozitív egész 6247-szeresének az utolsó három számjegye 713. Mi lehet az n utolsó két számjegye?

* * * * *

Mivel $6247n$ utolsó két jegye nyilván 13, ezért $6247n \equiv 13 \pmod{100}$. (1 pont)
Ez $6247 \equiv 47 \pmod{100}$ miatt ekvivalens a $47n \equiv 13 \pmod{100}$ lineáris kongruenciával. (1 pont)
Mindkét oldalt 2-vel szorozva: $94n \equiv 26 \pmod{100}$, vagyis $-6n \equiv 126 \pmod{100}$. (2 pont)
Mindkét oldalt (-6)-tal osztva: $n \equiv -21 \equiv 29 \pmod{50}$, ahol a modulust $(-6, 100) = 2$ miatt kellett 2-vel elosztani. (1 pont)
Ebből $n \equiv 29 \pmod{100}$ vagy $n \equiv 79 \pmod{100}$. (1 pont)
Ellenőrzéssel kiderül, hogy ebből $n \equiv 79 \pmod{100}$ jó megoldás, de $n \equiv 29 \pmod{100}$ hamis gyök. (Ez a 2-vel szorzás miatt jött be, ami $(100, 2) > 1$ miatt nem ekvivalens lépés.) (3 pont)
Így tehát $n \equiv 79 \pmod{100}$ az egyetlen jó megoldás, vagyis n utolsó két számjegye 79. (1 pont)
A hamis gyök kiszűrésekor felhasználhatjuk, hogy $(47, 100) = 1$ miatt a tanult tétel szerint egyetlen megoldás van modulo 100. A lineáris kongruencia nagyon sokféleképp megoldható jól (akár hamis gyököt behozó lépés nélkül is). A kapott megoldások helyességéről vagy ellenőrzéssel, vagy a modulo 100 vett megoldások számát használó érveléssel, vagy (erre alkalmas megoldás esetén) a lépések ekvivalenciájára való hivatkozással mindenképp meg kell győződni; aki ezt elmulasztja, az értelemszerűen 3 pontot veszítsen. Ha valaki csak azt ellenőrzi, hogy $(47, 100) | 13$, így a lineáris kongruenciának van megoldása, de azt kiszámolni nem tudja, az (a kongruencia felírásával együtt) összesen 3 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb. Természetesen maximális pontot érhet az a megoldás is, amely a feladat szövege szerinti $6247n \equiv 713 \pmod{1000}$ lineáris kongruenciából indul ki, ezt megoldva $n \equiv 679 \pmod{1000}$-et kap és ebből következtet n utolsó két jegyére; ez a megoldás nyilván fölöslegesen hosszú, de elvileg jó.