Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2014. október 20.

1. A p paraméter milyen értékére esnek egy síkba az $A(2;3;3)$, $B(3;4;1)$, $C(4;6;2)$ és $D(p;2;5)$ pontok?

2. Megadható-e $\mathbb{R}^4$-ben négy darab vektor úgy, hogy közülük bármely kettő lineárisan független legyen, de semelyik három ne legyen lineárisan független?

3. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a páros sorszámú és a páratlan sorszámú koordináták összege is 0. Határozzuk meg $\dim W$ értékét és adjunk meg W-ben egy olyan bázist, ami tartalmazza a jobbra látható két vektort. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + p \cdot x_3 + (p^2 + p + 12) \cdot x_4 &= -6 \end{aligned}$$

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

6. Az $(n \times n)$-es A mátrixra teljesül, hogy ha az A mátrix főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adunk (de a többi elemét nem változtatjuk), akkor nulla determinánsú mátrixot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor az A^3 főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adva is nulla determinánsú mátrixot kapunk. (A^3 azt a háromtényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc. A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2014. november 27.

1. Pótolhatók-e az alábbi A és B mátrixok hiányzó elemei úgy, hogy $B = A^{-1}$ teljesüljön? (Ha igen, az összes megoldást adjuk meg. A $\square$ jelek nem feltétlen azonos értékeket jelölnek.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \square & -3 \\ -1 & 3 & \square \\ \square & -4 & \square \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \square \\ 3 & \square & \square \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}$$

2. A 6×6-os A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan B és C mátrixok, amelyekre $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(C) = 2$ és $A = B + C$.

3. Legyen $f : \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{10}$ lineáris leképezés, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{20}\}$ bázis $\mathbb{R}^{20}$-ban és $\underline{v} \in \mathbb{R}^{10}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ rögzített vektor. Adjuk meg $\dim \operatorname{Ker} f$ értékét, ha tudjuk, hogy f a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{20}$ vektorok mindegyikéhez $\underline{v}$-t rendeli.

4. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációra és az $\mathbb{R}^3$-beli $B = \{\underline{b}_1 = (1;0;0),\ \underline{b}_2 = (2;1;0),\ \underline{b}_3 = (2;2;1)\}$ bázisra teljesül, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2) = \underline{b}_3$ és $f(\underline{b}_3) = \underline{b}_1$. Adjuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat.

5. Sajátértéke-e a 3 az alábbi A mátrixnak? Ha igen, adjuk meg az A egy 3-hoz tartozó sajátvektorát.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Az n pozitív egész számra $43n - 1$ utolsó két számjegye megegyezik $2n + 2$ utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2014. december 15.

1. Az e egyenes egyenletrendszere $\frac{2x-3}{4} = \frac{3y+4}{6} = \frac{z}{2}$, az f egyenesé $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{3z-5}{6}$. Párhuzamos-e e és f? Ha igen, akkor határozzuk meg az őket tartalmazó sík egyenletét.

2. Megadható-e $\mathbb{R}^5$-ben öt darab vektor úgy, hogy közülük bármely három által alkotott rendszer lineárisan független legyen, de semelyik négy által alkotott rendszer ne legyen az?

3. Az $\mathbb{R}^4$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyeknek a harmadik koordinátája egyenlő a fölötte álló kettő, a negyedik koordinátája pedig a fölötte álló három koordináta összegével. (Így például a jobbra látható vektor is W-beli.) Határozzuk meg $\dim W$ értékét. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\
2x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 10x_5 &= 5 \\
5x_1 - 2x_2 + 19x_3 + 14x_4 + x_5 &= 17 \\
2x_1 + 6x_3 + p \cdot x_4 + (3p - 27) \cdot x_5 &= p + 2
\end{aligned}$$

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix}
0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\
-4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\
6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\
-1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

6. A 4×5-ös A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem minden $1 \leq i \leq 4$ és $1 \leq j \leq 5$ esetén legyen $(-1)^d$, ahol d az $i^{20} + j^{30}$ szám (10-es számrendszerbeli alakjának) első számjegye. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ mátrix főátlójában álló elemek összegét.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Ez a zárthelyi dolgozat mentes az aktuálpolitikai témákra való utalásoktól és nem célja, hogy a közigazgatás vagy az adóigazgatás bármely csúcsszervébe vetett közbizalmat, közmegbecsülést hátrányosan befolyásolja. Így az „egyenes", „független", „rendszer", „egyenlő", „fölötte álló", illetve „mátrix" kifejezéseknek semmilyen, a matematikain túlmutató jelentése nincs. Ha, akkor az véletlen.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2014. december 15.

1. A p paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak és ha igen, akkor számítsuk is ki azt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & p \end{pmatrix}$$

2. Igaz-e, hogy minden 4 rangú, 6×6-os mátrixban található két olyan elem, amelyek alkalmas megváltoztatásával elérhető, hogy a kapott mátrix rangja 6 legyen?

3. Legyen $f : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^{10}$-ben megadható 7 lineárisan független vektor úgy, hogy f ezek mindegyikéhez azonos értéket rendel.

b) Igaz-e ez az állítás 7 helyett 8-cal?

4. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint az alábbi mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_2$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_3) = (10; 20; 30)$.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

5. a) Sajátvektora-e az alábbi $\underline{v}$ vektor az alábbi A mátrixnak?

b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét és az összes, ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

6. Egy egész szám 109-cel vett osztási maradéka 5-tel kisebb, mint a szám 18-szorosának a 109-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 109-cel osztva?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Ez a zárthelyi dolgozat mentes az aktuálpolitikai témákra való utalásoktól és nem célja, hogy a közigazgatás vagy az adóigazgatás bármely csúcsszervébe vetett közbizalmat, közmegbecsülést hátrányosan befolyásolja. Így a „mátrix”, „rang”, „független”, „bázis”, illetve „sajátérték” kifejezéseknek semmilyen, a matematikain túlmutató jelentése nincs. Ha, akkor az véletlen.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2014. december 19.

1. Párhuzamos-e az $\frac{5x+3}{10} = \frac{4-y}{5} = \frac{5-2z}{2}$ egyenletrendszerű egyenes a $6x + y + 7z = 91$, illetve az $5x + 2y = 79$ egyenletű síkok metszésvonalával?

2. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^5$-ben az alábbi részhalmazok? Ha a válasz igen, adjuk meg az altér dimenzióját is.

a) $V \subseteq \mathbb{R}^5$ azokból az oszlopvektorokból áll, amelyeknek a koordinátái (fölülről lefelé haladva) számtani sorozatot alkotnak.

b) $W \subseteq \mathbb{R}^5$ azokból az oszlopvektorokból áll, amelyeknek a koordinátái (fölülről lefelé haladva) mértani sorozatot alkotnak.

3. Megadható-e 6 darab $\mathbb{R}^4$-beli vektor úgy, hogy közülük bármely 5 generátorrendszert alkosson $\mathbb{R}^4$-ben, de semelyik 4 sem alkosson generátorrendszert $\mathbb{R}^4$-ben?

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 2x_4 &= 14 \\ 3x_1 + 13x_2 - 9x_3 + p \cdot x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 14x_2 + 10x_3 + (p-13) \cdot x_4 &= 23 \end{aligned}$$

5. Az alábbi A mátrixra $\det A = 45653$. Mennyi $\det B$ értéke?

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 8 & 3 & 0 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 7 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Legyen A és B $n \times n$-es mátrix és tegyük fel, hogy $A \cdot B$ a nullmátrix (amelynek tehát minden eleme 0).

a) Igaz-e, hogy ha A minden eleme pozitív és B minden eleme nemnegatív, akkor $B \cdot A$ is mindenképp a nullmátrix?

b) Igaz-e ugyanez az állítás akkor, ha csak annyit teszünk fel, hogy A és B minden eleme is nemnegatív?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2014. december 19.

1. Az $n \times n$-es A mátrixra $A^2 = E$, de $A \neq E$ és $A \neq -E$ (ahol E az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli). Mutassuk meg, hogy A-nak sajátértéke az 1 és a (-1) is.

2. A p paraméter minden értékére határozzuk meg az alábbi mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & 8 & -2 \\ 3 & 13 & -9 & p \\ 2 & 14 & 10 & p-13 \end{pmatrix}$$

3. Legyen $f : \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{10}$ lineáris leképezés, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{20}\}$ bázis $\mathbb{R}^{20}$-ban és $\underline{v} \in \mathbb{R}^{10}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ rögzített vektor. Adjuk meg $\dim \operatorname{Ker} f$ értékét, ha tudjuk, hogy f a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{10}$ vektorok mindegyikéhez a nullvektort, a $\underline{b}_{11}, \underline{b}_{12}, \dots, \underline{b}_{20}$ vektorokhoz pedig $\underline{v}$-t rendeli.

4. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint az alábbi mátrix. A p paraméter milyen értékeire teljesül az $5\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + p \cdot \underline{b}_3 \in \operatorname{Ker} f$ állítás?

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 10 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

5. A p valós paraméter minden értékére adjuk meg az alábbi mátrix minden sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez tartozó minden sajátvektort.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ p & 4 & p \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden n egész számra.

a) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{39}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{39}$.

b) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{13}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{13}$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. október 20.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. A p paraméter milyen értékére esnek egy síkba az $A(2;3;3)$, $B(3;4;1)$, $C(4;6;2)$ és $D(p;2;5)$ pontok?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A kérdés megválaszolásához felírjuk az A, B és C által meghatározott S sík egyenletét, majd ebbe D koordinátáit behelyettesítve eldöntjük, hogy $D \in S$ p milyen értékére teljesül. (1 pont)
$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (1;1;-2)$ és $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a} = (2;3;-1)$ (ahol $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorokat jelölik). (2 pont)
Mivel $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ párhuzamosak S-sel (de egymással nem), ezért S-nek normálvektora lesz az $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektor. (1 pont)
Ezt a tanult képlettel meghatározva:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1\cdot(-1) - 3\cdot(-2))\underline{i} - (1\cdot(-1) - 2\cdot(-2))\underline{j} + (1\cdot 3 - 1\cdot 2)\underline{k} = (5;-3;1).$$ (2 pont)

A kapott normálvektor és A, B vagy C bármelyikének segítségével S egyenlete már a tanult képlettel felírható: $5x - 3y + z = 4$. (2 pont)
Ebbe D koordinátáit behelyettesítve: $5p - 3\cdot 2 + 5 = 4$. Így a négy pont akkor és csak akkor egysíkú, ha $p = 1$. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a normálvektor meghatározásához nem szükséges a vektoriális szorzat fogalma: kicsit több számolással az $\overrightarrow{AB} \cdot \underline{n} = \underline{0}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \underline{n} = \underline{0}$ összefüggésekből is megkapható egy alkalmas $\underline{n}$.

2. Megadható-e $\mathbb{R}^4$-ben négy darab vektor úgy, hogy közülük bármely kettő lineárisan független legyen, de semelyik három ne legyen lineárisan független?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Igen, megadhatók ilyen vektorok.

Legyen például $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pont)

Ekkor a négy felsorolt vektor közül bármely kettő lineárisan független, hiszen egyik sem skalárszorosa egy másiknak. (3 pont)

Továbbá semelyik három nem lineárisan független. Valóban: válasszunk a felsorolt vektorok közül hármat és töröljük az utolsó két koordinátáikat. A kapott $\mathbb{R}^2$-beli vektorok lineárisan összefüggők, hiszen $\mathbb{R}^2$-ben bármely három vektor lineárisan összefüggő (mert két nem párhuzamos vektorból már a sík bármely vektora kifejezhető). (2 pont)
Így a három $\mathbb{R}^2$-beli vektornak van $\underline{0}$-t adó nemtriviális lineáris kombinációja, de ekkor az eredeti, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok azonos együtthatókkal képzett lineáris kombinációja is nyilván $\underline{0}$-t ad. (3 pont)
Az utolsó 5 pont megszerzéséért érvelhetünk úgy is, hogy a megadott vektorok elemei annak a $W \leq \mathbb{R}^4$ altérnek, amely azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból áll, amelyeknek az utolsó két koordinátája 0. Mivel W-ben generátorrendszert (sőt: bázist) alkot például a standard bázis első két vektora, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt W-ben semelyik három vektor nem lehet lineárisan független. (Természetesen a fent megadott példa csak egy a végtelen sok jó példa közül: bármely négy olyan $\mathbb{R}^4$-beli vektor megfelel, amelyek benne vannak $\mathbb{R}^4$-nek egy 2 dimenziós alterében, de egyikük sem skalárszorosa egy másiknak.)

3. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a páros sorszámú és a páratlan sorszámú koordináták összege is 0. Határozzuk meg $\dim W$ értékét és adjunk meg W-ben egy olyan bázist, ami tartalmazza a jobbra látható két vektort. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. Legyen (például) $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ és $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$.

Vegyük ezeknek egy tetszőleges lineáris kombinációját: $\alpha\underline{b}_1 + \beta\underline{b}_2 + \gamma\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ -\beta \\ -\alpha-\gamma \end{pmatrix}$ (1 pont)

Ha $\alpha\underline{b}_1 + \beta\underline{b}_2 + \gamma\underline{b}_3 = \underline{0}$, akkor ebből $\alpha = \beta = \gamma = 0$ rögtön következik (mert a lineáris kombináció eredményeként kapott vektor első három koordinátája is 0). Így $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ lineárisan független.(2 pont)

Egy tetszőleges $\underline{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in W$ vektorra W definíciója miatt $x_4 = -x_2$ és $x_5 = -x_1 - x_3$ kell teljesüljön, így $\alpha = x_1$, $\beta = x_2$ és $\gamma = x_3$ választással a fenti lineáris kombináció épp $\underline{w}$-t adja. Így $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ generátorrendszer is W-ben. (2 pont)
Megmutattuk, hogy a $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ rendszer lineárisan független és generátorrendszer, így bázis W-ben. Ezért $\dim W = 3$. (1 pont)
A megadott két vektort (jelölje ezeket $\underline{u}$ és $\underline{v}$) tartalmazó W-beli bázis készítéséhez egy $\underline{w} \notin \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ vektort keresünk. Látható, hogy $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egy tetszőleges $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v}$ lineáris kombinációjaként előálló vektor első két koordinátája $\lambda + 2\mu$, ezért biztosan nem tartozik az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált altérhez például a fenti $\underline{b}_1 \in W$ vektor (mert az első két koordinátája nem egyenlő). (1 pont)
Ekkor az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1$ rendszer lineárisan független (ez következik az újonnan érkező vektor lemmájából, vagy a tetszőleges lineárisan független rendszer bázissá kiegészítésére tanult eljárásból). (1 pont)
Mivel $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1$ a W dimenziójával megegyező méretű lineárisan független rendszer, ezért a tanult tétel értelmében bázis is W-ben. (2 pont)

Második megoldás. Jelölje a két megadott vektort $\underline{u}$ és $\underline{v}$. A tanult eljárást követve egy $\underline{w} \notin \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ vektort keresünk. Látható, hogy $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egy tetszőleges $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v}$ lineáris kombinációjaként előálló vektor első két koordinátája $\lambda + 2\mu$, ezért biztosan nem tartozik az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált altérhez például az első megoldásban megadott $\underline{b}_1 \in W$ vektor (mert az első két koordinátája nem egyenlő). Így az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1$ rendszer lineárisan független (a tanult eljárás működéséből következően). (2 pont)

Folytatva az eljárást, most az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle$ generált alteret kell meghatároznunk. Vegyük ezeknek egy tetszőleges lineáris kombinációját: $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \gamma \\ \alpha + 2\beta \\ -2\alpha + 7\beta \\ -\alpha - 2\beta \\ \alpha - 9\beta - \gamma \end{pmatrix}$. (2 pont)

Legyen $\underline{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in W$ tetszőleges. A $\underline{w} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle$ állítás azt jelenti, hogy $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{b}_1 = \underline{w}$ valamilyen α, β, γ skalárokra; más szóval, hogy megoldható az $\alpha+2\beta+\gamma = x_1$, $\alpha+2\beta = x_2$, $-2\alpha+7\beta = x_3$, $-\alpha - 2\beta = x_4$, $\alpha - 9\beta - \gamma = x_5$ lineáris egyenletrendszer (ahol most $x_1, \ldots, x_5$ paraméterek, a változók pedig α, β és γ). (2 pont)
Az első két egyenlet különbségéből $\gamma = x_1 - x_2$, a második és a harmadik egyenletekből $\alpha = \frac{7x_2 - 2x_3}{11}$, $\beta = \frac{2x_2 + x_3}{11}$ adódik. (1 pont)
Ezeket az utolsó két egyenletbe helyettesítve az $x_4 = -x_2$, $x_5 = -x_1 - x_3$ feltételeket kapjuk. Mivel ezek W definíciója szerint minden $\underline{w} \in W$ vektorra fennállnak, ezért $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle = W$. (2 pont)
Tehát $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1$ generátorrendszer W-ben és lineárisan független is, így bázis. Ezért $\dim W = 3$. (1 pont)
Megjegyezzük, hogy mindkét megoldás hallgatólagosan épített arra a tényre, hogy a feladatban megadott két vektor lineárisan független. Ez nyilván igaz (hiszen nem skalárszorosai egymásnak), de mivel a feladat szövegéből implicite következik, hogy létezik ezt a két vektort tartalmazó bázis, ezért ennek a külön kimondására és megindoklására nincs szükség egy teljes értékű megoldáshoz.

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + p \cdot x_3 + (p^2 + p + 12) \cdot x_4 &= -6 \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & -3 & p & p^2+p+12 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & p & p^2+p & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p & p^2+p & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p^2+p & -p \end{array}\right)$$

(Az utolsó lépésben a harmadik sor p-szeresét vontuk ki a negyedikből.) (2 pont)
Ha $p = -1$, akkor az utolsó sor $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Ez „tilos sor”, így ilyenkor az egyenletrendszernek nincs megoldása. (2 pont)
Ha $p = 0$, akkor az utolsó sor csupa 0, így elhagyható. Ekkor a Gauss-elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk (két további, vezéregyes fölötti elem „kinullázásával”):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (1 pont)

Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$ „szabad paraméter”, $x_1 = -3 - 6\alpha$, $x_2 = -1 - 2\alpha$, $x_3 = 1$. (2 pont)
Ha viszont $p \neq -1$ és $p \neq 0$, akkor az utolsó sort $(p^2 + p)$-vel osztva kapjuk a lépcsős alakot, majd ebből (négy vezéregyes fölötti elem „kinullázásával”) a redukált lépcsős alakot:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{p+1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3+\frac{6}{p+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1+\frac{2}{p+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{p+1} \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

Így a $p \neq -1, 0$ esetben a megoldás egyértelmű: $x_1 = -3+\frac{6}{p+1}$, $x_2 = -1+\frac{2}{p+1}$, $x_3 = 1$, $x_4 = \frac{-1}{p+1}$.(2 pont)
A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A determinánst a Gauss-elimináció determinánsra vonatkozó változatával számítjuk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-4)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 2 = 8$$

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Arányos részpontszám jár minden, a determináns kiszámításának irányába mutató, hasznos lépésért. A kifejtési tétel puszta alkalmazása (egyéb átalakítások nélkül) legföljebb 2 pontot érhet, mert egyedül ezzel a determináns meghatározása nem válik könnyebbé az eredeti feladatnál.

6. Az $(n \times n)$-es A mátrixra teljesül, hogy ha az A mátrix főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adunk (de a többi elemét nem változtatjuk), akkor nulla determinánsú mátrixot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor az A^3 főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adva is nulla determinánsú mátrixot kapunk. (A^3 azt a háromtényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.)

* * * * *

A feladatbeli feltétel azt mondja, hogy $\det(A+E) = 0$ (ahol E az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli). Ebből pedig azt kell megmutatni, hogy $\det(A^3+E) = 0$. (2 pont)
A számokra vonatkozó $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ azonosság mintájára az $n \times n$-es mátrixokra is igaz az $A^3+E = (A+E)(A^2-A+E)$ azonosság. Ezt a számokra vonatkozó változattal analóg módon lehet belátni, kihasználva a mátrixokra vonatkozó tanult műveleti tulajdonságokat:

$$(A+E)(A^2-A+E) = A\cdot(A^2-A+E)+E(A^2-A+E) = A^3-A^2+A+A^2-A+E = A^3+E \qquad \text{(4 pont)}$$

Alkalmazva erre a determinánsok szorzástételét: $\det(A^3+E) = \det(A+E)\cdot\det(A^2-A+E)$.(3 pont)
Így $\det(A+E) = 0$-ból $\det(A^3+E) = 0$ valóban következik. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. november 27.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Pótolhatók-e az alábbi A és B mátrixok hiányzó elemei úgy, hogy $B = A^{-1}$ teljesüljön? (Ha igen, az összes megoldást adjuk meg. A $\square$ jelek nem feltétlen azonos értékeket jelölnek.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \square & -3 \\ -1 & 3 & \square \\ \square & -4 & \square \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \square \\ 3 & \square & \square \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}$$

* * * * *

Jelölje C az $A \cdot B$ szorzatmátrixot és $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, illetve $c_{i,j}$ a megfelelő mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet.

Mivel $B = A^{-1}$ miatt $A \cdot B = E$, ezért $c_{2,2} = 1$. Így $(-1)\cdot 2 + 3 \cdot b_{2,2} + a_{2,3} \cdot 0 = 1$ adódik a mátrixszorzás definíciójából, amiből $b_{2,2} = 1$. (1 pont)

Hasonlóan adódnak (az eleve adott és közben kiszámolt elemek felhasználásával) az $a_{1,2} = -2$, $a_{3,1} = 2$, $b_{3,1} = -2$, $a_{2,3} = 4$ és $a_{3,3} = -5$ értékek (sorban a $c_{1,2} = 0$, $c_{3,2} = 0$, $c_{1,1} = 1$, $c_{2,1} = 0$ és $c_{3,1} = 0$ elemek felhasználásával). (3 pont)

Ezzel már a teljes A ismert, így B megkapható A^{-1} kiszámításával. De mivel B-ből is ismert már az első két oszlop, a hiányzó harmadikat (jelölje ezt $\underline{x}$) egyszerűbben megkaphatjuk csak az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_3$ lineáris egyenletrendszer megoldásával (ahol $\underline{e}_3$ az egységmátrix harmadik oszlopát jelöli). (2 pont)

A fenti egyenletrendszert Gauss-eliminációval megoldva:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{(3 pont)}$$

Így tehát végül is $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ az egyetlen helyes megoldás. (1 pont)

A megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hibák darabonként 1 pont levonást jelentenek. (Természetesen nem hiba, csak fölösleges a megoldás második felében az A^{-1} kiszámítására vonatkozó teljes Gauss-eliminációt elvégezni.)

2. A 6×6-os A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan B és C mátrixok, amelyekre $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(C) = 2$ és $A = B + C$.

* * * * *

Jelölje A oszlopait $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_6$. Mivel $\mathrm{r}(A) = 4$, ezek közül kiválasztható 4 lineárisan független; legyenek ezek például $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_4$ (az oszlopok számozása a megoldást nem befolyásolja). (2 pont)
Mivel $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_4, \underline{a}_5$ lineárisan összefüggő (hiszen $\mathrm{r}(A) = 4$), ezért az „újonnan érkező vektor lemmája" szerint $\underline{a}_5 \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_4 \rangle$, vagyis létezik az $\underline{a}_5 = \alpha_1\underline{a}_1 + \ldots + \alpha_4\underline{a}_4$ lineáris kombináció. Hasonló okokból létezik az $\underline{a}_6 = \beta_1\underline{a}_1 + \ldots + \beta_4\underline{a}_4$ lineáris kombináció is. (2 pont)
Elkészítjük a kívánt B és C mátrixokat: B oszlopai legyenek sorban $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{0}$, $\underline{0}$, $\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2$ és $\beta_1\underline{a}_1 + \beta_2\underline{a}_2$; hasonlóan, C oszlopai legyenek sorban $\underline{0}$, $\underline{0}$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$, $\alpha_3\underline{a}_3 + \alpha_4\underline{a}_4$ és $\beta_3\underline{a}_3 + \beta_4\underline{a}_4$. (2 pont)
Azonnal látszik, hogy $A = B + C$ igaz (hiszen B és C azonos sorszámú oszlopainak összege mindig A megfelelő oszlopát adja). (1 pont)
Megmutatjuk, hogy $\mathrm{r}(B) = 2$; az $\mathrm{r}(C) = 2$ állítás indoklása ezzel analóg. B oszlopai közül kiválasztható 2 lineárisan független: $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$. Mivel B minden oszlopa benne van az $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle$ generált altérben (vagyis kifejezhető $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ lineáris kombinációjaként) és az FG-egyenlőtlenség szerint $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle$-ben nem létezhet 3 lineárisan független vektor, ezért B oszlopai közül sem választható 3 lineárisan független. Így $\mathrm{r}(B) = 2$ (és $\mathrm{r}(C) = 2$) valóban igaz, amivel az állítást beláttuk. (3 pont)

3. Legyen $f : \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{10}$ lineáris leképezés, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{20}\}$ bázis $\mathbb{R}^{20}$-ban és $\underline{v} \in \mathbb{R}^{10}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ rögzített vektor. Adjuk meg $\dim \mathrm{Ker}\, f$ értékét, ha tudjuk, hogy f a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{20}$ vektorok mindegyikéhez $\underline{v}$-t rendeli.

* * * * *

Állítjuk, hogy $\mathrm{Im}\, f = \langle \underline{v} \rangle$.
Mivel $\underline{v} \in \mathrm{Im}\, f$ (hiszen $\underline{v} = f(\underline{b}_i)$) és $\mathrm{Im}\, f$ altér, ezért $\lambda \cdot \underline{v} \in \mathrm{Im}\, f$ valóban igaz minden λ-ra (de indokolhatjuk ezt azzal is, hogy $f(\lambda\underline{b}_i) = \lambda\underline{v}$). (1 pont)
Legyen most $\underline{w} \in \mathrm{Im}\, f$ tetszőleges, vagyis $\underline{w} = f(\underline{x})$ valamilyen $\underline{x} \in \mathbb{R}^{20}$ vektorra. Mivel $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{20}$ bázis $\mathbb{R}^{20}$-ban, ezért $\underline{x}$ kifejezhető belőlük lineáris kombinációval: $\underline{x} = \beta_1\underline{b}_1 + \ldots + \beta_{20}\underline{b}_{20}$. (2 pont)
Felhasználva az f lineáris leképezés tanult tulajdonságait:

$$\underline{w} = f(\underline{x}) = f(\beta_1\underline{b}_1 + \ldots + \beta_{20}\underline{b}_{20}) = f(\beta_1\underline{b}_1) + \ldots + f(\beta_{20}\underline{b}_{20}) =$$
$$= \beta_1 f(\underline{b}_1) + \ldots + \beta_{20} f(\underline{b}_{20}) = \beta_1\underline{v} + \ldots + \beta_{20}\underline{v} = (\beta_1 + \ldots + \beta_{20})\underline{v}.$$

Így $\underline{w} \in \langle \underline{v} \rangle$, amivel $\mathrm{Im}\, f = \langle \underline{v} \rangle$-t beláttuk. (3 pont)
Vagyis $\underline{v}$ 1 elemű bázis $\mathrm{Im}\, f$-ben (hiszen $\underline{v} \neq \underline{0}$ miatt lineárisan független is), így $\dim \mathrm{Im}\, f = 1$. (2 pont)
Ezért a dimenziótétel szerint $\dim \mathrm{Ker}\, f = 20 - 1 = 19$. (2 pont)

4. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációra és az $\mathbb{R}^3$-beli $B = \{\underline{b}_1 = (1;0;0),\ \underline{b}_2 = (2;1;0),\ \underline{b}_3 = (2;2;1)\}$ bázisra teljesül, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2) = \underline{b}_3$ és $f(\underline{b}_3) = \underline{b}_1$. Adjuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat.

* * * * *

A tanultak szerint az $[f]_B$ első oszlopa $[f(\underline{b}_1)]_B$. Mivel $f(\underline{b}_1) = 0 \cdot \underline{b}_1 + 1 \cdot \underline{b}_2 + 0 \cdot \underline{b}_3$, ezért az $[f]_B$ első oszlopa: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hasonlóan adódik $[f]_B$ másik két oszlopa is: $[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 pont)
Ebből $[f]$-et a tanult $[f]_B = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$ összefüggés segítségével határozzuk meg. Ezt balról B-vel, jobbról B^{-1}-zel szorozva: $B \cdot [f]_B \cdot B^{-1} = [f]$. (2 pont)
Itt B a megadott bázis mátrix megfelelője: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ebből B^{-1}-et Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (2 pont)

Mindebből $[f] = B[f]_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. (3 pont)

5. Sajátértéke-e a 3 az alábbi A mátrixnak? Ha igen, adjuk meg az A egy 3-hoz tartozó sajátvektorát.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Definíció szerint a 3 akkor sajátérték, ha az $A \cdot \underline{x} = 3 \cdot \underline{x}$ egyenletnek van egy $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldása. Más szóval: a $4x_1+3x_2+2x_3 = 3x_1$, $2x_1+4x_2+5x_3 = 3x_2$, $x_1+8x_2+4x_3 = 3x_3$ lineáris egyenletrendszernek van nem csupa nulla megoldása. (3 pont)
Átrendezés után: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$, $x_1 + 8x_2 + x_3 = 0$ (ez az $(A - 3E)\underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszer). (1 pont)
Gauss-eliminációval: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13/5 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \end{array}\right)$ (2 pont)
Így az egyenletrendszer megoldásai: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_1 = -\frac{13}{5}\alpha$, $x_2 = \frac{1}{5}\alpha$. (1 pont)
Például az $\alpha = -5$ választással az $x_1 = 13$, $x_2 = -1$, $x_3 = -5$ értékeket kapjuk. Így a 3 sajátérték és az $\underline{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ egy 3-hoz tartozó sajátvektor. (3 pont)
A megoldást lehet azzal is kezdeni, hogy kiszámítjuk $\det(A - 3E)$ értékét és miután ez 0, a tanult tétel szerint megállapíthatjuk, hogy a 3 sajátérték. De mivel ezután a sajátvektor meghatározásához úgyis a fenti megoldásban írtak vezetnek, erre külön nincs szükség. Ha egy megoldó a $\det(A-3E) = 0$ kiszámításával csak azt állapítja meg, hogy a 3 sajátérték, de hozzá tartozó sajátvektort nem talál, az ezért 3 pontot kaphat; ehhez azonban a sajátvektor keresésére vonatkozó hasznos próbálkozásokból legföljebb 2 további pont adható részpontszámként. Ha egy megoldó a $\det(A - 3E)$ kiszámításakor számolási hiba miatt 0-tól különböző eredményt kap és ezért (ebből helyesen) azt állapítja meg, hogy a 3 nem sajátérték, az mindezért összesen legföljebb 3 pontot kaphat – de ezt is csak abban az esetben, ha a determináns számítása közben vétett hiba jelentéktelen, nem elvi jellegű.

6. Az n pozitív egész számra $43n - 1$ utolsó két számjegye megegyezik $2n + 2$ utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy?

* * * * *

A feladat szövege szerint $43n - 1 \equiv 2n + 2 \pmod{100}$. Átrendezve a $41n \equiv 3 \pmod{100}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
3-mal szorozva: $123n \equiv 9 \pmod{100}$, vagyis $23n \equiv 9 \pmod{100}$. (1 pont)
4-gyel szorozva: $92n \equiv 36 \pmod{100}$, vagyis $-8n \equiv 36 \pmod{100}$. (1 pont)
(-4)-gyel osztva: $2n \equiv -9 \pmod{25}$, ahol a modulust $(4, 100) = 4$ miatt osztottuk 4-gyel. (1 pont)
Ebből $2n \equiv 16 \pmod{25}$, amit 2-vel osztva: $n \equiv 8 \pmod{25}$, ahol $(25, 2) = 1$ miatt a modulus most nem változott. (1 pont)
Ebből $n \equiv 8 \pmod{100}$, $n \equiv 33 \pmod{100}$, $n \equiv 58 \pmod{100}$ vagy $n \equiv 83 \pmod{100}$. (1 pont)
Ellenőrzéssel kiderül, hogy a fentiek közül csak az $n \equiv 83 \pmod{100}$ a helyes, a többi hamis gyök. (Ezek a 4-gyel szorzás miatt jöttek be, ami $(100, 4) > 1$ miatt nem ekvivalens lépés.) Így a megoldás: $n \equiv 83 \pmod{100}$. (3 pont)
Ebből $2n + 2 \equiv 168 \equiv 68 \pmod{100}$ vagyis a keresett két utolsó számjegy: 68. (1 pont)
A hamis gyökök kiszűrésekor felhasználhatjuk, hogy $(41, 100) = 1$ miatt a tanult tétel szerint egyetlen megoldás van modulo 100; így ha $n \equiv 83 \pmod{100}$ megoldás, akkor a többi három nem az. De a lineáris kongruencia nagyon sokféleképp megoldható jól (akár hamis gyököt behozó lépés nélkül is). Aki a fenti megoldást, vagy más, hamis gyököt behozó megoldást ad, de nem foglalkozik a hamis gyök kiszűrésével, az értelemszerűen 3 pontot veszítsen. Ha valaki csak azt ellenőrzi, hogy $(41, 100)|3$, így a lineáris kongruenciának van megoldása, de azt kiszámolni nem tudja, az (az átrendezéssel együtt) összesen 3 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. december 15.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

1. Az e egyenes egyenletrendszere $\frac{2x-3}{4} = \frac{3y+4}{6} = \frac{z}{2}$, az f egyenesé $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{3z-5}{6}$. Párhuzamos-e e és f? Ha igen, akkor határozzuk meg az őket tartalmazó sík egyenletét.

* * * * *

Az e egyenletrendszere $\frac{x-\frac{3}{2}}{2} = \frac{y+\frac{4}{3}}{2} = \frac{z}{2}$ alakú, így irányvektora a $\underline{v} = (2;2;2)$ vektor (hiszen a $P(\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, 0)$ ponton át a $\underline{v}$ irányvektorral egyenest állítva a tanultak szerint épp ezt az egyenletrendszert kapjuk). Hasonlóan, az f egyenletrendszere $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-\frac{5}{3}}{2}$, így a $\underline{v} = (2;2;2)$ ennek is irányvektora. (2 pont)
Mivel e és f irányvektorai párhuzamosak, ezért e és f is azok. (1 pont)
Mivel e-n rajta van a $P(\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, 0)$ pont és f-en a $Q(-1, 4, \frac{5}{3})$, ezért $\overrightarrow{PQ}$ párhuzamos az e-t és f-et tartalmazó S síkkal. (1 pont)
$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = (-\frac{5}{2}, \frac{16}{3}, \frac{5}{3})$, ahol $\underline{q}$ és $\underline{p}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorok. (1 pont)
Párhuzamos még S-sel az egyenesek közös $\underline{v}$ irányvektora is (de $\overrightarrow{PQ}$-val nem), ezért S-nek normálvektora lesz az $\underline{n} = \underline{v} \times \overrightarrow{PQ}$ vektor. (1 pont)
Ezt a tanult képlettel határozzuk meg, de az egyszerűség kedvéért $\underline{v}$ helyett $\frac{1}{2}\underline{v}$-vel, $\overrightarrow{PQ}$ helyett pedig $(-6) \cdot \overrightarrow{PQ}$-val számolunk (ami érdemi különbséget nem jelent):

$$\underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 15 & -32 & -10 \end{vmatrix} = 22\underline{i} + 25\underline{j} - 47\underline{k} = (22; 25; -47). \qquad \text{(2 pont)}$$

A kapott $\underline{n}$ normálvektor és P vagy Q segítségével S egyenlete már a tanult képlettel felírható: $22x + 25y - 47z = -\frac{1}{3}$. (2 pont)
Ha egy megoldó az egyenesek irányvektorait hibásan olvassa ki és ezért arra a következtetésre jut (a hibás irányvektorokból helyesen), hogy e és f nem párhuzamosak, akkor ezért a fenti pontozás szerint járó 1 pontot megkaphatja.

2. Megadható-e $\mathbb{R}^5$-ben öt darab vektor úgy, hogy közülük bármely három által alkotott rendszer lineárisan független legyen, de semelyik négy által alkotott rendszer ne legyen az?

* * * * *

Igen, megadhatók ilyen vektorok.
Ehhez célunk lesz keresni 5 darab $\mathbb{R}^3$-beli vektort úgy, hogy közülük bármely három lineárisan független legyen. Ugyanis ha találunk ilyeneket, akkor ezeket két további 0 koordinátával kiegészítve (utolsó két koordinátaként) a feladat feltételeinek megfelelő $\mathbb{R}^5$-beli vektorokat kapunk. (1 pont)
Valóban, egyrészt a 0-kkal való kiegészítés a vektorhármasok lineáris függetlenségét nem befolyásolja: ha egy ilyen hármas egyik tagja a másik kettőből lineáris kombinációval kifejezhető volna, akkor ugyanez elmondható volna a mindhármuk utolsó két 0 koordinátájának törlése után kapott $\mathbb{R}^3$-beli vektorokra is, amelyeket pedig lineárisan függetlennek választottunk. (2 pont)
Másrészt a megadott vektorok elemei lesznek annak a $W \leq \mathbb{R}^5$ altérnek, amely azokból az $\mathbb{R}^5$-beli vektorokból áll, amelyeknek az utolsó két koordinátája 0. Mivel W-ben generátorrendszert (sőt: bázist) alkot például az $\mathbb{R}^5$-beli standard bázis első három vektora, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt W-ben semelyik négy vektor nem lehet lineárisan független. (2 pont)
A kérdés tehát az, hogyan találhatunk 5 olyan $\mathbb{R}^3$-beli vektort, hogy közülük bármely három lineárisan független legyen.
Tudjuk, hogy három $\mathbb{R}^3$-beli vektor akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem esnek közös origón átmenő síkba. (2 pont)
Vegyünk fel ezért egy tetszőleges, de az origón át nem menő S síkot és válasszunk ezen 5 tetszőleges olyan pontot, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre (például egy konvex ötszög csúcsait). Majd tekintsük az origóból ezekbe a pontokba mutató helyvektorokat. Ezek közül semelyik három nem eshet egy origón átmenő S' síkba (mert különben a három szóban forgó helyvektor végpontja az S és az S' síkok metszésvonalán volna, vagyis egy S-beli egyenesre esnének). (3 pont)
A fenti, geometriai gondolatmenet alapján 5 ilyen térvektor (és ezekből a feladatnak megfelelő $\mathbb{R}^5$-beli vektorok) akár konkrétan is megadható, de erre a feladat teljes értékű megoldásához nincs szükség.

3. Az $\mathbb{R}^4$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyeknek a harmadik koordinátája egyenlő a fölötte álló kettő, a negyedik koordinátája pedig a fölötte álló három koordináta összegével. (Így például a jobbra látható vektor is W-beli.) Határozzuk meg $\dim W$ értékét. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Ha egy $\underline{w} \in W$ vektor első két koordinátája α, illetve β, akkor a harmadik $\alpha+\beta$, a negyedik pedig $2\alpha+2\beta$. Ezért $\underline{w} \in W$ felírható így:
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \\ 2\alpha+2\beta \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ (2 pont)
Ez tehát azt jelenti, hogy a fenti egyenlet jobb oldalán álló két $\mathbb{R}^4$-beli vektor – jelölje ezeket $\underline{a}$, illetve $\underline{b}$ – generátorrendszert alkot W-ben. (2 pont)
Másrészt $\underline{a}, \underline{b}$ lineárisan független rendszer, mert egyik vektor sem skalárszorosa a másiknak. (2 pont)
Így $\underline{a}, \underline{b}$ bázis W-ben, (2 pont)
vagyis $\dim W = 2$. (2 pont)

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 10x_5 &= 5 \\ 5x_1 - 2x_2 + 19x_3 + 14x_4 + x_5 &= 17 \\ 2x_1 + 6x_3 + p \cdot x_4 + (3p-27) \cdot x_5 &= p+2 \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 10 & 5 & 10 & 5 \\ 5 & -2 & 19 & 14 & 1 & 17 \\ 2 & 0 & 6 & p & 3p-27 & p+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 9 & -9 & 12 \\ 0 & 2 & -4 & p-2 & 3p-31 & p \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & p-8 & 3p-25 & p-8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-9 & 0 \end{array}\right) \sim$$

(Az utolsó lépésben a 3-mal osztott harmadik sor $(p-8)$-szorosát vontuk ki a negyedikből.) (2 pont)
Ha $p=9$, akkor az utolsó sor csupa 0, így elhagyható. Ekkor a Gauss-elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk (három további, vezéregyes fölötti elem „kinullázásával"):

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_3=\alpha\in\mathbb{R}$ és $x_5=\beta\in\mathbb{R}$ „szabad paraméterek", $x_1=1-3\alpha+9\beta$, $x_2=1+2\alpha+9\beta$, $x_4=1-2\beta$. (2 pont)
Ha viszont $p\neq 9$, akkor az utolsó sort $(p-9)$-cel osztva kapjuk a lépcsős alakot, majd ebből ismét a vezéregyesek fölötti elemek „kinullázásával" a redukált lépcsős alakot:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(3 pont)}$$

Így a $p\neq 9$ esetben is végtelen sok megoldás van: $x_3=\alpha\in\mathbb{R}$ „szabad paraméter", $x_1=1-3\alpha$, $x_2=1+2\alpha$, $x_4=1$, $x_5=0$. (2 pont)
A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint*. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A definícióban összeadandóként szereplő szorzatok közül csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem tartalmaznak 0 tényezőt, mert a többi nem befolyásolja a determináns értékét. (1 pont)
Egy ilyen szorzatban tehát az utolsó sorból csak az 1-es választható. Ezért az első sorból csak a 2-es választható (mert a negyedik oszlopból már választottunk elemet). Hasonlóan folytatva, a negyedik sorból csak a (-1)-es, a másodikból a 3-as, a harmadikból a (-2)-es választható. Így egyetlen nemnulla szorzat keletkezik: $2\cdot 3\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 1=12$. (3 pont)

Az ehhez a szorzathoz tartozó π permutáció $2,5,3,1,4$ (mert az első sorból a második elemet vettük ki, a másodikból az ötödiket, stb). (2 pont)
π inverziószáma $I(\pi)=5$ (az inverzióban álló elempárok $(2,1)$, $(5,3)$, $(5,1)$, $(5,4)$ és $(3,1)$). (2 pont)
Mivel $I(\pi)$ páratlan, a fenti szorzat negatív előjelet kap. Így a determináns értéke -12. (2 pont)

6. A 4×5-ös A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem minden $1\le i\le 4$ és $1\le j\le 5$ esetén legyen $(-1)^d$, ahol d az $i^{20}+j^{30}$ szám (10-es számrendszerbeli alakjának) első számjegye. Határozzuk meg az $A\cdot A^T$ mátrix főátlójában álló elemek összegét.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

$A\cdot A^T$ főátlójának i-edik eleme az A i-edik sorában álló elemek négyzetösszege. Valóban, a mátrixszorzás definíciója szerint az A i-edik sorának elemeit szorozzuk az A^T i-edik oszlopának elemeivel (és a kapott kéttényezős szorzatokat adjuk össze), de az utóbbiak elemről elemre megegyeznek az előbbiekkel.(4 pont)
Mivel A minden eleme 1 vagy (-1) és egy sorban 5 ilyen elem van, ezért $A\cdot A^T$ főátlójának minden eleme $(\pm1)^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2=5$. (4 pont)
Mivel az $A\cdot A^T$ szorzatmátrix 4×4-es, ezért a főátlójában álló elemek összege $5\cdot4=20$. (2 pont)

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

1. A p paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak és ha igen, akkor számítsuk is ki azt.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-1&0\\3&1&p\end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A harmadik oszlop szerinti kifejtéssel kapjuk, hogy $\det A=p\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\2&-1\end{vmatrix}=p\cdot1=p.$ (1 pont)
Így a tanult tétel szerint A-nak akkor és csak akkor létezik inverze, ha $p\ne0$. (2 pont)
A $p\ne0$ értékekre A^{-1}-et a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\3&1&p&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&4&p&-3&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&p&5&-4&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&5/p&-4/p&1/p\end{array}\right)$$ (6 pont)

Így A^{-1} a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (1 pont)
Megjegyezzük, hogy az inverz létezésének kérdéséhez nem feltétlen szükséges előre kiszámítani $\det A$-t, az a Gauss-eliminációból is kiolvasható: a harmadik lépésben kapott alakból látszik, hogy $\det A=p$ (és előtte csak a determináns értékét meg nem változtató lépéseket végeztünk a vonaltól balra álló mátrixon). Minden, a megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. Ha csak annyi látszik, hogy a megoldó a módszert elvileg ismeri, de nem tudja kivitelezni, az legföljebb 2 pontot érhet (de az inverz létezésének kérdéséért járó 3 pont ettől függetlenül megadható).

2. Igaz-e, hogy minden 4 rangú, 6×6-os mátrixban található két olyan elem, amelyek alkalmas megváltoztatásával elérhető, hogy a kapott mátrix rangja 6 legyen?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az állítás igaz.
Legyen A 4 rangú, 6×6-os mátrix. Ekkor a determinánsrang definíciója szerint A-nak van 4×4-es, nemnulla determinánsú részmátrixa. A megoldás leírásának egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy ez épp a bal felső sarokban álló 4×4-es részmátrix (ez a megoldás menetét érdemben nem befolyásolja). (2 pont)
Jelölje a bal felső sarokban álló 5×5-ös részmátrixot M. Célunk $a_{5,5}=m_{5,5}$ értékét alkalmasan megváltoztatni úgy, hogy $\det M\ne0$ legyen. Ehhez a kifejtési tételt használjuk M ötödik sorára:

$\det M = m_{5,1} \cdot M_{5,1} + m_{5,2} \cdot M_{5,2} + \ldots + m_{5,5} \cdot M_{5,5}$ (ahol $M_{i,j}$ a megfelelő előjeles aldeterminráns értéke). Itt $M_{5,5} \neq 0$, mert ez épp az A bal felső sarkában álló 4×4-es részmátrix determinánsa. (2 pont)
Ezért $m_{5,5} = a_{5,5}$ értékének alkalmas megváltoztatásával $\det M$-et tetszőleges értékre beállíthatjuk: például $\det M = 1$ az $m_{5,5} = \frac{1}{M_{5,5}} \cdot (1 - m_{5,1} \cdot M_{5,1} - \ldots - m_{5,4} \cdot M_{5,4})$ választással biztosítható. (2 pont)
Most a fenti gondolatmenetet megismételhetjük a teljes A mátrixra: mivel $\det M \neq 0$, ezért a kifejtési tételből következően $a_{6,6}$ alkalmas megváltoztatásával $\det A$ tetszőleges értékre, így 0-tól különbözőre is beállítható. (2 pont)
Mivel az $a_{5,5}$ és $a_{6,6}$ megváltoztatásával kapott A' mátrixra $\det A' \neq 0$, ezért A' rangja (a determinánsrang definíciójából közvetlenül adódóan) valóban 6. (2 pont)

3. Legyen $f : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^{10}$-ben megadható 7 lineárisan független vektor úgy, hogy f ezek mindegyikéhez azonos értéket rendel.

b) Igaz-e ez az állítás 7 helyett 8-cal?

* * * * *

Mivel $\mathrm{Im}\, f \leq \mathbb{R}^3$, ezért $\dim \mathrm{Im}\, f \leq 3$. (1 pont)
Így a dimenziótételből $\dim \mathrm{Ker}\, f \geq 7$ adódik. (1 pont)
Ezért $\mathrm{Ker}\, f$ tetszőleges bázisát véve legalább 7 lineárisan független vektort kapunk, amelyeknek a képe $\underline{0}$. Ez tehát az a) pont állítását bizonyítja. (1 pont)
De valójában az állítás 7-helyett 8-cal is igaz.
Ha $\dim \mathrm{Ker}\, f \geq 8$, akkor ez a fenti gondolatmenetből rögtön következik, ezért feltehetjük, hogy $\dim \mathrm{Ker}\, f = 7$. Így választhatunk egy $\underline{v} \notin \mathrm{Ker}\, f$ vektort és egy $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_7$ bázist $\mathrm{Ker}\, f$-ben. (1 pont)
Állítjuk, hogy a $\underline{v}, \underline{v} + \underline{b}_1, \underline{v} + \underline{b}_2, \ldots, \underline{v} + \underline{b}_7$ vektorok megfelelnek a feladat feltételeinek.
Mivel $f(\underline{v} + \underline{b}_i) = f(\underline{v}) + f(\underline{b}_i)$ a lineáris leképezés tanult tulajdonsága miatt és $\underline{b}_i \in \mathrm{Ker}\, f$ miatt $f(\underline{b}_i) = \underline{0}$, ezért $f(\underline{v} + \underline{b}_i) = f(\underline{v})$. Így f a felsorolt nyolc vektorhoz valóban azonos értéket rendel. (1 pont)
Meg kell még mutatnuk, hogy a felsorolt vektorok lineárisan függetlenek. Ehhez vegyük egy tetszőleges, $\underline{0}$-t adó lineáris kombinációjukat:

$$\lambda_0 \cdot \underline{v} + \lambda_1 \cdot (\underline{v} + \underline{b}_1) + \ldots + \lambda_7 \cdot (\underline{v} + \underline{b}_7) = \underline{0}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Átrendezve:

$$(\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_7) \cdot \underline{v} + \lambda_1 \cdot \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_7 \cdot \underline{b}_7 = \underline{0}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Legyen $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_7$. Ha $\Lambda \neq 0$, akkor átrendezés után $\underline{v} = -\frac{\lambda_1}{\Lambda} \cdot \underline{b}_1 - \ldots - \frac{\lambda_7}{\Lambda} \cdot \underline{b}_7$ adódik. Ebből viszont $\underline{v} \in \mathrm{Ker}\, f$ következne, ellentmondás. (1 pont)
Így $\Lambda = 0$, amiből $\lambda_1 \cdot \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_7 \cdot \underline{b}_7 = \underline{0}$ adódik. Mivel $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_7$ lineárisan függetlenek (hiszen bázist alkotnak $\mathrm{Ker}\, f$-ben), ezért ebből $\lambda_1 = \ldots = \lambda_7 = 0$ következik. (1 pont)
Ebből $\Lambda = 0$ miatt $\lambda_0 = 0$ is adódik, így $\underline{v}, \underline{v} + \underline{b}_1, \underline{v} + \underline{b}_2, \ldots, \underline{v} + \underline{b}_7$ valóban lineárisan függetlenek. (1 pont)

4. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint az alábbi mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_2$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_3) = (10; 20; 30)$.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Legyen $\underline{v} = \underline{b}_1 + \underline{b}_3$. Ekkor $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (hiszen $\underline{v} = 1 \cdot \underline{b}_1 + 0 \cdot \underline{b}_2 + 1 \cdot \underline{b}_3$). (2 pont)
$[f]_B$ definíciójából $[f(\underline{v})]_B = [f]_B \cdot [\underline{v}]_B$ következik. (2 pont)
Elvégezve a mátrixszorzást:

$$[f(\underline{v})]_B = [f]_B \cdot [\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ebből tehát $f(\underline{v}) = 0 \cdot \underline{b}_1 + 2 \cdot \underline{b}_2 + 0 \cdot \underline{b}_3 = 2 \cdot \underline{b}_2$ következik. (2 pont)
Mivel a feladat feltétele szerint $f(\underline{v}) = (10; 20; 30)$, ebből $\underline{b}_2 = (5; 10; 15)$ adódik. (2 pont)

5. a) Sajátvektora-e az alábbi $\underline{v}$ vektor az alábbi A mátrixnak?
b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét és az összes, ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Elvégezve az $A \cdot \underline{v}$ szorzást:

$$A \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Látszik, hogy $A \cdot \underline{v} = 3 \cdot \underline{v}$, így $\underline{v}$ sajátvektora A-nak (1 pont)
és $\lambda = 3$ sajátértéke A-nak. (1 pont)
A $\lambda = 3$-hoz tartozó sajátvektorok definíció szerint az $A \cdot \underline{x} = 3 \cdot \underline{x}$ egyenlet $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldásai. Más szóval: a $4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3x_1$, $-2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3x_2$, $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3x_3$ lineáris egyenletrendszer csupa nullától különböző megoldásait keressük. (3 pont)
Átrendezés után: $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$, $-2x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 0$, $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$ (ez az $(A - 3E)\underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszer). (1 pont)
Látszik, hogy az első egyenletnek a második (-2)-szerese, a harmadik pedig azonos vele, így az utolsó két egyenlet elhagyható. (1 pont)
Így a 3-hoz tartozó sajátvektorok azok az $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorok, amelyek koordinátáira $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$ teljesül. (2 pont)
Ha egy megoldó a 3-hoz tartozó sajátvektorok keresésekor csak annyit állapít meg, hogy a megadott $\underline{v}$ minden nemnulla skalárszorosa sajátvektor, az (az első 3 pont mellett) ezért további 1 pontot kaphat. Megjegyezzük, hogy A-nak sajátértéke még a 3 mellett a $\lambda = -7$ is, az ehhez tartozó sajátvektorok az $(1; -2; 1)^T$ vektor nemnulla többszörösei. Így elvileg ezek megadása is a feladat teljes értékű megoldását jelentené, de a (-7) sajátérték megtalálásához a harmadfokú karakterisztikus polinom gyökeit, vagyis a $\lambda^3 + \lambda^2 - 33\lambda + 63 = 0$ egyenlet megoldásait kellene megtalálni, ami nyilván jóval kellemetlenebb feladat.

6. Egy egész szám 109-cel vett osztási maradéka 5-tel kisebb, mint a szám 18-szorosának a 109-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 109-cel osztva?

* * * * *

A keresett számot n-nel jelölve a feladat szövege szerint $18n - 5 \equiv n \pmod{109}$, amit átrendezve a $17n \equiv 5 \pmod{109}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
Mivel 7 és 109 relatív prímek, 7-tel szorozva az eredetivel ekvivalens kongruenciát kapunk: (1 pont)
$119n \equiv 35 \pmod{109}$, vagyis $10n \equiv 35 \pmod{109}$. (2 pont)
Mivel 5 és 109 is relatív prímek, 5-tel osztva a modulus nem változik és az előzővel ekvivalens kongruenciát kapunk: (1 pont)
$2n \equiv 7 \pmod{109}$. (2 pont)
A jobboldalhoz 109-et adva $2n \equiv 116 \pmod{109}$. (1 pont)
2 és 109 is relatív prímek, így 2-vel osztva a modulus nem változik és az előzővel ekvivalens kongruenciát kapunk: (1 pont)
$n \equiv 58 \pmod{109}$. (1 pont)
Így a keresett szám 58 maradékot ad 109-cel osztva. A lépések ekvivalenciája helyett hivatkozhatunk arra is, hogy $(17, 109) = 1$ miatt egyetlen megoldás kell legyen modulo 109, vagy ellenőrizhetjük is a kapott eredményt. (Viszont a három érv közül valamelyikre szükség van annak kizárásához, hogy a lineáris kongruenciának nincs megoldása.) Ha egy megoldó csak azt ellenőrzi, hogy $(17, 109)|5$, így a lineáris kongruenciának van megoldása, de azt kiszámolni nem tudja, az (az átrendezéssel együtt) összesen 3 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb.