

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok

2000. november 2.

1. Adjuk meg, az t paraméter értékétől függően, az alábbi egyenletrendszer megoldását.

$$\begin{aligned}x + 3y - z &= 2 \\2x - 2y + 6z &= 12 \\-3x - y + t \cdot z &= 3\end{aligned}$$

2. Határozzuk meg a 3 dimenziós térben az $(1, 1, 1)$ és $(2, 2, 4)$ pontokon átmenő egyenesnek és a $2x + 3y - z = 2$ egyenletű síknak a metszetét.
3. Mely z komplex számokra teljesül a $z^2 - iz + 2 = 0$ egyenlet?
4. Mi a $z = (1 - i)^{2000} - i(1 + i)^{2002}$ komplex szám kanonikus alakja?
5. Legyen A egy n sorból és n oszlopból álló valós mátrix, a k -edik sorának j -edik elemét jelölje a_{kj} . Legyen B az az n -szer n -es mátrix, amiben a k -edik sor j -edik eleme $b_{kj} = \frac{k}{j}a_{kj}$ ($1 \leq k, j \leq n$). Mennyi B determinánsa, ha tudjuk, hogy A determinánsa 1?
6. A valós számhármassok vektorterében alteret alkotnak-e azok az (x_1, x_2, x_3) vektorok, melyekre $x_1 = 2x_2 - 3x_3$?
7. Legyen a V térnek a_1, a_2, \dots, a_n egy bázisa. Tekintsük a következő n vektort:

$$\begin{aligned}b_i &= a_i + a_{i+2} \quad \text{ha } i = 1, 2, \dots, n-2, \\b_{n-1} &= a_{n-1} + a_1, \\b_n &= a_n + a_2.\end{aligned}$$

(a) $n = 3$ esetén bázist alkotnak-e a b_1, b_2, \dots, b_n vektorok?

(b) $n = 4$ esetén bázist alkotnak-e?

(Szorgalmi feladat: általában n -re bázist alkotnak-e ?)

8. Legyen P_5 a legfeljebb ötödfokú valós együtthatós polinomok tere. Vegyük azt az $f : P_5 \rightarrow P_5$ leképezést, melynél $f(p(x)) = \alpha \cdot p'(x) + \beta$ valamely rögzített α, β valós számokra. Határozzuk meg az összes olyan α, β párt, amire az f leképezés lineáris lesz. Ha f lineáris leképezés, adjuk meg egy mátrixát is.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok

2000. december 7.

1. Határozzuk meg x minden értékére az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix}$$

mátrix rangját!

2. Egy $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformációt tükrözésnek hívunk, ha minden $v \in V$ vektorra $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = v$. Bizonyítsuk be, hogy tükrözés mátrixának determinánsa nem lehet 0.
3. Az $x_1^2 + ax_1x_2 + 4x_2^2$ kvadratikus alak az a paraméter értékétől függően mikor milyen definit lesz?
4. Bontsuk a sík összes egyenesének halmazát két részhalmazra: H_1 -et alkossák az origón átmenő egyenesek, H_2 -t a többi. Határozzuk meg H_1 és H_2 számosságát!
5. Tíz gyerek hányféleképpen állítható úgy sorba, hogy Jancsi és Juliska egymás mellett álljanak?
6. Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másiktól egy „forgatással” megkapható, azaz ha az egyik a (b_1, b_2, b_3, b_4) akkor a másik a (b_2, b_3, b_4, b_1) sorozathoz tartozó pont.
7. Hány olyan páronként nem izomorf 6 pontú összefüggő egyszerű gráf létezik, melyben két másodfokú és négy harmadfokú pont van?
8. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?