Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzh, második zárthelyi pótlása — pontozási útmutató
2021. december 13.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot éro megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Döntsük el, hogy létezik-e az alábbi A mátrixnak inverze. Ha igen, határozzuk meg A^{-1}-et és A^{-1} determinánsát.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Az inverzet Gauss-eliminációval számítjuk ki, menet közben majd arra is fény derül, hogy létezik-e. Az elimináció lépései:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -25 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -20 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -25 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 30 & -18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -25 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

4 pont jár az elimináció hibátlan elvégzéséért és az inverz leolvasásáért, 2 pont pedig azért, ha valaki megmutatja, hogy létezik az inverz, hiszen a bal oldalon létrejött az egységmátrix, tehát a kiindulási mátrix determinánsa nem volt 0, így csakugyan létezik inverze.

A determinánsok szorzástétele alapján $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. (2 pont)
A Gauss-elimináció lépéseiből könnyen leolvasható, hogy a lépcsős alak eléréséig csak egy

olyan lépést tettünk, amely megváltoztatta a determinánst, ez a -1-gyel szorzás volt, így A determinánsa -1, tehát A^{-1} determinánsa is -1. (2 pont)

Az utolsó 2 pont annak jár, akinek csakugyan szándékában áll az inverz determinánsát a determinánsok szorzástételére alapozva kiszámítani (az eredeti mátrix determinánsát az inverz létezésének eldöntésére is ki lehet számítani, de csak ezért nem jár az utolsó 2 pont). Ehelyett természetesen ki lehet számítani az inverz determinánsát (és így megszerezni az utolsó 4 pontot) Gauss-eliminációval is, ennek lépései:

$$\begin{vmatrix} 30 & -18 & 5 \\ -25 & 15 & -4 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 30 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{6} \\ -25 & 15 & -4 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 30 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} \end{vmatrix} = -30 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix} =$$

$$= -30 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = -30 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le, elvi hibákért 4 pontot. Aki elszámolja az inverzet és így rossz mátrix determinánsát számítja ki (helyesen), az megkaphatja a maximális 4 pontot ezért, amennyiben a feladat nem lett egyszerűbb. Ellenkező esetben 1-3 pontot adjunk, a számolás nehézségétől függően.

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} px_1 + px_2 + px_3 &= p \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + (p+3)x_3 &= 3 \end{aligned}$$

* * * * *

Az egyenletrendszert a Gauss-elimináció lépéseit használva oldjuk meg. A kibővített együtthatómátrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & p & p & p \\ 2 & 6 & 10 & 6 \\ 3 & 3 & p+3 & 3 \end{array}\right)$$ (0 pont)

Ha $p = 0$, akkor az első sor csupa 0 sor, így törölhetjük és a

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 10 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$ kibővített együtthatómátrixot kapjuk, amin az elimináció lépéseit már a tanult sorrendben hajtjuk végre. (1 pont)

Folytatva az eliminációt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$ (1 pont)

A megoldás innen $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = \alpha, x_2 = 1 - 2\alpha$. (2 pont)

Ha $p \neq 0$, akkor osztjuk vele az első sort, a kapott kibővített együtthatómátrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & 6 \\ 3 & 3 & p+3 & 3 \end{array}\right)$$ (1 pont)

Folytatva az eliminációt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{array}\right). \qquad \text{(0 pont)}$$

Mivel $p \neq 0$, oszthatunk vele. (2 pont)

Tovább folytatva az eliminációt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right). \qquad \text{(2 pont)}$$

A megoldás innen $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$. (1 pont)

3. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát a q valós paraméter minden értékére.

$$\begin{pmatrix} 0 & q & 1 & 3 \\ 2 & q & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A harmadik oszlop q-szorosát a második oszlopból kivonva a determináns értéke nem változik:

$$\begin{vmatrix} 0 & q & 1 & 3 \\ 2 & q & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 6-3q & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}. \qquad \text{(3 pont)}$$

Ez utóbbi determinánst a kifejtési tétel segítségével számítjuk ki. Fejtsük ki a determinánst a második oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 6-3q & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -(6-3q) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}. \qquad \text{(4 pont)}$$

Ennek értéke (ismét a kifejtési tételt használva) $-(6-3q)(1 \cdot (4-3) + 7 \cdot (0-2)) = 13(6-3q) = 39(2-q)$. (3 pont)

A determinánst természetesen máshogy, pl. Gauss-eliminációval is ki lehet számítani. Számolási hibákért 1 pontot, az elvi hibákért 4 pontot vonjunk le darabonként. Ha valaki kifejtési tételt használ, de nem jut el megoldásig, a tétel helyes használatáért (vagy felírásáért) kaphat 2 pontot, ha a tételt olyan sorra vagy oszlopra alkalmazza, amelyben két 0 is van, akkor további 2 pontot.

4. Határozzuk meg a 3. feladat mátrixának rangját a q valós paraméter minden értékére.

* * * * *

Első megoldás. A 3. feladatban láttuk, hogy a mátrix determinánsa $39(2-q)$, vagyis ha $q \neq 2$, akkor nem 0. A determinánsrang definíciója szerint ilyenkor a keresett rang 4. (4 pont)

$q = 2$ esetén használjunk a változatosság kedvéért Gauss-eliminációt.

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3/2 & 3 \\ 0 & -1 & -1/2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$
\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 3 & 3/2 & 3 \\ 0 & -1 & -1/2 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 13/2 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 13/2 \end{pmatrix} =
$$

$$
\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(4 pont)}
$$

Az utolsóként kapott mátrix lépcsős alakú és 3 vezéregyes található benne, így a keresett rang q=2 esetén 3. (2 pont)

Második megoldás. A rangot Gauss-eliminációval határozzuk meg, de előtte felcseréljük az első és a harmadik, illetve a második és a negyedik sort, majd a második és a negyedik oszlopot. Ezek a lépések a rangot a tanultak szerint nem változtatják meg.

$$
\mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & q & 1 & 3 \\ 2 & q & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & q \\ 2 & 4 & 1 & q \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & q \\ 2 & 4 & 1 & q \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & q \\ 0 & -2 & -1 & q-4 \end{pmatrix} =
$$

$$
\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 3 & 1 & q \\ 0 & -2 & -1 & q-4 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 7/4 & q+3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & q-5 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & (4q+6)/7 \\ 0 & 0 & -3/2 & q-5 \end{pmatrix} =
$$

$$
\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & (4q+6)/7 \\ 0 & 0 & 0 & (6q+9)/7+q-5 \end{pmatrix}. \qquad \text{(4 pont)}
$$

Az utolsó sorban a jobb alsó elemmel pontosan akkor oszthatunk, ha $(6q+9)/7+q-5 \neq 0$, (1 pont)

vagyis ha $6q+9+7(q-5) \neq 0$, ami $13q-26 \neq 0$, azaz $q \neq 2$ esetén teljesül. (1 pont)

Ilyenkor a kapott lépcsős alakban (1 pont)

4 vezéregyesünk lesz, így a rang 4. (1 pont)

$q = 2$ esetén az utolsó sort töröljük, a kapott lépcsős alakban (1 pont)

lévő 3 vezéregyesre tekintettel a rang 3. (1 pont)

5. Legyen A 5 rangú 5×5-ös mátrix. Mutassuk meg, hogy A előállítható 25 darab 1 rangú mátrix összegeként (vagyis léteznek olyan 1 rangú $A_1, A_2, \ldots, A_{25}$ mátrixok, melyekre $A_1+A_2+\ldots+A_{25} = A$).

* * * * *

Legyen A_i az a mátrix, melynek i. sora azonos A i. sorával, a többi eleme pedig 0. (2 pont)

A_i rangja 1, (1 pont)

hiszen négy sora csupa nullákból áll, egy pedig nem (1 pont)

(A-nek nem lehet csupa 0 sora, hiszen a rangja 5). (2 pont)

Nyilvánvaló, hogy $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = A$, (1 pont)

legyen most $B_i = \frac{A_i}{5}$. (1 pont)

Ekkor a B_i mátrixok rangja is 1, (1 pont)
így A-t elő tudjuk állítani 25 darab 1 rangú mátrix összegeként, ha a fenti (A_i-k összegeként történő) előállításban minden A_i-t 5 darab B_i-re cserélünk. (1 pont)

Aki A-t olyan $A_{i,j}$ mátrixok összegeként állítja elő, melyekben az i. sor j. eleme azonos A i. sorának j. elemével, a többi eleme pedig 0, 4 pontot kapjon (ezek a mátrixok lehetnek 1 és 0 rangúak is).

6*. Igaz-e, hogy ha egy 5×5-ös A mátrix minden 2×2-es részmátrixának van inverze, akkor A-nak is van inverze?

* * * * *

Az állítás nem igaz. (0 pont)
Legyen például A az a mátrix, melyben az i. sor j. eleme $5(i-1)+j$ (vagyis az elemek soronként balról jobbra felsorolva $1, 2, 3, \ldots, 25$). (2 pont)
Ekkor A sorai lineárisan összefüggők, mert (pl.) az 1. és a 3. sor összege a 2. sor kétszerese. (1 pont)
A determinánsa így a tanultak szerint 0, (1 pont)
vagyis ugyancsak a tanultak szerint nincs inverze. (1 pont)
Legyen most a és b két tetszőlegesen választott sor sorszáma ($a < b$), c és d pedig tetszőlegesen választott oszlop sorszáma ($c < d$). Az ezen sorok és oszlopok által meghatározott 2×2-es részmátrix determinánsa $(5(a-1)+c)(5(b-1)+d) - (5(b-1)+c)(5(a-1)+d) = 5(a-1)(d-c) + 5(b-1)(c-d) = 5(d-c)(a-b)$, (2 pont)
ami nem 0, (2 pont)
így A csakugyan ellenpélda az állításra, hiszen minden 2×2-es részmátrixának van inverze. (1 pont)

Aki helyes ellenpéldát ad meg, de csak azt igazolja, hogy a mátrix nem invertálható, az megkaphatja a fenti megoldásban ennek megfelelő pontokat (helytelen ellenpélda esetén ezek nem járnak).