Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2015. december 7.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $Q(9;-2;5)$ ponton és a p valós paraméter minden értéke esetén merőleges a $7x-2y+p\cdot z=4$ egyenletű síkra.

* * * * *

Első megoldás. A $7x-2y+p\cdot z=4$ egyenletű sík egy normálvektorát kiolvasva: $\underline{n}_p=(7;-2;p)$.(1 pont)
A keresett sík normálvektora legyen $\underline{m}=(a,b,c)$. A síkok merőlegessége ekvivalens a normálvektoraik merőlegességével, így $\underline{n}_p$ merőleges $\underline{m}$-re a p minden értékére. (2 pont)
Ez pedig a skaláris szorzatuk nulla voltával ekvivalens: $\underline{n}_p\cdot\underline{m}=0$ minden p-re . (1 pont)
Ezt kifejtve: $7a-2b+p\cdot c=0$ minden p-re. (1 pont)
Ebből $c=0$ következik (különben a és b értékét bárhogyan rögzítve a $7a-2b+p\cdot c$ kifejezés minden valós értéket felvehetne). (2 pont)
A $7a-2b=0$ egyenletnek megoldása például $a=2$, $b=7$. Így a keresett síknak normálvektora például $\underline{m}=(2;7;0)$ (mert erre $\underline{n}_p\cdot\underline{m}=0$ valóban minden p-re teljesül). (1 pont)
Ebből és a megadott Q-ból felírható a keresett sík egyenlete: $2x+7y=4$. (2 pont)

Második megoldás. A keresett sík merőleges például a $7x-2y+z=4$ és a $7x-2y=4$ egyenletű síkokra is ($p=1$, illetve $p=0$ paraméterválasztással). (1 pont)
Ezeknek a normálvektorait az egyenletükből kiolvasva: $\underline{n}_1=(7;-2;1)$, illetve $\underline{n}_2=(7;-2;0)$. (1 pont)
Mivel a síkok merőlegessége ekvivalens a normálvektoraik merőlegességével, ezért a keresett sík normálvektora merőleges $\underline{n}_1$-re és $\underline{n}_2$-re. (2 pont)
Ezért az $\underline{n}_1\times\underline{n}_2$ vektoriális szorzat normálvektora lesz a keresett síknak. (2 pont)
Ezt a tanult módon meghatározva: $\underline{n}_1\times\underline{n}_2=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 7 & -2 & 1\\ 7 & -2 & 0\end{vmatrix}=2\underline{i}+7\underline{j}+0\underline{k}=(2;7;0)$. (2 pont)
Ebből és a megadott Q-ból felírható a keresett sík egyenlete: $2x+7y=4$. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a fenti két megoldás tartalmilag különbözik annyiban, hogy míg az elsőből egy ilyen sík létezésének a ténye is kiderül, addig a második eleve feltételezi azt. A feladat szövege azonban implicite állítja egy ilyen sík létezését, így ennek a hiányáért nem vonunk le pontot. Így ha egy megoldó az első megoldást írja, de ekvivalencia helyett csak egyirányú következtetéseket von le, azt is teljes értékű megoldásnak tekintjük.

2. Legyen $F = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k\}$ lineárisan független rendszer, $G = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \ldots, \underline{g}_m\}$ pedig generátorrendszer a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. Mutassuk meg, hogy F kiegészíthető néhány (esetleg nulla) G-beli vektorral úgy, hogy ezáltal V egy bázisát kapjuk.

* * * * *

A tanultak szerint, ha egy V-beli lineárisan független rendszert mindig egy olyan vektorral bővítünk, ami nem tartozik a korábbi vektorok generált alteréhez, akkor a rendszer lineáris függetlensége megmarad és véges sok lépés után V egy bázisát kapjuk. (1 pont)
A feladat megoldásához tehát azt kell megmutatni, hogy ez az eljárás elvégezhető úgy is, hogy mindig a G egy elemével bővítünk. (1 pont)
Tegyük fel, hogy néhány (esetleg 0) bővítés után most az $F' = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_t\}$ lineárisan független rendszernél tartunk. Azt kell megmutatni, hogy ha az eljárás még nem állt meg (vagyis F' még nem bázis), akkor G-nek van az $\langle \underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_t \rangle$ generált altérhez nem tartozó eleme. (2 pont)
Tegyük fel ezért indirekt, hogy az $\langle \underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_t \rangle$ altér tartalmazza G-t. (2 pont)
Ekkor tehát az F' elemeiből G minden eleme kifejezhető lineáris kombinációval. Viszont mivel G generátorrendszer V-ben, ezért G elemeiből V minden vektora kifejezhető lineáris kombinációval. Ezekből együtt következik, hogy F' elemeiből V minden vektora is kifejezhető lineáris kombinációval, vagyis F' generátorrendszer V-ben. (2 pont)
Így F' lineárisan független generátorrendszer, vagyis bázis V-ben. Ez ellentmond annak a feltevésünknek, hogy az eljárás F'-vel még nem állt meg és így bizonyítja a feladat állítását. (2 pont)

3. A W halmaz álljon azokból a $\underline{v} \in \mathbb{R}^5$ vektorokból, amelyekre teljesül, hogy $\underline{v}$ bármely két koordinátájának a különbsége egész szám. Döntsük el, hogy W alteret alkot-e $\mathbb{R}^5$-ben és ha igen, akkor határozzuk meg a dimenzióját.

* * * * *

A $\underline{v} = (0; 0; 0; 0; 1)^T$ vektor például W-beli (hiszen egész számok különbsége is egész). (2 pont)
Azonban az $\frac{1}{2}\underline{v} = (0; 0; 0; 0; \frac{1}{2})^T$ vektor már nem W-beli, hiszen (például) az utolsó két koordináta különbsége nem egész. (4 pont)
Mivel az altér definíciója szerint egy altér egy $\underline{v}$ elemére $\lambda \cdot \underline{v}$-nek is az altérhez kellene tartoznia minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, ezért W nem altér. (4 pont)
A W halmaz az összeadásra zárt, így W az altér definíciójának másik feltételét egyébként teljesíti. Ha egy megoldó ezt megmutatja (és nem csak kijelenti), akkor ezért adható legföljebb 3 pont akkor is, ha ebből (és esetleg a skalárral szorzásra való zártságra vonatkozó hibás indoklásból) azt a téves következtetést vonja le, hogy W altér. Ez a pontszám azonban nem jár akkor, ha a W altér voltában való (téves) hit nyomán a megoldó a dimenzió meghatározására tett kísérletei közben olyan állítás(oka)t ír, amely(ek)ből az alterekkel kapcsolatos alapfogalmak körüli súlyos tájékozatlanságára lehet következtetni. (Ha például egy megoldó – tévesen – azt állítja, hogy W-ben bázis az $\mathbb{R}^5$-beli standard bázis – hiszen W-beli vektorokból áll, lineárisan független és W minden vektora kifejezhető belőle –, akkor erre a fenti megjegyzés nem vonatkozik és a 3 pont megadható, mert ez a „gondolat" többé-kevésbé logikus folytatása annak a téves állításnak, hogy W altér.) Azonban egy ilyen, téves következtetésre jutó megoldásért legföljebb a fenti 3 pont adható meg, a (téves) következtetés levonásáért nem adunk pontot (akkor sem, ha az a korábbiakból egyébként logikusan következne).

4. Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 14x_3 &= -17 \\ 2x_1 - 6x_2 - 28x_3 + p \cdot x_4 &= q - 34 \\ 3x_1 - 7x_2 - 36x_3 + 4p \cdot x_4 &= 4q - 37 \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -14 & 0 & -17 \\ 2 & -6 & -28 & p & q-34 \\ 3 & -7 & -36 & 4p & 4q-37 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -14 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \\ 0 & 2 & 6 & 4p & 4q+14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -14 & 0 & -17 \\ 0 & 2 & 6 & 4p & 4q+14 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -14 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 3 & 2p & 2q+7 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Ha $p = 0$ és $q \neq 0$, akkor az utolsó sor „tilos sor”, így az egyenletrendszernek nincs megoldása. (2 pont)
Ha $p = 0$ és $q = 0$, akkor az utolsó sor elhagyásával kapjuk a lépcsős alakot, majd ebből az első sor (-3)-as elemének „kinullázásával” a redukált lépcsős alakot:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -14 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right) \quad \text{(1 pont)}$$

Így a $p = q = 0$ esetben az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ és $x_4 = \beta \in \mathbb{R}$ szabad paraméterek és $x_1 = 4 + 5\alpha$, $x_2 = 7 - 3\alpha$. (2 pont)
Maradt a $p \neq 0$ eset vizsgálata. Ekkor a harmadik sor p-vel való osztása után kapjuk a lépcsős alakot, majd az első sor (-3)-as és a második sor $2p$ elemének a „kinullázásával” a redukált lépcsős alakot:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -14 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 3 & 2p & 2q+7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q/p \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q/p \end{array}\right) \quad \text{(1 pont)}$$

Így a $p \neq 0$ esetben is végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ szabad paraméter és $x_1 = 4 + 5\alpha$, $x_2 = 7 - 3\alpha$, $x_4 = q/p$. (2 pont)
A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A definícióban összeadandóként szereplő szorzatok közül csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem tartalmaznak 0 tényezőt, mert a többi nem befolyásolja a determináns értékét. (1 pont)
Egy ilyen szorzatban tehát a harmadik oszlopból csak az 5-ös választható. Ezért az első oszlopból már csak az 1-es választható (hiszen az első sorból már vettünk elemet) és így a negyedik oszlopból csak a 2-es. (1 pont)
Eddig a második és ötödik oszlopból, illetve a második és negyedik sorból nem választottunk elemet, így kétféleképp fejezhető be a 0-t nem tartalmazó bástyaelhelyezés kiválasztása: a második oszlopból a 2-est és az ötödikből a 3-ast választva, vagy a másodikból az 1-est és az ötödikből a 6-ost. (1 pont)
Így két darab, nullát nem tartalmazó szorzat van: $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1$, illetve $5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$. (1 pont)
Az elsőhöz tartozó π permutáció $3, 2, 4, 5, 1$ (mert az első sorból a harmadik elemet vettük ki, a másodikból a másodikat, stb). (1 pont)
π inverziószáma $I(\pi) = 5$ (az inverzióban álló elempárok $(3,2)$, $(3,1)$, $(2,1)$, $(4,1)$ és $(5,1)$). (1 pont)
Mivel $I(\pi)$ páratlan, az első szorzat negatív előjelet kap. (1 pont)
Hasonlóan, a második szorzathoz tartozó permutáció a $3, 5, 4, 2, 1$, ennek az inverziószáma 8, így a szorzat előjele pozitív. (1 pont)
Végül is tehát a determináns értéke $-5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. (2 pont)

6. Az 5×3-as A mátrixra teljesül, hogy az $A \cdot A^T$ mátrix bal alsó sarkában álló elem 2015. Mi állhat az $A \cdot A^T$ mátrix jobb felső sarkában?

* * * * *

Jelölje az A első sorának három elemét sorban a, b és c, az ötödik sor elemeit sorban d, e és f.
Ekkor az A^T első oszlopában álló elemek fölülről lefelé a, b és c. (2 pont)
Így a mátrixszorzás definíciója szerint az $A \cdot A^T$ bal alsó sarkában álló elem $da + eb + fc$. (2 pont)
Hasonlóan, az A^T utolsó oszlopának elemei fölülről lefelé d, e és f, (2 pont)
így az $A \cdot A^T$ jobb felső sarkában álló elem $ad + be + cf$. (2 pont)
Következik, hogy az $A \cdot A^T$ bal alsó, illetve jobb felső sarkában álló elemei egyenlők, vagyis a jobb felső sarokban is 2015 áll. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a megoldás rövidebben is indokolható a tanult $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ összefüggést használva: ezt $B = A^T$-ra alkalmazva $(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$ adódik, vagyis $A \cdot A^T$ transzponáltja sajátmaga, így (például) a bal alsó és jobb felső sarkában álló elemei egyenlők.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

1. Határozzuk meg az A és a B mátrixokat, ha az A^{-1} és az $A \cdot B$ mátrixok az alábbiak.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Az A az A^{-1} inverze, így ezt a tanult, Gauss-elimináción alapuló eljárással határozhatjuk meg: (1 pont)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & -7/4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & -7/4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

Így tehát $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$. (4 pont)
$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = E \cdot B = B$ adódik a mátrixszorzás tanult tulajdonságait, illetve az inverz definícióját használva, így B-t megkaphatjuk az adott A^{-1} és $A \cdot B$ szorzataként. (3 pont)
Ebből $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. (2 pont)

2. A 6×10-es A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 3$. Igaz-e mindig, hogy A-nak elhagyható egy sora és egy oszlopa úgy, hogy a kapott 5×9-es B mátrixra $\mathrm{r}(B) = 2$ teljesüljön?

* * * * *

Az állítás nem (mindig) igaz, mutatunk rá egy ellenpéldát.
A 6×10-es A mátrix mind a négy sarkában álljon a 3×3-as egységmátrix, az A középső négy oszlopának minden eleme pedig legyen 0. (2 pont)
Ekkor A-ból kiválasztható 3×3-as, nemnulla determinánsú részmátrix: bármelyik sarkában álló egységmátrix ilyen. (2 pont)
4×4-es, nemnulla determinánsú részmátrix viszont nem választható A-ból, mert az A minden 4×4-es részmátrixának van két azonos sora (hiszen az A felső három sora rendre azonos az alsó hárommal). (2 pont)
Így a determinánsrang definíciója szerint $\mathrm{r}(A) = 3$. (1 pont)
Ha most A-nak tetszőlegesen elhagyjuk egy sorát és egy oszlopát, akkor az A négy sarkában álló négy egységmátrix közül legalább egy biztosan érintetlen marad, így a kapott B mátrixnak továbbra is lesz 3×3-as, nemnulla determinánsú részmátrixa. (2 pont)
Vagyis a kapott 5×9-es B mátrixra $\mathrm{r}(B) \geq 3$ (és így nyilván $\mathrm{r}(B) = 3$ is) igaz. Ezért A valóban jó ellenpélda az állításra. (1 pont)

3. A $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ függvény rendelje minden $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz a $(2x_1, 2x_2, 2x_3, 0) \in \mathbb{R}^4$ vektort. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ egy bázis $\mathbb{R}^3$-ben és tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezésre $f(\underline{b}_1) = g(\underline{b}_1)$, $f(\underline{b}_2) = g(\underline{b}_2)$ és $f(\underline{b}_3) = g(\underline{b}_3)$ teljesül. Írjuk fel f-nek az $[f]$ mátrixát.

* * * * *

Első megoldás. Először is vegyük észre, hogy g is lineáris leképezés: a $[g] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixszal való szorzás épp g-t „valósítja meg”. (3 pont)

Legyen $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy $f(\underline{v}) = g(\underline{v})$ igaz.

Mivel B bázis $\mathbb{R}^3$-ben, ezért létezik a $\underline{v} = \alpha_1\underline{b}_1 + \alpha_2\underline{b}_2 + \alpha_3\underline{b}_3$ lineáris kombináció. (1 pont)

Ebből $f(\underline{v}) = f(\alpha_1\underline{b}_1) + f(\alpha_2\underline{b}_2) + f(\alpha_3\underline{b}_3) = \alpha_1 f(\underline{b}_1) + \alpha_2 f(\underline{b}_2) + \alpha_3 f(\underline{b}_3)$ következik a lineáris leképezések tanult tulajdonságait használva. (2 pont)

Ugyanez g-ről is elmondható, hiszen g is lineáris leképezés: $g(\underline{v}) = \alpha_1 g(\underline{b}_1) + \alpha_2 g(\underline{b}_2) + \alpha_3 g(\underline{b}_3)$. (1 pont)

Mivel azonban $f(\underline{b}_i) = g(\underline{b}_i)$ igaz minden $i = 1, 2, 3$-ra, ezért $f(\underline{v}) = g(\underline{v})$ valóban következik. (1 pont)

Mivel az f és a g lineáris leképezések azonosak, ezért a mátrixaik is azok (hiszen a lineáris leképezések mátrixa a tanult tétel szerint egyértelmű). Így $[f]$ a fentebb látható $[g]$-vel azonos. (2 pont)

Második megoldás. Az első megoldásban írtak szerint g is lineáris leképezés és a mátrixa a fenti.(3 pont)

Legyen B a $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ egyesítésével keletkező 3×3-as mátrix.

A mátrixszorzás definíciójából következik, hogy az $[f] \cdot B$ szorzatmátrix oszlopai sorban $[f] \cdot \underline{b}_1$, $[f] \cdot \underline{b}_2$ és $[f] \cdot \underline{b}_3$. Mivel $[f] \cdot \underline{b}_i = f(\underline{b}_i)$ a lineáris leképezés (mátrixának) definíciója szerint, ezért az $[f] \cdot B$ oszlopai az $f(\underline{b}_i)$ vektorok. (2 pont)

Mivel g is lineáris leképezés, ezért ugyanez g-ről is elmondható: a $[g] \cdot B$ oszlopai az $g(\underline{b}_i)$ vektorok.(1 pont)

Mivel $f(\underline{b}_i) = g(\underline{b}_i)$ igaz minden $i = 1, 2, 3$-ra, ezért $[f] \cdot B = [g] \cdot B$. (1 pont)

Mivel a B oszlopai (vagyis a $\underline{b}_i$-k) lineárisan függetlenek, ezért a tanultak szerint $\det B \neq 0$ és így létezik a B^{-1} mátrix. (1 pont)

Az $[f] \cdot B = [g] \cdot B$ egyenlet mindkét oldalát jobbról B^{-1}-zel szorozva $[f] = [g]$ adódik, így $[f]$ a fentebb látott $[g]$-vel azonos. (2 pont)

4. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben. Legyen az f mátrixa a B bázis szerint az alábbi mátrix:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások.

a) $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 \in \operatorname{Ker} f$ b) $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 \in \operatorname{Im} f$

* * * * *

Legyen $\underline{v} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2$. Ekkor a koordinátavektor definíciója szerint $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1 pont)

Így az $[f(\underline{v})]_B = [f]_B \cdot [\underline{v}]_B$ összefüggés (vagyis $[f]_B$ definíciója) szerint $[f(\underline{v})]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$. (1 pont)

Ha $f(\underline{v}) = \underline{0}$ teljesülne, akkor $[f(\underline{v})]_B = [\underline{0}]_B$ is igaz volna (hiszen a koordinátavektor egyértelmű). Azonban (ismét a koordinátavektor definíciója miatt) $[\underline{0}]_B = \underline{0}$, így $[f(\underline{v})]_B \neq [\underline{0}]_B$, vagyis $f(\underline{v}) \neq \underline{0}$. (2 pont)

Így tehát $\underline{v} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 \notin \operatorname{Ker} f$, az a) állítás hamis. (1 pont)

$\underline{v} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 \in \operatorname{Im} f$ azt jelenti, hogy létezik olyan $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ vektor, amelyre $f(\underline{a}) = \underline{v}$. (1 pont)

Ez ekvivalens az $[f(\underline{a})]_B = [\underline{v}]_B$ állítással (ismét a koordinátavektor egyértelműsége miatt). (1 pont)

Bevezetve a $[\underline{a}]_B = \underline{x}$ jelölést kapjuk, hogy a b) állítás ekvivalens az $[f]_B \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ feltételnek eleget tevő $\underline{x}$ létezésével. (1 pont)

Ez tehát az $x_1 + 2x_2 = 1$, $3x_1 + 7x_2 = 1$ lineáris egyenletrendszerre vezet (ahol x_1 és x_2 az $\underline{x}$ koordinátái).

Ez könnyen megoldható: $x_1 = 5$, $x_2 = -2$. (1 pont)

Azt kaptuk tehát, hogy a b) állítás igaz: az $\underline{a} = 5\underline{b}_1 - 2\underline{b}_2$ vektorra $f(\underline{a}) = \underline{v}$, így $\underline{v} \in \operatorname{Im} f$. (1 pont)

5. Adjuk meg a p paraméter értékét és az alábbi A mátrix összes sajátértékét, ha tudjuk, hogy az alábbi $\underline{v}$ vektor sajátvektora A-nak.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & p \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Mivel $\underline{v}$ sajátvektor, ezért $A \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 6+3p \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \underline{v}$ kell teljesüljön alkalmas λ-ra. (2 pont)
A második koordináták egyezéséből $3\lambda = 27$, vagyis $\lambda = 9$ adódik. (1 pont)
Így az első koordináták egyezéséből $6 + 3p = 9$, vagyis $p = 1$ következik. (1 pont)
Ebből A sajátértékeit a tanult módszerrel határozhatjuk meg: $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 \\ 9 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$(2 pont)
$= (6-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 12\lambda + 27.$ (2 pont)
Így A sajátértékei a $0 = \lambda^2 - 12\lambda + 27 = (\lambda - 9)(\lambda - 3)$ egyenlet megoldásai, vagyis $\lambda = 9$ és $\lambda = 3$.(2 pont)
Ha egy megoldó a p meghatározása során megállapítja, hogy $\lambda = 9$ sajátérték, de a másik sajátértéket nem határozza meg, akkor a sajátértékekért a fenti pontozás szerint kapható összesen 6 pontból legföljebb 2-t megszerezhet.

6. Az n pozitív egész 6247-szeresének az utolsó három számjegye 713. Mi lehet az n utolsó két számjegye?

* * * * *

Mivel $6247n$ utolsó két jegye nyilván 13, ezért $6247n \equiv 13 \pmod{100}$. (1 pont)
Ez $6247 \equiv 47 \pmod{100}$ miatt ekvivalens a $47n \equiv 13 \pmod{100}$ lineáris kongruenciával. (1 pont)
Mindkét oldalt 2-vel szorozva: $94n \equiv 26 \pmod{100}$, vagyis $-6n \equiv 126 \pmod{100}$. (2 pont)
Mindkét oldalt (-6)-tal osztva: $n \equiv -21 \equiv 29 \pmod{50}$, ahol a modulust $(-6, 100) = 2$ miatt kellett 2-vel elosztani. (1 pont)
Ebből $n \equiv 29 \pmod{100}$ vagy $n \equiv 79 \pmod{100}$. (1 pont)
Ellenőrzéssel kiderül, hogy ebből $n \equiv 79 \pmod{100}$ jó megoldás, de $n \equiv 29 \pmod{100}$ hamis gyök. (Ez a 2-vel szorzás miatt jött be, ami $(100, 2) > 1$ miatt nem ekvivalens lépés.) (3 pont)
Így tehát $n \equiv 79 \pmod{100}$ az egyetlen jó megoldás, vagyis n utolsó két számjegye 79. (1 pont)
A hamis gyök kiszűrésekor felhasználhatjuk, hogy $(47, 100) = 1$ miatt a tanult tétel szerint egyetlen megoldás van modulo 100. A lineáris kongruencia nagyon sokféleképp megoldható jól (akár hamis gyököt behozó lépés nélkül is). A kapott megoldások helyességéről vagy ellenőrzéssel, vagy a modulo 100 vett megoldások számát használó érveléssel, vagy (erre alkalmas megoldás esetén) a lépések ekvivalenciájára való hivatkozással mindenképp meg kell győződni; aki ezt elmulasztja, az értelemszerűen 3 pontot veszítsen. Ha valaki csak azt ellenőrzi, hogy $(47, 100)|13$, így a lineáris kongruenciának van megoldása, de azt kiszámolni nem tudja, az (a kongruencia felírásával együtt) összesen 3 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb. Természetesen maximális pontot érhet az a megoldás is, amely a feladat szövege szerinti $6247n \equiv 713 \pmod{1000}$ lineáris kongruenciából indul ki, ezt megoldva $n \equiv 679 \pmod{1000}$-et kap és ebből következtet n utolsó két jegyére; ez a megoldás nyilván fölöslegesen hosszú, de elvileg jó.