**Bevezetés a számításelméletbe I.**

**Zárthelyi feladatok** — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2014. december 15.

**1.** Az $e$ egyenes egyenletrendszere $\frac{2x-3}{4} = \frac{3y+4}{6} = \frac{z}{2}$, az $f$ egyenesé $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{3z-5}{6}$. Párhuzamos-e $e$ és $f$? Ha igen, akkor határozzuk meg az őket tartalmazó sík egyenletét.

**2.** Megadható-e $\mathbb{R}^5$-ben öt darab vektor úgy, hogy közülük bármely három által alkotott rendszer lineárisan független legyen, de semelyik négy által alkotott rendszer ne legyen az?

**3.** Az $\mathbb{R}^4$-beli $W$ altér álljon azokból a vektorokból, amelyeknek a harmadik koordinátája egyenlő a fölötte álló kettő, a negyedik koordinátája pedig a fölötte álló három koordináta összegével. (Így például a jobbra látható vektor is $W$-beli.) Határozzuk meg $\dim W$ értékét. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy $W$ valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

**4.** Döntsük el hogy a $p$ valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 10x_5 &= 5 \\ 5x_1 - 2x_2 + 19x_3 + 14x_4 + x_5 &= 17 \\ 2x_1 + 6x_3 + p \cdot x_4 + (3p-27) \cdot x_5 &= p+2 \end{aligned}$$

**5.** Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

**6.** A $4 \times 5$-ös $A$ mátrix $i$-edik sorának és $j$-edik oszlopának kereszteződésében álló elem minden $1 \leq i \leq 4$ és $1 \leq j \leq 5$ esetén legyen $(-1)^d$, ahol $d$ az $i^{20} + j^{30}$ szám (10-es számrendszerbeli alakjának) első számjegye. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ mátrix főátlójában álló elemek összegét.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Ez a zárthelyi dolgozat mentes az aktuálpolitikai témákra való utalásoktól és nem célja, hogy a közigazgatás vagy az adóigazgatás bármely csúcsszervébe vetett közbizalmat, közmegbecsülést hátrányosan befolyásolja. Így az „egyenes”, „független”, „rendszer”, „egyenlő”, „fölötte álló”, illetve „mátrix” kifejezéseknek semmilyen, a matematikain túlmutató jelentése nincs. Ha, akkor az véletlen.

**Bevezetés a számításelméletbe I.**

**Zárthelyi feladatok** — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2014. december 15.

**1.** A $p$ paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi $A$ mátrixnak és ha igen, akkor számítsuk is ki azt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & p \end{pmatrix}$$

**2.** Igaz-e, hogy minden 4 rangú, $6 \times 6$-os mátrixban található két olyan elem, amelyek alkalmas megváltoztatásával elérhető, hogy a kapott mátrix rangja 6 legyen?

**3.** Legyen $f : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^{10}$-ben megadható 7 lineárisan független vektor úgy, hogy $f$ ezek mindegyikéhez azonos értéket rendel.

b) Igaz-e ez az állítás 7 helyett 8-cal?

**4.** Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy $f$ mátrixa a $B$ bázis szerint az alábbi mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_2$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_3) = (10; 20; 30)$.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

**5.** a) Sajátvektora-e az alábbi $\underline{v}$ vektor az alábbi $A$ mátrixnak?

b) Adjuk meg az $A$ mátrix egy sajátértékét és az összes, ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

**6.** Egy egész szám 109-cel vett osztási maradéka 5-tel kisebb, mint a szám 18-szorosának a 109-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 109-cel osztva?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Ez a zárthelyi dolgozat mentes az aktuálpolitikai témákra való utalásoktól és nem célja, hogy a közigazgatás vagy az adóigazgatás bármely csúcsszervébe vetett közbizalmat, közmegbecsülést hátrányosan befolyásolja. Így a „mátrix", „rang", „független", „bázis", illetve „sajátérték" kifejezéseknek semmilyen, a matematikain túlmutató jelentése nincs. Ha, akkor az véletlen.

**Bevezetés a számításelméletbe I.**
**Zárthelyi feladatok** — pontozási útmutató
2014. december 15.

## Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

### **Zárthelyi feladatok** — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

**1.** Az $e$ egyenes egyenletrendszere $\frac{2x-3}{4} = \frac{3y+4}{6} = \frac{z}{2}$, az $f$ egyenesé $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{3z-5}{6}$. Párhuzamos-e $e$ és $f$? Ha igen, akkor határozzuk meg az őket tartalmazó sík egyenletét.

* * * * *

Az $e$ egyenletrendszere $\frac{x-\frac{3}{2}}{2} = \frac{y+\frac{4}{3}}{2} = \frac{z}{2}$ alakú, így irányvektora a $\underline{v} = (2;2;2)$ vektor (hiszen a $P(\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, 0)$ ponton át a $\underline{v}$ irányvektorral egyenest állítva a tanultak szerint épp ezt az egyenletrendszert kapjuk). Hasonlóan, az $f$ egyenletrendszere $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-\frac{5}{3}}{2}$, így a $\underline{v} = (2;2;2)$ ennek is irányvektora. (2 pont)
Mivel $e$ és $f$ irányvektorai párhuzamosak, ezért $e$ és $f$ is azok. (1 pont)
Mivel $e$-n rajta van a $P(\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, 0)$ pont és $f$-en a $Q(-1, 4, \frac{5}{3})$, ezért $\overrightarrow{PQ}$ párhuzamos az $e$-t és $f$-et tartalmazó $S$ síkkal. (1 pont)
$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = (-\frac{5}{2}, \frac{16}{3}, \frac{5}{3})$, ahol $\underline{q}$ és $\underline{p}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorok. (1 pont)
Párhuzamos még $S$-sel az egyenesek közös $\underline{v}$ irányvektora is (de $\overrightarrow{PQ}$-val nem), ezért $S$-nek normálvektora lesz az $\underline{n} = \underline{v} \times \overrightarrow{PQ}$ vektor. (1 pont)
Ezt a tanult képlettel határozzuk meg, de az egyszerűség kedvéért $\underline{v}$ helyett $\frac{1}{2}\underline{v}$-vel, $\overrightarrow{PQ}$ helyett pedig $(-6) \cdot \overrightarrow{PQ}$-val számolunk (ami érdemi különbséget nem jelent):

$$\underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 15 & -32 & -10 \end{vmatrix} = 22\underline{i} + 25\underline{j} - 47\underline{k} = (22; 25; -47). \qquad \text{(2 pont)}$$

A kapott $\underline{n}$ normálvektor és $P$ vagy $Q$ segítségével $S$ egyenlete már a tanult képlettel felírható: $22x + 25y - 47z = -\frac{1}{3}$. (2 pont)
Ha egy megoldó az egyenesek irányvektorait hibásan olvassa ki és ezért arra a következtetésre jut (a hibás irányvektorokból helyesen), hogy $e$ és $f$ nem párhuzamosak, akkor ezért a fenti pontozás szerint járó 1 pontot megkaphatja.

**2.** Megadható-e $\mathbb{R}^5$-ben öt darab vektor úgy, hogy közülük bármely három által alkotott rendszer lineárisan független legyen, de semelyik négy által alkotott rendszer ne legyen az?

* * * * *

Igen, megadhatók ilyen vektorok.
Ehhez célunk lesz keresni 5 darab $\mathbb{R}^3$-beli vektort úgy, hogy közülük bármely három lineárisan független legyen. Ugyanis ha találunk ilyeneket, akkor ezeket két további 0 koordinátával kiegészítve (utolsó két koordinátaként) a feladat feltételeinek megfelelő $\mathbb{R}^5$-beli vektorokat kapunk. (1 pont)
Valóban, egyrészt a 0-kkal való kiegészítés a vektorhármasok lineáris függetlenségét nem befolyásolja: ha egy ilyen hármas egyik tagja a másik kettőből lineáris kombinációval kifejezhető volna, akkor ugyanez elmondható volna a mindhármuk utolsó két 0 koordinátájának törlése után kapott $\mathbb{R}^3$-beli vektorokra is, amelyeket pedig lineárisan függetlennek választottunk. (2 pont)
Másrészt a megadott vektorok elemei lesznek annak a $W \leq \mathbb{R}^5$ altérnek, amely azokból az $\mathbb{R}^5$-beli vektorokból áll, amelyeknek az utolsó két koordinátája 0. Mivel $W$-ben generátorrendszert (sőt: bázist) alkot például az $\mathbb{R}^5$-beli standard bázis első három vektora, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $W$-ben semelyik négy vektor nem lehet lineárisan független. (2 pont)
A kérdés tehát az, hogyan találhatunk 5 olyan $\mathbb{R}^3$-beli vektort, hogy közülük bármely három lineárisan független legyen.
Tudjuk, hogy három $\mathbb{R}^3$-beli vektor akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem esnek közös origón átmenő síkba. (2 pont)
Vegyünk fel ezért egy tetszőleges, de az origón át nem menő $S$ síkot és válasszunk ezen 5 tetszőleges olyan pontot, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre (például egy konvex ötszög csúcsait). Majd tekintsük az origóból ezekbe a pontokba mutató helyvektorokat. Ezek közül semelyik három nem eshet egy origón átmenő $S'$ síkba (mert különben a három szóban forgó helyvektor végpontja az $S$ és az $S'$ síkok metszésvonalán volna, vagyis egy $S$-beli egyenesre esnének). (3 pont)
A fenti, geometriai gondolatmenet alapján 5 ilyen térvektor (és ezekből a feladatnak megfelelő $\mathbb{R}^5$-beli vektorok) akár konkrétan is megadható, de erre a feladat teljes értékű megoldásához nincs szükség.

**3.** Az $\mathbb{R}^4$-beli $W$ altér álljon azokból a vektorokból, amelyeknek a harmadik koordinátája egyenlő a fölötte álló kettő, a negyedik koordinátája pedig a fölötte álló három koordináta összegével. (Így például a jobbra látható vektor is $W$-beli.) Határozzuk meg $\dim W$ értékét. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy $W$ valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Ha egy $\underline{w} \in W$ vektor első két koordinátája $\alpha$, illetve $\beta$, akkor a harmadik $\alpha+\beta$, a negyedik pedig $2\alpha+2\beta$. Ezért $\underline{w} \in W$ felírható így:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \\ 2\alpha+2\beta \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ (2 pont)

Ez tehát azt jelenti, hogy a fenti egyenlet jobb oldalán álló két $\mathbb{R}^4$-beli vektor – jelölje ezeket $\underline{a}$, illetve $\underline{b}$ – generátorrendszert alkot $W$-ben. (2 pont)
Másrészt $\underline{a}, \underline{b}$ lineárisan független rendszer, mert egyik vektor sem skalárszorosa a másiknak. (2 pont)
Így $\underline{a}, \underline{b}$ bázis $W$-ben, (2 pont)
vagyis $\dim W = 2$. (2 pont)

**4.** Döntsük el, hogy a $p$ valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 10x_5 &= 5 \\ 5x_1 - 2x_2 + 19x_3 + 14x_4 + x_5 &= 17 \\ 2x_1 + 6x_3 + p \cdot x_4 + (3p-27) \cdot x_5 &= p+2 \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 10 & 5 & 10 & 5 \\ 5 & -2 & 19 & 14 & 1 & 17 \\ 2 & 0 & 6 & p & 3p-27 & p+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 9 & -9 & 12 \\ 0 & 2 & -4 & p-2 & 3p-31 & p \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & p-8 & 3p-25 & p-8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-9 & 0 \end{array}\right) \sim$$

(Az utolsó lépésben a 3-mal osztott harmadik sor $(p-8)$-szorosát vontuk ki a negyedikből.) (2 pont)
Ha $p = 9$, akkor az utolsó sor csupa 0, így elhagyható. Ekkor a Gauss-elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk (három további, vezéregyes fölötti elem „kinullázásával"):

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$ (1 pont)

Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ és $x_5 = \beta \in \mathbb{R}$ „szabad paraméterek", $x_1 = 1-3\alpha+9\beta$, $x_2 = 1+2\alpha+9\beta$, $x_4 = 1-2\beta$. (2 pont)
Ha viszont $p \neq 9$ , akkor az utolsó sort $(p-9)$-cel osztva kapjuk a lépcsős alakot, majd ebből ismét a vezéregyesek fölötti elemek „kinullázásával" a redukált lépcsős alakot:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ (3 pont)

Így a $p \neq 9$ esetben is végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ „szabad paraméter", $x_1 = 1-3\alpha$, $x_2 = 1+2\alpha$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$. (2 pont)
A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

**5.** Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint*. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A definícióban összeadandóként szereplő szorzatok közül csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem tartalmaznak 0 tényezőt, mert a többi nem befolyásolja a determináns értékét. (1 pont)
Egy ilyen szorzatban tehát az utolsó sorból csak az 1-es választható. Ezért az első sorból csak a 2-es választható (mert a negyedik oszlopból már választottunk elemet). Hasonlóan folytatva, a negyedik sorból csak a $(-1)$-es, a másodikból a 3-as, a harmadikból a $(-2)$-es választható. Így egyetlen nemnulla szorzat keletkezik: $2 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 = 12$. (3 pont)

Az ehhez a szorzathoz tartozó $\pi$ permutáció $2, 5, 3, 1, 4$ (mert az első sorból a második elemet vettük ki, a másodikból az ötödiket, stb). (2 pont)
$\pi$ inverziószáma $I(\pi) = 5$ (az inverzióban álló elempárok $(2, 1)$, $(5, 3)$, $(5, 1)$, $(5, 4)$ és $(3, 1)$). (2 pont)
Mivel $I(\pi)$ páratlan, a fenti szorzat negatív előjelet kap. Így a determináns értéke $-12$. (2 pont)

**6.** A $4 \times 5$-ös $A$ mátrix $i$-edik sorának és $j$-edik oszlopának kereszteződésében álló elem minden $1 \leq i \leq 4$ és $1 \leq j \leq 5$ esetén legyen $(-1)^d$, ahol $d$ az $i^{20} + j^{30}$ szám (10-es számrendszerbeli alakjának) első számjegye. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ mátrix főátlójában álló elemek összegét.

* * * * *

$A \cdot A^T$ főátlójának $i$-edik eleme az $A$ $i$-edik sorában álló elemek négyzetösszege. Valóban, a mátrixszorzás definíciója szerint az $A$ $i$-edik sorának elemeit szorozzuk az $A^T$ $i$-edik oszlopának elemeivel (és a kapott kéttényezős szorzatokat adjuk össze), de az utóbbiak elemről elemre megegyeznek az előbbiekkel.(4 pont)
Mivel $A$ minden eleme 1 vagy $(-1)$ és egy sorban 5 ilyen elem van, ezért $A \cdot A^T$ főátlójának minden eleme $(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 = 5$. (4 pont)
Mivel az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix $4 \times 4$-es, ezért a főátlójában álló elemek összege $5 \cdot 4 = 20$. (2 pont)

## **Zárthelyi feladatok** — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

**1.** A $p$ paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi $A$ mátrixnak és ha igen, akkor számítsuk is ki azt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & p \end{pmatrix}$$

* * * * *

A harmadik oszlop szerinti kifejtéssel kapjuk, hogy $\det A = p \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = p \cdot 1 = p.$ (1 pont)
Így a tanult tétel szerint $A$-nak akkor és csak akkor létezik inverze, ha $p \neq 0$. (2 pont)
A $p \neq 0$ értékekre $A^{-1}$-et a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & p & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & p & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p & 5 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/p & -4/p & 1/p \end{array}\right)$$ (6 pont)

Így $A^{-1}$ a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (1 pont)
Megjegyezzük, hogy az inverz létezésének kérdéséhez nem feltétlen szükséges előre kiszámítani $\det A$-t, az a Gauss-eliminációból is kiolvasható: a harmadik lépésben kapott alakból látszik, hogy $\det A = p$ (és előtte csak a determináns értékét meg nem változtató lépéseket végeztünk a vonaltól balra álló mátrixon).
Minden, a megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. Ha csak annyi látszik, hogy a megoldó a módszert elvileg ismeri, de nem tudja kivitelezni, az legföljebb 2 pontot érhet (de az inverz létezésének kérdéséért járó 3 pont ettől függetlenül megadható).

**2.** Igaz-e, hogy minden 4 rangú, $6 \times 6$-os mátrixban található két olyan elem, amelyek alkalmas megváltoztatásával elérhető, hogy a kapott mátrix rangja 6 legyen?

* * * * *

Az állítás igaz.
Legyen $A$ 4 rangú, $6 \times 6$-os mátrix. Ekkor a determinánsrang definíciója szerint $A$-nak van $4 \times 4$-es, nemnulla determinánsú részmátrixa. A megoldás leírásának egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy ez épp a bal felső sarokban álló $4 \times 4$-es részmátrix (ez a megoldás menetét érdemben nem befolyásolja). (2 pont)
Jelölje a bal felső sarokban álló $5 \times 5$-ös részmátrixot $M$. Célunk $a_{5,5} = m_{5,5}$ értékét alkalmasan megváltoztatni úgy, hogy $\det M \neq 0$ legyen. Ehhez a kifejtési tételt használjuk $M$ ötödik sorára:

$\det M = m_{5,1} \cdot M_{5,1} + m_{5,2} \cdot M_{5,2} + \ldots + m_{5,5} \cdot M_{5,5}$ (ahol $M_{i,j}$ a megfelelő előjeles aldetermináns értéke). Itt $M_{5,5} \neq 0$, mert ez épp az $A$ bal felső sarkában álló $4 \times 4$-es részmátrix determinánsa. (2 pont)
Ezért $m_{5,5} = a_{5,5}$ értékének alkalmas megváltoztatásával $\det M$-et tetszőleges értékre beállíthatjuk: például $\det M = 1$ az $m_{5,5} = \frac{1}{M_{5,5}} \cdot (1 - m_{5,1} \cdot M_{5,1} - \ldots - m_{5,4} \cdot M_{5,4})$ választással biztosítható. (2 pont)
Most a fenti gondolatmenetet megismételhetjük a teljes $A$ mátrixra: mivel $\det M \neq 0$, ezért a kifejtési tételből következően $a_{6,6}$ alkalmas megváltoztatásával $\det A$ tetszőleges értékre, így 0-tól különbözőre is beállítható. (2 pont)
Mivel az $a_{5,5}$ és $a_{6,6}$ megváltoztatásával kapott $A'$ mátrixra $\det A' \neq 0$, ezért $A'$ rangja (a determinánsrang definíciójából közvetlenül adódóan) valóban 6. (2 pont)

**3.** Legyen $f : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^{10}$-ben megadható 7 lineárisan független vektor úgy, hogy $f$ ezek mindegyikéhez azonos értéket rendel.

b) Igaz-e ez az állítás 7 helyett 8-cal?

* * * * *

Mivel $\mathrm{Im}\, f \leq \mathbb{R}^3$, ezért $\dim \mathrm{Im}\, f \leq 3$. (1 pont)
Így a dimenziótételből $\dim \mathrm{Ker}\, f \geq 7$ adódik. (1 pont)
Ezért $\mathrm{Ker}\, f$ tetszőleges bázisát véve legalább 7 lineárisan független vektort kapunk, amelyeknek a képe $\underline{0}$. Ez tehát az a) pont állítását bizonyítja. (1 pont)
De valójában az állítás 7-helyett 8-cal is igaz.
Ha $\dim \mathrm{Ker}\, f \geq 8$, akkor ez a fenti gondolatmenetből rögtön következik, ezért feltehetjük, hogy $\dim \mathrm{Ker}\, f = 7$. Így választhatunk egy $\underline{v} \notin \mathrm{Ker}\, f$ vektort és egy $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_7$ bázist $\mathrm{Ker}\, f$-ben. (1 pont)
Állítjuk, hogy a $\underline{v}, \underline{v} + \underline{b}_1, \underline{v} + \underline{b}_2, \ldots, \underline{v} + \underline{b}_7$ vektorok megfelelnek a feladat feltételeinek.
Mivel $f(\underline{v} + \underline{b}_i) = f(\underline{v}) + f(\underline{b}_i)$ a lineáris leképezés tanult tulajdonsága miatt és $\underline{b}_i \in \mathrm{Ker}\, f$ miatt $f(\underline{b}_i) = \underline{0}$, ezért $f(\underline{v} + \underline{b}_i) = f(\underline{v})$. Így $f$ a felsorolt nyolc vektorhoz valóban azonos értéket rendel. (1 pont)
Meg kell még mutatnuk, hogy a felsorolt vektorok lineárisan függetlenek. Ehhez vegyük egy tetszőleges, $\underline{0}$-t adó lineáris kombinációjukat:

$$\lambda_0 \cdot \underline{v} + \lambda_1 \cdot (\underline{v} + \underline{b}_1) + \ldots + \lambda_7 \cdot (\underline{v} + \underline{b}_7) = \underline{0}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Átrendezve:

$$(\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_7) \cdot \underline{v} + \lambda_1 \cdot \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_7 \cdot \underline{b}_7 = \underline{0}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Legyen $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_7$. Ha $\Lambda \neq 0$, akkor átrendezés után $\underline{v} = -\frac{\lambda_1}{\Lambda} \cdot \underline{b}_1 - \ldots - \frac{\lambda_7}{\Lambda} \cdot \underline{b}_7$ adódik. Ebből viszont $\underline{v} \in \mathrm{Ker}\, f$ következne, ellentmondás. (1 pont)
Így $\Lambda = 0$, amiből $\lambda_1 \cdot \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_7 \cdot \underline{b}_7 = \underline{0}$ adódik. Mivel $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_7$ lineárisan függetlenek (hiszen bázist alkotnak $\mathrm{Ker}\, f$-ben), ezért ebből $\lambda_1 = \ldots = \lambda_7 = 0$ következik. (1 pont)
Ebből $\Lambda = 0$ miatt $\lambda_0 = 0$ is adódik, így $\underline{v}, \underline{v} + \underline{b}_1, \underline{v} + \underline{b}_2, \ldots, \underline{v} + \underline{b}_7$ valóban lineárisan függetlenek.(1 pont)

**4.** Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy $f$ mátrixa a $B$ bázis szerint az alábbi mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_2$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_3) = (10; 20; 30)$.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Legyen $\underline{v} = \underline{b}_1 + \underline{b}_3$. Ekkor $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (hiszen $\underline{v} = 1 \cdot \underline{b}_1 + 0 \cdot \underline{b}_2 + 1 \cdot \underline{b}_3$). (2 pont)
$[f]_B$ definíciójából $[f(\underline{v})]_B = [f]_B \cdot [\underline{v}]_B$ következik. (2 pont)
Elvégezve a mátrixszorzást:

$$[f(\underline{v})]_B = [f]_B \cdot [\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ebből tehát $f(\underline{v}) = 0 \cdot \underline{b}_1 + 2 \cdot \underline{b}_2 + 0 \cdot \underline{b}_3 = 2 \cdot \underline{b}_2$ következik. (2 pont)
Mivel a feladat feltétele szerint $f(\underline{v}) = (10; 20; 30)$, ebből $\underline{b}_2 = (5; 10; 15)$ adódik. (2 pont)

**5.** a) Sajátvektora-e az alábbi $\underline{v}$ vektor az alábbi $A$ mátrixnak?
b) Adjuk meg az $A$ mátrix egy sajátértékét és az összes, ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Elvégezve az $A \cdot \underline{v}$ szorzást:

$$A \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Látszik, hogy $A \cdot \underline{v} = 3 \cdot \underline{v}$, így $\underline{v}$ sajátvektora $A$-nak (1 pont)
és $\lambda = 3$ sajátértéke $A$-nak. (1 pont)
A $\lambda = 3$-hoz tartozó sajátvektorok definíció szerint az $A \cdot \underline{x} = 3 \cdot \underline{x}$ egyenlet $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldásai. Más szóval: a $4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3x_1$, $-2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3x_2$, $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3x_3$ lineáris egyenletrendszer csupa nullától különböző megoldásait keressük. (3 pont)
Átrendezés után: $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$, $-2x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 0$, $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$ (ez az $(A - 3E)\underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszer). (1 pont)
Látszik, hogy az első egyenletnek a második $(-2)$-szerese, a harmadik pedig azonos vele, így az utolsó két egyenlet elhagyható. (1 pont)
Így a 3-hoz tartozó sajátvektorok azok az $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorok, amelyek koordinátáira $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$ teljesül. (2 pont)
Ha egy megoldó a 3-hoz tartozó sajátvektorok keresésekor csak annyit állapít meg, hogy a megadott $\underline{v}$ minden nemnulla skalárszorosa sajátvektor, az (az első 3 pont mellett) ezért további 1 pontot kaphat. Megjegyezzük, hogy $A$-nak sajátértéke még a 3 mellett a $\lambda = -7$ is, az ehhez tartozó sajátvektorok az $(1; -2; 1)^T$ vektor nemnulla többszörösei. Így elvileg ezek megadása is a feladat teljes értékű megoldását jelentené, de a $(-7)$ sajátérték megtalálásához a harmadfokú karakterisztikus polinom gyökeit, vagyis a $\lambda^3 + \lambda^2 - 33\lambda + 63 = 0$ egyenlet megoldásait kellene megtalálni, ami nyilván jóval kellemetlenebb feladat.

**6.** Egy egész szám 109-cel vett osztási maradéka 5-tel kisebb, mint a szám 18-szorosának a 109-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 109-cel osztva?

* * * * *

A keresett számot $n$-nel jelölve a feladat szövege szerint $18n - 5 \equiv n \pmod{109}$, amit átrendezve a $17n \equiv 5 \pmod{109}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
Mivel 7 és 109 relatív prímek, 7-tel szorozva az eredetivel ekvivalens kongruenciát kapunk: (1 pont)
$119n \equiv 35 \pmod{109}$, vagyis $10n \equiv 35 \pmod{109}$. (2 pont)
Mivel 5 és 109 is relatív prímek, 5-tel osztva a modulus nem változik és az előzővel ekvivalens kongruenciát kapunk: (1 pont)
$2n \equiv 7 \pmod{109}$. (2 pont)
A jobboldalhoz 109-et adva $2n \equiv 116 \pmod{109}$. (1 pont)
2 és 109 is relatív prímek, így 2-vel osztva a modulus nem változik és az előzővel ekvivalens kongruenciát kapunk: (1 pont)
$n \equiv 58 \pmod{109}$. (1 pont)
Így a keresett szám 58 maradékot ad 109-cel osztva. A lépések ekvivalenciája helyett hivatkozhatunk arra is, hogy $(17, 109) = 1$ miatt egyetlen megoldás kell legyen modulo 109, vagy ellenőrizhetjük is a kapott eredményt. (Viszont a három érv közül valamelyikre szükség van annak kizárásához, hogy a lineáris kongruenciának nincs megoldása.) Ha egy megoldó csak azt ellenőrzi, hogy $(17, 109) | 5$, így a lineáris kongruenciának van megoldása, de azt kiszámolni nem tudja, az (az átrendezéssel együtt) összesen 3 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb.