Bevezetés a Számításelméletbe I.
Kilencedik gyakorlat, 2015. november 3.

1. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció a $\underline{b}_1 = (2;3)$ vektorhoz a $(2;5)$-öt, a $\underline{b}_2 = (0;2)$-höz a $(2;1)$-et rendeli.
a) Adjuk meg f-nek az $[f]_B$ mátrixát a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis szerint.
b) Határozzuk meg α és β értékét, ha f az $\alpha\underline{b}_1 + \underline{b}_2$ vektorhoz az $3\underline{b}_1 + \beta\underline{b}_2$ vektort rendeli.
c) Adjuk meg f-nek az $[f]$ mátrixát.
d) Mit rendel f a $(4;6)$ vektorhoz?

---

2. Határozzuk meg a síkon az x tengelyre való tükrözés, mint lineáris transzformáció mátrixát az $\{(1;2),(1;0)\}$ bázisban.

3. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció a $\underline{b}_1 = (0;1)$ vektorhoz és a $\underline{b}_2 = (4;1)$ vektorhoz is a $(8;1)$ vektort rendeli.
a) Határozzuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat, ahol $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$.
b) Mely $\mathbb{R}^2$-beli $\underline{v}$ vektorokra igaz, hogy $f(\underline{v}) = \underline{v}$?

4. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_2$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_3) = (10;20;30)$. (ZH, 2014. december 15.)

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

5. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tetszőleges lineáris transzformáció és B bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Igazak-e mindig az alábbi állítások? ($\approx$ZH, 2012. december 11.)
a) Ha $\operatorname{Ker} f$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort, akkor $\det[f]_B = 0$.
b) Ha $\det[f]_B = 0$, akkor $\operatorname{Ker} f$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort.

---

6. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációra és az $\mathbb{R}^3$-beli $B = \{\underline{b}_1 = (1;0;0),\ \underline{b}_2 = (2;1;0),\ \underline{b}_3 = (2;2;1)\}$ bázisra teljesül, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2) = \underline{b}_3$ és $f(\underline{b}_3) = \underline{b}_1$. Adjuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat. (ZH, 2014. november 27.)

7. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ egy lineáris transzformáció, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ egy bázis $\mathbb{R}^2$-ben és legyen $[f]_B$ a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$. ($\approx$ZH, 2010. november 25.)

$$\begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

8. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. A p paraméter milyen értékeire teljesül az $5\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + p \cdot \underline{b}_3 \in \operatorname{Ker} f$ állítás?

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 10 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 = (1;2;3)$, $\underline{b}_2 = (2;3;4)$ és f mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_3$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3) = (3;6;5)$. ($\approx$ZH, 2010. december 6.)

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tetszőleges lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Mutassuk meg, hogy ha az $[f]_B$ mátrix minden sorában az elemek összege 1, akkor $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n \in \operatorname{Im} f$. ($\approx$ZH, 2008. november 25.)

11. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció. Az f mátrixa a $\underline{b}_1 = (1,0)$ és $\underline{b}_2 = (1,1)$ vektorokból álló bázisban felírva a jobbra látható mátrix. Tudjuk továbbá, hogy valamely y értékre f az $(y,3)$ vektorhoz önmagát rendeli. Határozzuk meg x értékét. ($\approx$ZH, 2006. december 7.)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$$

12. Előfordulhat-e, hogy egy $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mátrixát két különböző bázisban felírva az alábbi eredményeket kapjuk?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

13. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektort konstansnak, ha minden eleme azonos. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$, illetve $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n\}$ két bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n$ és $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n$ egyaránt konstans vektorok és az $[f]_B$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. Mutassuk meg, hogy ekkor az $[f]_C$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. ($\approx$ZH, 2012. december 3.)