

1. Jelölje \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} , \underline{a} , \underline{c} és \underline{d} az ÖTÖDIK GYAKORLAT 2. feladatában bevezetett \mathbb{R}^4 -beli vektorokat.

a) Bázist alkot-e \mathbb{R}^4 -ben az \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} , \underline{a} vektorrendszer?

b) Bázist alkot-e \mathbb{R}^4 -ben az \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} , \underline{c} vektorrendszer? Ha igen, határozzuk meg \underline{a} koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

c) Bázist alkot-e \mathbb{R}^4 -ben az \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} , \underline{d} vektorrendszer? Ha igen, határozzuk meg \underline{d} koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

2. Határozzuk meg az alábbi alterek dimenzióját és adjunk meg bennük egy olyan bázist, ami a csupa 1 koordinátájú vektort tartalmazza.

$$a) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x - 7y + 4z = 0 \right\} \quad b) W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

3. Legyen \mathbb{R}^3 -ben

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 2019 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Döntsük el az alábbi vektorrendszerekről, hogy bázist alkotnak-e \mathbb{R}^3 -ben és ha igen, határozzuk meg a hiányzó, negyedik vektor koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

a) \underline{a} , \underline{b} , \underline{c}

b) \underline{a} , \underline{b} , \underline{d}

4. Az alábbi V alterekben adjunk meg egy olyan bázist, amely a megadott \underline{v} vektort tartalmazza, valamint határozzuk meg V dimenzióját.

a) V azokból az \mathbb{R}^4 -beli vektorokból áll, amelyekben a felső két koordináta összege megegyezik az alsó kettő összegével; \underline{v} -nek mind a négy koordinátája 1.

b) V azokból az \mathbb{R}^{100} -beli vektorokból áll, amelyeknek a koordinátái felülről lefelé 2 kvóciensű mértani sorozatot alkotnak; \underline{v} ezek közül az, amelynek az első koordinátája 7.

5. Legyenek \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} lineárisan független vektorok \mathbb{R}^n -ben. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}$, $\underline{b} = \underline{u} + \underline{w}$, $\underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$, $\underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek? (\approx ZH, 2004. december 14.)

6. Jelölje \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} és \underline{a} a jobbra látható vektorokat.

Adjunk meg \mathbb{R}^4 -ben egy, az \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} vektorokat tartalmazó bázist, majd írjuk fel ebben a bázisban az \underline{a} koordinátavektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7. Jelölje \underline{b}_1 , \underline{b}_2 és \underline{v} a jobbra látható vektorokat. A p paraméter milyen értékeire igaz a $\underline{v} \in \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$ állítás? A p -nek erre az értékeire határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort, ahol B a \underline{b}_1 , \underline{b}_2 vektorrendszert jelöli.

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 36 \\ p \end{pmatrix}$$

8. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ bázis a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. A p paraméter mely értékeire teljesül, hogy a $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k, \underline{v}_k - p \cdot \underline{v}_1$ vektorok szintén bázist alkotnak V -ben?

9. Határozzuk meg az ÖTÖDIK GYAKORLAT 7. feladatában definiált \mathbb{R}^5 -beli altérnek (vagyis a Fibonacci típusú vektorok alterének) a dimenzióját.

10. Tudjuk, hogy az \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} , \underline{d} vektorok bázist alkotnak \mathbb{R}^4 -ben. Határozzuk meg az $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{c} + \underline{d}$, $\underline{a} + \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{d}$ vektorok által generált altér dimenzióját. (ZH, 2017. november 30.)

11. A $V \leq \mathbb{R}^n$ altérre $\dim V = k$ és a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorok generátorrendszert alkotnak V -ben. Igaz-e mindig, hogy ekkor $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ bázis V -ben?

12. Megadható-e

a) \mathbb{R}^4 -ben négy darab vektor úgy, hogy közülük bármely kettő lineárisan független legyen, de semelyik három ne legyen lineárisan független? (ZH, 2014. október 20.)

b) \mathbb{R}^5 -ben öt darab vektor úgy, hogy közülük bármely három által alkotott rendszer lineárisan független legyen, de semelyik négy által alkotott rendszer ne legyen az? (ZH, 2014. december 15.)

c) \mathbb{R}^4 -ben hat darab vektor úgy, hogy közülük bármely 5 generátorrendszert alkosson \mathbb{R}^4 -ben, de semelyik 4 sem alkosson generátorrendszert \mathbb{R}^4 -ben? (ZH, 2014. december 19.)

13. Az \mathbb{R}^{99} -beli V és W alterek egyaránt 50 dimenziósak. Mutassuk meg, hogy V -nek és W -nek van a nullvektortól különböző közös eleme.