

1. Döntsük el, hogy \mathbb{R}^4 -ben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

a) V azokból az \mathbb{R}^4 -beli vektorokból áll, amelyeknek minden koordinátája 0 és 1 között van (megengedve a 0-t és az 1-et is).

b) W azokból az \mathbb{R}^4 -beli vektorokból áll, amelyekben az első koordináta egyenlő a negyedikkel.

2. Legyen \mathbb{R}^4 -ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 201 \\ 2019 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

a) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$

b) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{c}$

c) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{c}, \underline{d}$

3. Döntsük el, hogy \mathbb{R}^6 -ban alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

a) V azokból az \mathbb{R}^6 -beli vektorokból áll, amelyekben a számok fölülről lefelé (nem feltétlen szigorúan) növekvő sorrendben állnak.

b) W azokból az \mathbb{R}^6 -beli vektorokból áll, amelyekben a felső három koordináta összege megegyezik az alsó három összegével.

4. Legyen \mathbb{R}^3 -ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

a) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$

b) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{a}$

c) $\underline{u}, \underline{a}$

d) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$

e) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}$

5. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek. Következik-e ebből, hogy a $3\underline{a} - \underline{b}$, $2\underline{a} + \underline{c}$ és $4\underline{b} - 3\underline{c}$ vektorok is mindig lineárisan függetlenek? (ZH, 2018. december 17.)

6. A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorokról tudjuk, hogy \underline{v}_1 benne van a többi $n-1$ vektor generált alterében, de a $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ vektorok közül semelyik sincs benne a többi $n-1$ vektor generált alterében. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{v}_1 = \underline{0}$.

7. Nevezzünk egy \mathbb{R}^5 -beli vektort Fibonacci típusúnak, ha a (fölülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például a jobbra látható vektor Fibonacci típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci típusú vektorok alteret alkotnak \mathbb{R}^5 -ben? (ZH, 2012. október 18.)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

8. Határozzuk meg az alábbi, \mathbb{R}^3 -beli vektorrendszerek generált alterét. Ha ez az alter sík vagy egyenes, akkor adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

9. a) Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált alteret a jobbra látható \mathbb{R}^4 -beli vektorokra. (A generált alter meghatározása alatt azt értjük, hogy „gyorstesztet” készítünk.) (ZH, 2017. december 11.)

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

b) Lineárisan független-e az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ rendszer?

10. Legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ tetszőleges \mathbb{R}^n -beli vektorok (valamely n -re) és legyen $\underline{u} = \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{v} = \underline{b} - \underline{c}$ és $\underline{w} = \underline{c} + 2\underline{a}$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is lineárisan független.

11. Határozzuk meg az $x - 4 = \frac{y+5}{4} = \frac{2-z}{3}$ egyenletrendszerű e egyenes minden olyan P pontját, amelyre a P -t a $Q(7; 12; 4)$ ponttal összekötő f egyenes merőleges e -re. (ZH, 2015. október 22.)

12. A p paraméter milyen értékére esnek egy síkba az $A(2; 3; 3)$, $B(3; 4; 1)$, $C(4; 6; 2)$ és $D(p; 2; 5)$ pontok? (ZH, 2014. október 20.)

13. Párhuzamos-e az $\frac{5x+3}{10} = \frac{4-y}{5} = \frac{5-2z}{2}$ egyenletrendszerű egyenes a $6x + y + 7z = 91$, illetve az $5x + 2y = 79$ egyenletű síkok metszésvonalával? (ZH, 2014. december 19.)