

1. a) Írjuk fel a  $P(1, 4, -1)$  ponton átmenő és az  $\frac{x-5}{2} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z+8}{3}$  egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík egyenletét.

b) Írjuk fel a  $Q(2, -5, -2)$  ponton átmenő és a  $z = 4x + 7$  egyenletű síkra merőleges egyenes egyenletrendszerét.

2. Legyen  $\mathbb{R}^4$ -ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Kifejezhető-e az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{w}$  vektorokból (az  $\mathbb{R}^4$ -beli műveletekkel) az  $\underline{a}$  vektor?

b) Kifejezhető-e az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{w}$  vektorokból a  $\underline{b}$  vektor?

c) Mely  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorok fejezhetőek ki  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{w}$  segítségével? (Készítsünk olyan „gyorstesztet”, amellyel egy tetszőleges  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorra a kérdés egyszerűen és gyorsan megválaszolható.)

3. a) Átmegy-e az origón az a sík, amely párhuzamos az  $5x - 4y + 3z = 9$  egyenletű síkkal és amely tartalmazza a  $P(1; 5; 5)$  pontot? (ZH, 2010. október 21.)

b) Átmegy-e az origón az az egyenes, amely párhuzamos az  $\frac{x-5}{2} = \frac{1-y}{2} = -z-9$  egyenletrendszerű egyenessel és átmegy a  $P(4; -4; 3)$  ponton?

4. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben ( $\mathbb{R}^3$ -ben)

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Kifejezhető-e az  $\underline{u}$  és  $\underline{v}$  vektorokból (az  $\mathbb{R}^3$ -beli műveletekkel) a  $\underline{w}$  vektor?

b) Az  $\mathbb{R}^3$  mely vektorai fejezhetőek ki az  $\underline{u}$  és  $\underline{v}$  vektorokból? (Készítsünk „gyorstesztet”.)

c) Milyen geometriai alakzatot határoznak meg a b) feladat megoldásai?

d) Kifejezhető-e az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{w}$  vektorokból (az  $\mathbb{R}^3$ -beli műveletekkel) az  $\underline{a}$  vektor?

e) Az  $\mathbb{R}^3$  mely vektorai fejezhetőek ki az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{w}$  vektorokból? (Készítsünk „gyorstesztet”.)

5. Van-e az  $A(-1; -2; 1)$ ,  $B(3; 1; 3)$  és  $C(7; 6; 3)$  pontokat tartalmazó síknak olyan pontja, amely az  $y$ -tengelyre esik? Ha igen, melyik? (ZH, 2017. december 11.)

6. Döntsük el, hogy a  $P(1, 4, 4)$  és a  $Q(3, 12, -2)$  pontokon átmenő egyenes metszi-e a koordináta-tengelyek valamelyikét. Ha igen, adjuk meg a metszésponto(ka)t. (ZH, 2006. november 9.)

7. Írjuk fel a háromdimenziós tér  $P = (1, 1, 1)$  és  $Q = (3, 1, 5)$  pontjait összekötő szakasz felezőmerőleges síkjának egyenletét. Hol metszi ez a sík az  $y$  tengelyt? (ZH, 2013. október 24.)

8. Az  $\mathbb{R}^4$  mely vektorai fejezhetőek ki az

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és a } \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorok segítségével? (Készítsünk „gyorstesztet”.)

9. Az  $e$  egyenes egyenletrendszere  $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ , az  $f$  egyenes egyenletrendszere pedig  $\frac{x}{-2} = \frac{3-y}{6} = \frac{2-z}{10}$ . Döntsük el, hogy  $e$  és  $f$  párhuzamosak-e. Ha igen, akkor határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely mindkettőt tartalmazza. (ZH, 2016. december 5.)

10. A  $2x + y - 3z = 2$  egyenletű  $S_1$  és az  $x + 7y + 3z = 21$  egyenletű  $S_2$  síkokról döntsük el, hogy

a) rajta van-e a  $P(5; 1; 3)$  pont az  $S_1$  és az  $S_2$  metszésponton;

b) merőleges-e egymásra  $S_1$  és  $S_2$ ? (ZH, 2011. december 13.)

11. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a  $P(12; 1; 7)$  ponton és merőlegesen metszi az  $x - 3 = \frac{y-2}{3} = \frac{-z-1}{4}$  egyenletrendszerű egyenest. (ZH, 2010. december 6.)