Bevezetés a Számításelméletbe I.
Tizedik gyakorlat, 2020. november

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki.(ZH, 2012. december 3.)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

---

2. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak; ha igen, akkor számítsuk is ki.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (ZH, 2011. november 24.) b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$

3. Legyen A $n \times n$-es mátrix, $x, y \in \mathbb{R}^n$ pedig tetszőleges oszlopvektorok. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq y$, de $Ax = Ay$, akkor $\det A = 0$.

4. Legyen A a jobbra látható mátrix.

a) Adjunk meg egy olyan B mátrixot, melyre $A \cdot B$ a 2×2-es egységmátrix.

b) Létezik-e olyan B mátrix, melyre $B \cdot A$ a 3×3-as egységmátrix?

(ZH, 2017. december 11., 2017. december 18.)

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

---

5. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak; ha igen, akkor számítsuk is ki.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ZH, 2012. december 11.) b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$

6. Tudjuk, hogy az A mátrixnak három sora van és mind a három számtani sorozat. (Vagyis bármelyik sor elemein balról jobbra végighaladva egy-egy számtani sorozat tagjait kapjuk.) Mutassuk meg, hogy A-nak nincs inverze.

7. A jobbra látható A mátrixra teljesül, hogy $A^3 = E$ (ahol E a 3×3-as egységmátrix).

a) Határozzuk meg A determinánsát.

b) Határozzuk meg A inverzének jobb alsó elemét.

(ZH, 2019. december 6.)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 13 \\ 1 & 3 & 2 \\ -8 & -13 & -12 \end{pmatrix}$$

8. Az $n \times n$-es A mátrixot akkor nevezzük *nullosztónak*, ha létezik egy olyan $(n \times n)$-es $B \neq 0$ mátrix, amelyre $A \cdot B = 0$ (ahol 0 a csupa nulla mátrixot jelöli). Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások:

a) Ha A nullosztó, akkor $\det A = 0$.

b) Ha $\det A = 0$, akkor A nullosztó. (ZH, 2006. október 26.)

9. Mutassuk meg, hogy létezik olyan 5×5-ös invertálható mátrix, melynek pontosan tíz invertálható 2×2-es részmátrixa van. (ZH, 2020. január 3.) (*Részmátrix*: kiválasztunk valahány (jelen esetben 2) sort és valahány (jelen esetben ez is 2) oszlopot a mátrixból és az ezek kereszteződésében álló elemek alkotta mátrixot tekintjük. *Invertálható*: létezik inverze.)

10.a) Létezik-e olyan 3×2-es mátrix, melyhez jobbról bárhogy hozzátéve egy nullvektortól különböző három magas oszlopvektort, invertálható 3×3-as mátrixot kapunk?

b) Létezik-e olyan 3×2-es mátrix, melyhez jobbról bárhogy hozzátéve egy olyan három magas oszlopvektort, melynek egyik koordinátája sem 0, invertálható 3×3-as mátrixot kapunk?