

1. a) Sajátvektorai-e az alábbi  $A$  mátrixnak az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ , illetve  $\underline{w}$  vektorok?  
b) Keressük meg  $A$  összes sajátértékét és mindegyikhez adjunk meg egy ahhoz tartozó sajátvektort is.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Milyen maradékot ad

a)  $70^{70}$  23-mal osztva;

b)  $55^{100}$  48-cal osztva?

3. Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciákat!

a)  $3x \equiv 2 \pmod{5}$

b)  $32x \equiv 12 \pmod{82}$

c)  $5x \equiv 1 \pmod{28}$

4. A jobbra látható  $A$  mátrixról és  $\underline{v}$  vektorról tudjuk, hogy  $\underline{v}$  sajátvektora  $A$ -nak.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ p & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Határozzuk meg a  $p$  valós paraméter értékét.

b) Adjuk meg az  $A$  mátrix egy sajátértékét.

(ZH, 2010. december 15.)

5. Milyen maradékot ad

a)  $2015^{6543}$  2016-tal osztva;

b)  $1025^{1005}$  1023-mal osztva?

c)  $138^{139}$  65-tel osztva?

6. a) Milyen maradékot adhat egy egész szám 34-gyel osztva, ha a 26-szorosa 16 maradékot ad 34-gyel osztva?

b) Valamely  $n$  egészre teljesül, hogy  $41n - 27$  és  $n + 1$  ugyanazt a maradékot adják 62-vel osztva. Mi lehet ez a közös maradék?

c) Az  $n$  pozitív egész számra  $43n - 1$  utolsó két számjegye megegyezik  $2n + 2$  utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy? (ZH, 2014. november 27.)

7. Az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya:  $f : (x, y) \mapsto (2x + y, 3x + 4y)$ .

a) Adjuk meg az  $[f]$  mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

b) Adjunk meg  $\mathbb{R}^2$ -ben egy  $[f]$  sajátvektoraiból álló  $B$  bázist és írjuk fel  $[f]_B$ -t ebben a bázisban.

8. Az  $5 \times 5$ -ös  $A$  mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.)

a) Mutassuk meg, hogy  $\lambda = 7$  sajátértéke  $A$ -nak.

b) Adjuk meg  $A$  egy sajátvektorát.

(ZH, 2011. december 5.)

9. Sajátértéke-e a 3 a jobbra látható  $A$  mátrixnak? Ha igen, adjuk meg az  $A$  egy 3-hoz tartozó sajátvektorát.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2014. november 27.)

10. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?

a)  $2001^{2015}$

b)  $99^{7755}$

c)  $51^{151}$

d)  $\frac{51^{151}}{9}$

11. a) Egy egész szám 222-vel vett osztási maradéka 4-gyel kisebb, mint a szám 60-szorosának a 222-vel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 222-vel osztva? (ZH, 2013. április 25.)

b) Egy egész számra teljesül, hogy  $37n + 9$  és  $n + 10$  azonos maradékot ad 235-tel osztva. Mi lehet ez a közös maradék? (ZH, 2013. május 16.)

c) Milyen maradékot adhat az  $n$  egész szám 202-vel osztva, ha  $53n - 1$  osztható 202-vel? (ZH, 2011. május 17.)

d) Oldjuk meg a következő lineáris kongruenciát:  $170x \equiv 78 \pmod{2006}$ . (ZH, 2004. április 29.)

e) Határozzuk meg mindazon  $n$  egész számokat, melyekre  $3n + 1 \equiv 6 \pmod{2n}$  teljesül. (ZH, 2008. május 7.)

12. Az  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya:  $f : (x, y, z) \mapsto (0, 3x + 4y + z, 6x + 2y + 5z)$ .

a) Adjuk meg az  $[f]$  mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

b) Van-e  $\mathbb{R}^3$ -ben olyan  $B$  bázis, amire az  $[f]_B$  mátrix diagonális (vagyis a főátlóján kívül minden elem nulla)? Ha igen, adjunk meg egy ilyen  $B$ -t és írjuk fel  $[f]_B$ -t.

13. Legyenek  $\underline{u}$  és  $\underline{v}$  az  $n \times n$ -es  $A$  mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy  $\underline{u} + \underline{v}$  sajátvektora

a)  $A$ -nak;

b)  $A^2$ -nek?

( $\approx$ ZH, 2013. december 9., 2013. december 17.)

14. Legyen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineáris transzformáció és  $B$  egy bázis  $\mathbb{R}^n$ -ben.

a) Mutassuk meg, hogy az  $[f]$  és az  $[f]_B$  mátrixok sajátértékei azonosak.

b) Igaz-e, hogy az  $[f]$  és az  $[f]_B$  karakterisztikus polinomjai is megegyeznek?