Bevezetés a Számításelméletbe I.
Nulladik gyakorlat, 2020. szeptember 9.

1. Igazak-e az alábbi állítások?
a) $100 \equiv 43 \pmod{19}$
b) $50 \equiv -17 \pmod{11}$
c) $34567890 \equiv -76543210 \pmod{100}$
d) $21^{1000} \equiv 0 \pmod{7^{100}}$

2. Igazak-e az alábbi állítások (minden szóba jövő esetben)?
a) Ha $x \equiv 3 \quad (2020)$, akkor $x \equiv 3 \quad (1010)$.
b) Ha $x \equiv 3 \quad (2020)$, akkor $x \equiv 13 \quad (2010)$.
c) Ha $x \equiv 3 \quad (2020)$, akkor $x - 3$ osztható 2020-szal.
d) Ha $x - 3$ osztható 2020-szal, akkor $x \equiv 3 \quad (2020)$.

---

3. Igazak-e az alábbi állítások?
a) $111 \equiv -701 \pmod{7}$
b) $1234567 \equiv 7654321 \pmod{9}$
c) $110110101_{(2)} \equiv 1000101101_{(2)} \pmod{8}$
d) $4321^2 \equiv 1234^2 \pmod{5555}$

4. Az x egész számra $x \equiv 7 \quad (444)$ teljesül. Igazak-e az alábbi állítások (minden szóba jövő esetben)?
a) $x + 10 \equiv 17 \quad (444)$
b) $x - 100 \equiv 351 \quad (444)$
c) $5x \equiv 35 \quad (444)$
d) $5x \equiv 35 \quad (2220)$
e) $x^2 \equiv 49 \quad (444)$
f) $x^{100} \equiv 7^{100} \quad (444)$

5. Hány olyan egész szám van 1 és 1000 között, amelynek ugyanannyi páros osztója van, mint páratlan?

6. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $n \geq 1$ egészre $2^n - 1$ prím, akkor n is prím.

---

7. Mely pozitív egész m számokra teljesülnek az alábbi állítások?
a) $149 \equiv 139 \quad (m)$
b) $2020 \equiv 2021 \quad (m)$
c) $13 \equiv 613 \quad (m)$ és $23 \equiv 617 \quad (m)$
d) $7m + 61 \equiv 4m + 76 \quad (m)$

8. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden n egész számra. (ZH, 2014. december 19.)
a) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{39}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{39}$.
b) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{13}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{13}$.

9. Melyek azok a p prímszámok, amikre $p + 10$ és $p + 14$ is prím?

10. a) Hány pozitív osztója van 8800-nak?
b) Hány közös pozitív osztója van 8800-nak és 99000-nek?

11. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $n \geq 1$ egészre $2^n + 1$ prím, akkor n 2-hatvány.

12. a) Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai „kétállásúak”: ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárakkal játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k-adik feleség minden k-adik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?

b) A sah következő születésnapján a feleségek megint rosszalkodnak. Most az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján kettőt fordít, stb., a k-adik feleség minden k-adik ajtó zárján k-t fordít, egészen a 100. feleségig. Most milyen sorszámú cellák lakói szabadulnak?

13. Melyek az $n^4 + 4$ alakú prímszámok? (Vagyis: melyek azok a p prímek, amelyekhez található olyan n egész szám, hogy $p = n^4 + 4$?)