Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok

2019. október 25.

1. Az n pozitív egész utolsó két számjegye a 4-es és az 5-ös számrendszerben is 11. Mi n utolsó két számjegye a 10-es számrendszerben?

2. Mutassuk meg, hogy $1010^{1343} - 2$ osztható 2019-cel. (2019 prímtényezős felbontása: $2019 = 3 \cdot 673$.)

3. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg 10^{70} maradékát 46-tal osztva. (A feladat tehát nem csupán az osztási maradék meghatározása, hanem a tanult algoritmus által végzett számítások dokumentálása is.)

4. Az $\frac{x-11}{2} = \frac{z+19}{-5}$, $y = -1$ egyenletrendszerű e egyenes ugyanabban a pontban döfi a $2x + y - 2z = 3$ egyenletű síkot, mint a $P(15, 2, -8)$ ponton átmenő f egyenes. Írjuk fel az f egyenletrendszerét.

5. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorok. Adjuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált altér összes olyan elemét, amelynek mind a négy koordinátája egyenlő.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

6*. Hány olyan b egész létezik 2 és 2019 között, amelyre létezik két olyan szomszédos pozitív egész szám, hogy mindkettőnek a b alapú számrendszerbeli számjegyeinek az összege osztható 2019-cel?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

2. zárthelyi

2019. december 6.

1. Tudjuk, hogy az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{w}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{x} - \underline{y}, \underline{z} - \underline{w}, \underline{x} + \underline{y} + \underline{z} + \underline{w}$ vektorok által generált altér dimenzióját.

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 6x_2 + (p+2)x_3 + (p+3)x_4 &= p+6 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét a determináns definíciója szerint. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

4. A jobbra látható A mátrixra teljesül, hogy $A^3 = E$ (ahol E a 3×3-as egységmátrix).

a) Határozzuk meg A determinánsát.

b) Határozzuk meg A inverzének jobb alsó elemét.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 13 \\ 1 & 3 & 2 \\ -8 & -13 & -12 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix rangját az x valós paraméter minden értékére.

$$A = \begin{pmatrix} x & x & 1 & x & x \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6*. Legyen V az $\mathbb{R}^k$ egy altere, C egy $k \times n$-es, A pedig egy $n \times n$-es mátrix. Tegyük fel továbbá, hogy a $C \cdot A$ mátrix minden oszlopa V-beli, de a C mátrixnak van olyan oszlopa, ami nem eleme V-nek. Mutassuk meg, hogy ekkor $\det A = 0$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

2019. december 16.

1. Hány olyan 504-nél nem nagyobb, pozitív egész szám van, amelynek van 504-gyel osztva 1 maradékot adó többszöröse?

2. Határozzuk meg az összes olyan n egészt 1 és 1000 között, amelyre $n + 10$ 36-tal osztva, $n - 10$ pedig 38-cal osztva ad 1 maradékot.

3. Van-e az $5x-3y+2z = 1$ egyenletű síknak olyan P pontja, amelyre a P, a $Q(5; 9; 11)$ és az $R(13; 7; 7)$ pontok egy egyenesbe esnek? Ha igen, akkor határozzuk meg az összes ilyen P-t.

4. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorok. Az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált altér $\underline{a}$ elemének első két koordinátája 1. Határozzuk meg az $\underline{a}$ koordinátáinak az összegét.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

5. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}.$$

6*. Létezik-e olyan n egész szám, amelyre $n^4 + 1$ osztható 101-gyel?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

2019. december 16.

1. A $W \leq \mathbb{R}^4$ altér álljon azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból, amelyeknek a második koordinátája duplája az elsőnek, a harmadik koordinátája pedig háromszorosa az elsőnek. (Így például a jobbra látható vektor W-beli.) Határozzuk meg a W altér dimenzióját. (Azt nem szükséges bebizonyítani egy teljes értékű megoldáshoz, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 39 \end{pmatrix}$$

2. Legyen A egy olyan 5×10-es mátrix, amelynek a sorai lineárisan összefüggők, $\underline{b} \in \mathbb{R}^5$ pedig egy oszlopvektor. Mutassuk meg, hogy ha az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor van olyan megoldása is, amelyben legfölјebb 4 változó értéke 0-tól különböző.

3. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 9 & 3 \\ -2 & -10 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \\ 2 & 13 & 12 & -10 \end{vmatrix}$$

4. A 2×3-as A mátrixnak nincs negatív eleme. Tudjuk róla ezen kívül, hogy az $A \cdot A^T$ mátrix bal felső eleme 0, a jobb alsó eleme pedig 14; továbbá az $A^T \cdot A$ mátrix bal felső eleme 4, a jobb alsó eleme pedig 9. Határozzuk meg az A, az $A \cdot A^T$, valamint az $A^T \cdot A$ mátrixokat.

5. Létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak? Ha igen, akkor határozzuk meg A inverzét, valamint A inverzének a rangját.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -13 & 15 & -7 \\ 7 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

6*. Legyenek U és V olyan 10 dimenziós alterek $\mathbb{R}^{20}$-ban, amelyeknek a nullvektoron kívül nincs közös eleme. Mutassuk meg, hogy minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^{20}$ vektorhoz találhatók olyan $\underline{u} \in U$ és $\underline{v} \in V$ vektorok, amelyekre $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótpótzh, ELSŐ zárthelyi pótlása
2020. január 3.

1. Mennyi maradékot ad 7^{3234} 80-nal osztva?

2. Jumurdzsák először örült a tiszti kinevezésnek, de hamarosan elment a kedve az egésztől. Mindjárt az első összecsapásban jópáran elestek a rábízott 50 fős csapatból, amit még elviselt volna, csakhogy köztük volt a pénztáros is, így már a második héten Jumurdzsáknak kellett kiosztania a zsoldot, ami cseppet sem volt egyszerű feladat. Minden alárendeltjének 26 akcse járt hetente (neki magának pedig 2 arany), de a főnökség persze nem bajlódott akcsékkal, aranyban adta át Jumurdzsáknak a csapat heti zsoldját (1 arany = 60 akcse). Fel kellett tehát váltania az aranyakat a zsold kiosztása előtt, ráadásul még a visszamaradó nyamvadt 2 akcsét sem tarthatta meg. – Így jár, aki elveszti a talizmánját – sóhajtott keserűen.
Hányan estek el (a második hétig) Jumurdzsák alárendeltjei közül?

3. Az e egyenes egyenletrendszere $x = y = \frac{z-3}{2}$, az f egyenes egyenletrendszere $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = z + p$, ahol $p \in \mathbb{R}$. Adjuk meg azon p értékeket, melyekre e és f metszik egymást.

4. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{v}$ vektort palindrómának, ha $\underline{v}$ koordinátáit fordított sorrendben felírva ugyancsak $\underline{v}$-t kapjuk (palindróma pl. a jobbra látható vektor). Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^5$-beli palindrómák halmaza altér $\mathbb{R}^n$-ben.) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

5. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorrendszer független $\mathbb{R}^n$-ben. Következik-e ebből, hogy a $2\underline{a} + \underline{b}, 2\underline{b} + \underline{c}, 2\underline{c} + \underline{a}$ rendszer is független?

6*. Igaz-e, hogy ha $x^2 \equiv 1 \pmod{187}$, akkor $x \equiv 1 \pmod{187}$ vagy $x \equiv -1 \pmod{187}$? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, mutassunk ellenpéldát.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.
Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótpótzh, MÁSODIK zárthelyi pótlása
2020. január 3.

1. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{v}$ vektort palindrómának, ha $\underline{v}$ koordinátáit fordított sorrendben felírva ugyancsak $\underline{v}$-t kapjuk (palindróma pl. a jobbra látható vektor). Határozzuk meg az $\mathbb{R}^5$-beli palindrómák által alkotott V altér dimenzióját. (Azt, hogy V altér, nem kell indokolnunk.)

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2. Döntsük el, hogy a p, q valós paraméterek mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, akkor adjuk meg a megoldások számát is (magukat a megoldásokat nem szükséges megadni).

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 8x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 &= 30 \\ 3x_1 + 5x_2 + 13x_3 + p \cdot x_4 &= q \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét az a, b tetszőleges valós paraméterek minden értékére.

$$\begin{vmatrix} a & 2a & 4a & 9a \\ b & 2b & 5b & 10b \\ 1 & 3 & 6 & 12 \\ 3 & 6 & 12 & 20 \end{vmatrix}$$

4. Legyen A a jobbra látható mátrix. Létezik-e olyan X mátrix, melyre AX a 3×3-as egységmátrix?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix rangját minden $a, b, c \in \mathbb{R}$ értékre.

$$\begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ 1 & 2 & 3 \\ a+1 & 2b+2 & 3c+3 \end{pmatrix}$$

6*. Mutassuk meg, hogy létezik olyan 5×5-ös invertálható A mátrix, melynek pontosan tíz invertálható 2×2-es részmátrixa van.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.
Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2019. október 25.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Az n pozitív egész utolsó két számjegye a 4-es és az 5-ös számrendszerben is 11. Mi n utolsó két számjegye a 10-es számrendszerben?

* * * * *

A feladat feltételeiből $n \equiv 5 \pmod{16}$ és $n \equiv 6 \pmod{25}$ adódik. (1 pont)
A kapott kongruenciarendszert a tanult módszerrel oldjuk meg.
Az első kongruenciából: $n = 16k + 5$ valamely k egészre. (1 pont)
Ezt a másodikba helyettesítve: $16k + 5 \equiv 6 \pmod{25}$. Mindkét oldalból 5-öt levonva a $16k \equiv 1 \pmod{25}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
$1 \equiv -24 \pmod{25}$ miatt ez a $16k \equiv -24 \pmod{25}$ alakba írható. 8-cal osztva: $2k \equiv -3 \pmod{25}$, ahol a modulus $(8, 25) = 1$ miatt nem változott. (2 pont)
Hasonlóan folytatva: $-3 \equiv 22 \pmod{25}$ miatt a $2k \equiv 22 \pmod{25}$ alakot kapjuk. Ezt 2-vel osztva: $k \equiv 11 \pmod{25}$, ahol a modulus $(2, 25) = 1$ miatt megint nem változott. (1 pont)
Mivel mindkét megtett lépésünk ekvivalens átalakítás volt, ezért $k \equiv 11 \pmod{25}$ valóban a lineáris kongruencia megoldáshalmazát adja meg. (1 pont)
Ebből tehát $k = 25\ell + 11$ valamely ℓ egészre. Ezt visszahelyettesítve: $n = 16k + 5 = 16(25\ell + 11) + 5 = 400\ell + 181$. (2 pont)
Következik, hogy n 100-as maradéka – és így az utolsó két számjegye is –: 81. (1 pont)
A feladat valamivel kevesebb számolással is megoldható, ha az $n \equiv 5 \pmod{16}$ kongruencia helyett annak csak az $n \equiv 1 \pmod{4}$ következményét használjuk és az így kapott kongruenciarendszert oldjuk meg. A megoldás során előállt lineáris kongruencia természetesen más tanult módszerekkel, így akár az Euklideszi algoritmussal is megoldható. Aki a fent leírthoz hasonló utat választ, az a lépések ekvivalenciájára való hivatkozást kiválthatja azzal, hogy a megoldások száma előre tudhatóan 1 lesz, mert az ismeretlen együtthatója a modulushoz relatív prím; azonban a két észrevétel közül legalább az egyik szükséges a hiánytalan indokláshoz.

2. Mutassuk meg, hogy $1010^{1343} - 2$ osztható 2019-cel. (2019 prímtényezős felbontása: $2019 = 3 \cdot 673$.)

* * * * *

$(1010, 2019) = 1$ (mert 1010 se 3-mal, se 673-mal nem osztható). (1 pont)
$\varphi(2019) = \varphi(3 \cdot 673) = (3-1)(673-1) = 1344$ a tanult képlet szerint. (1 pont)
Így az Euler-Fermat tételből $1010^{1344} \equiv 1 \pmod{2019}$ következik. (2 pont)
Ez $1 \equiv 2020 \pmod{2019}$ miatt így is írható: $1010^{1344} \equiv 2020 \pmod{2019}$. (1 pont)
Mindkét oldalt 1010-zel osztva: $1010^{1343} \equiv 2 \pmod{2019}$, (2 pont)
ahol a modulus $(1010, 2019) = 1$ miatt nem változott. (1 pont)
Ebből tehát $2019 \mid 1010^{1344} - 2$ következik, ami épp a bizonyítandó állítás. (2 pont)
A megoldás második része helyettesíthető azzal is, hogy az $1010x \equiv 1 \pmod{2019}$ lineáris kongruenciának megoldása egyrészt $x = 2$ (mert $2 \cdot 1010 = 2020$), másrészt az Euler-Fermat tétel miatt $x = 1010^{1343}$ is, viszont $(1010, 2019) = 1$ miatt ennek a lineáris kongruenciának a tanult tétel szerint csak egyetlen megoldása van modulo 2019, ezért $1010^{1343} \equiv 2 \pmod{2019}$ valóban következik.

3. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg 10^{70} maradékát 46-tal osztva. (A feladat tehát nem csupán az osztási maradék meghatározása, hanem a tanult algoritmus által végzett számítások dokumentálása is.)

* * * * *

A tanultak szerint ismételt négyzetre emelésekkel és a kapott eredmények 46-os maradékának meghatározásával kiszámítjuk a $10^1, 10^2, 10^4, \ldots, 10^{64}$ hatványok 46-os maradékát. Ezek sorra: 10, 8, 18, 2, 4, 16 és 26. (4 pont)
Mivel $70 = 2 + 4 + 64$, (2 pont)
ezért meghatározzuk először a $10^6 = 10^2 \cdot 10^4$, majd a $10^{70} = 10^6 \cdot 10^{64}$ hatványok 46-os maradékait a korábban kiszámolt megfelelő maradékokkal való szorzással és a kapott eredmények 46-os maradékának meghatározásával. Ezek sorra: 6 és 18. (4 pont)
Így a keresett maradék: 18.
A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges a fenti részletességgel leírni az elvégzett műveletek mögötti szándékot, elegendő a helyes számítások közlése. Nem jelent pontlevonást, ha egy megoldó a végeredményhez először $10^{68} = 10^{64} \cdot 10^4$, majd 10^{70} maradékait határozza meg a fentihez hasonló módon. Ha viszont egy megoldó a kapott részeredményeit nem helyettesíti azok 46-os maradékaival és például 10^4 maradékához közvetlenül 10000-et osztja 46-tal, az lényeges elvi hibának számít, ami az algoritmus ismeretének alapvető hiányát mutatja; egy ilyen megoldó legföljebb 5 pontot kaphat (azt is csak akkor, ha a további számolásai hasznosak és a helyes végeredményt megkapja).

4. Írjuk fel az e egyenes egyenletrendszerét, ha tudjuk róla, hogy áthalad a $P(15, 2, -8)$ ponton és hogy e ugyanabban a pontban döfi a $2x + y - 2z = 3$ egyenletű síkot, mint az $\frac{x-11}{2} = \frac{z+19}{-5}$, $y = -1$ egyenletrendszerű f egyenes.

* * * * *

Először meghatározzuk a $2x + y - 2z = 3$ egyenletű S sík és az f egyenes Q metszéspontját. Ehhez megoldjuk az S egyenletéből és az f egyenletrendszeréből álló egyenletrendszert. (1 pont)
Az f-et leíró első egyenletből: $2z = 17 - 5x$. Ezt, illetve az $y = -1$ egyenletet az S egyenletébe helyettesítve: $2x - 1 - (17 - 5x) = 3$. Ebből $x = 3$ adódik, amiből $z = \frac{17-5\cdot3}{2} = 1$. Így a metszéspont: $Q(3; -1; 1)$ (3 pont)
Az e tehát átmegy P-n és Q-n, így irányvektora a $\overrightarrow{QP}$ vektor. (2 pont)
A P-be, illetve Q-ba mutató helyvektorokat $\underline{p}$-vel, illetve $\underline{q}$-val jelölve $\overrightarrow{QP} = \underline{p} - \underline{q} = (15; 2; -8) - (3; -1; 1) = (12; 3; -9)$. (1 pont)
(Ehelyett használhatjuk irányvektornak például a $\overrightarrow{QP}$ harmadát is, a $\underline{v}(4; 1; -3)$ vektort.)
Így az e egyenletrendszerét a $\underline{v}$ és (például) a P segítségével felírva: $\frac{x-15}{4} = y - 2 = \frac{z+8}{-3}$. (3 pont)

5. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorok. Adjuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált altér összes olyan elemét, amelynek mind a négy koordinátája egyenlő.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

* * * * *

Az $\underline{a} = \begin{pmatrix} p \\ p \\ p \\ p \end{pmatrix}$ vektor pontosan akkor van az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált altérben, ha $\underline{a}$ kifejezhető $\underline{u}$-ból, $\underline{v}$-ből és $\underline{w}$-ből lineáris kombinációval; vagyis ha léteznek olyan α, β, γ skalárok, hogy $\alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v} + \gamma \cdot \underline{w} = \underline{a}$.(1 pont)
Behelyettesítve $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ konkrét értékét és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= p \\ 2\alpha &= p \\ 3\beta &= p \\ 4\gamma &= p \end{aligned} \qquad \text{(4 pont)}$$

Az utolsó három egyenletből $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = \frac{p}{3}$, $\gamma = \frac{p}{4}$ adódik. Ezeket az elsőbe helyettesítve $\frac{13}{12}p = p$, vagyis $p = 0$ következik. (2 pont)
Azt kaptuk tehát, hogy az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált altérnek a nullvektor az egyetlen olyan eleme, amelynek mind a négy koordinátája egyenlő. (3 pont)

6*. Hány olyan b egész létezik 2 és 2019 között, amelyre létezik két olyan szomszédos pozitív egész szám, hogy mindkettőnek a b alapú számrendszerbeli számjegyeinek az összege osztható 2019-cel?

* * * * *

Az alábbi megoldásban a számok számjegyeit végig b alapú számrendszerben értjük, így ezek 0 és $b-1$ közti egészek. Az n számjegyeinek az összegét pedig S_n-nel jelöljük (b alapú számrendszerben).
Tegyük fel, hogy az n és az $n+1$ pozitív egészekre S_n és S_{n+1} is osztható 2019-cel. Ekkor n utolsó jegye $b-1$ kell legyen. Ha ugyanis nem az volna, akkor $n+1$ utolsó számjegye 1-gyel volna nagyobb n-énél, a többi jegyük pedig azonos volna; így $S_{n+1} = S_n + 1$ teljesülne, ezért nem lehetne mindkettő osztható 2019-cel. (1 pont)
Jelöljük t-vel azt, hogy n hány darab $(b-1)$-es számjegyre végződik. Ekkor $n+1$ utolsó t darab jegye nyilván 0, jobbról a $(t+1)$-edik jegye 1-gyel nagyobb n-énél, a többi jegyük pedig azonos. (Ha esetleg n összesen t jegyű, akkor az előző mondatot úgy értjük, hogy az $(n+1)$-nek a jobbról $(t+1)$-edik jegye „0-ról 1-re változott” – vagyis a jegyeinek a száma 1-gyel nagyobb n-énél.) (1 pont)
Ebből tehát $S_{n+1} = S_n - (b-1) \cdot t + 1$ következik. (2 pont)
Mivel $2019 \mid S_n$ és $2019 \mid S_{n+1}$, ezért ebből az egyenletből $2019 \mid 1 - (b-1) \cdot t$, vagyis $(b-1) \cdot t \equiv 1 \pmod{2019}$ következik. (1 pont)
Ebből a lineáris kongruenciák megoldhatóságára tanult tételből $(b-1, 2019) \mid 1$, vagyis $(b-1, 2019) = 1$ következik (hiszen $x = t$ megoldása a $(b-1) \cdot x \equiv 1 \pmod{2019}$ lineáris kongruenciának). (2 pont)
Megmutattuk tehát, hogy ha léteznek a feladat szerinti n és $n+1$ egészek, akkor $(b-1, 2019) = 1$. Azonban ennek a megfordítása is igaz: valóban, ha $(b-1, 2019) = 1$, akkor a tanult tétel szerint megoldható a $(b-1) \cdot x \equiv 1 \pmod{2019}$ lineáris kongruencia, így t-nek választhatjuk ennek egy (pozitív) megoldását. Ebből n-et konstruálhatjuk úgy, hogy az utolsó t darab jegye $b-1$, majd ezek elé felveszünk néhány további számjegyet (például $2019 - ((b-1) \cdot t \bmod 2019)$ darab 1-est) úgy, hogy $2019 \mid S_n$ teljesüljön. Ekkor a fent megmutatott $S_{n+1} = S_n - (b-1) \cdot t + 1$ egyenlet miatt $2019 \mid S_{n+1}$ is igaz lesz. (2 pont)
A feladat kérdésének megválaszolásához tehát azon b egészeket kell megszámolni 2 és 2019 között, amelyekre $(b-1, 2019) = 1$. Ezeknek a száma pedig nyilván $\varphi(2019) = (3-1)(673-1) = 1344$.(1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
második zárthelyi — pontozási útmutató
2019. december 6.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot éro megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Tudjuk, hogy az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{w}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{x}-\underline{y}, \underline{z}-\underline{w}, \underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w}$ vektorok által generált altér dimenzióját.

* * * * *

Megmutatjuk, hogy az $\underline{x}-\underline{y}, \underline{z}-\underline{w}, \underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w}$ vektorrendszer a kérdéses altér (nevezzük V-nek) bázisa, amiből következik, hogy V dimenziója 3, hiszen van 3 elemű bázisa. (2 pont)
Ehhez azt kell igazolnunk, hogy $\underline{x}-\underline{y}, \underline{z}-\underline{w}, \underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w}$ független és generátorrendszere V-nek. (1 pont)
Az, hogy $\underline{x}-\underline{y}, \underline{z}-\underline{w}, \underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w}$ generátorrendszere V-nek, azonnal következik a generált altér definíciójából. (1 pont)
A függetlenség igazolásához írjuk fel $\underline{x}-\underline{y}, \underline{z}-\underline{w}, \underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w}$ egy lineáris kombinációját az α, β, γ együtthatókkal és vizsgáljuk meg, hogy ez mikor lehet $\underline{0}$. (1 pont)
Az

$$\alpha(\underline{x}-\underline{y})+\beta(\underline{z}-\underline{w})+\gamma(\underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w})=\underline{0}.$$

egyenlőségben a zárójeleket felbontva, majd átrendezve

$$(\alpha+\gamma)\underline{x}+(\gamma-\alpha)\underline{y}+(\beta+\gamma)\underline{z}+(\gamma-\beta)\underline{w}=\underline{0}$$

adódik. (2 pont)
Mivel az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{w}$ vektorok lineárisan függetlenek (hiszen bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben), ez csak akkor lehetséges, ha $\alpha+\gamma=0$, $\gamma-\alpha=0$, $\beta+\gamma=0, \gamma-\beta=0$. (2 pont)
Ebből azonnal adódik, hogy $\alpha=\beta=\gamma=0$, így a kérdéses vektorok egy lineáris kombinációja csak akkor lehet a nullvektor, ha mindhárom együttható 0, így az előadáson tanult tétel szerint a vektorok függetlenek. (1 pont)

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 6x_2 + (p+2)x_3 + (p+3)x_4 &= p+6 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

* * * * *

A második és a harmadik egyenlet sorrendjének cseréje nem változtatja meg a megoldáshalmazt (de egyszerűsíti a megoldást). (0 pont)
A cserét követően Gauss-eliminációval az egyenletrendszert az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+3 & p+2 \end{array}\right)$$

alakra hozzuk. (2 pont)
Ha $p \neq -2$, akkor a harmadik sort $(p-2)$-vel osztva folytatjuk az eliminációt, (1 pont)
melynek végén az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3\frac{p+3}{p+2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{p+3}{p+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p+3}{p+2} & 1 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk. (2 pont)
Innen a megoldás $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = 2 + 3\frac{p+3}{p+2}\alpha, x_2 = -\frac{p+3}{p+2}\alpha, x_3 = 1 - \frac{p+3}{p+2}\alpha$. (1 pont)
Ha $p = -2$, akkor a harmadik oszlopban nem lesz vezéregyes, a negyedikben viszont igen (1 pont)
és az eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk. (2 pont)
A megoldás ekkor tehát $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = 5 - 3\alpha, x_2 = \alpha - 1, x_4 = 0$. (1 pont)

3. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét a determináns definíciója szerint. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Megmutatjuk, hogy a determináns definíciójában szereplő, előjelesen összeadandó szorzatok között egyetlen nemnulla szorzat szerepel. (1 pont)
Ha ugyanis nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a negyedik sorból csak a 6-ot választhatjuk, így az ötödik sorból az 5-öt már nem, csak a 2-t választhatjuk (mert a második oszlopból már vettünk elemet). Hasonlóan folytatva, a második sorból csak a 2-t, ezért az elsőből csak az 1-et, végül a harmadikból csak az első oszlopban szereplő 3-at választhatjuk, így csakugyan egyetlen nemnulla szorzatot kapunk, a $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3$-at. (3 pont)
Ehhez az egyetlen nemnulla szorzathoz tartozó permutáció az 5,3,1,2,4 (hiszen az első sorból az ötödik elemet vettük, a másodikból a harmadikat, stb.). (2 pont)
Ennek a permutációnak az inverziószáma 6 (mivel 6 inverzióban álló pár van: $(5,3)$, $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,4)$, $(3,1)$, $(3,2)$). (2 pont)
Mivel az inverziószám páros, ezért a szorzathoz tartozó előjel: +, (1 pont)
a determináns értéke tehát 72. (1 pont)

4. A jobbra látható A mátrixra teljesül, hogy $A^3 = E$ (ahol E a 3×3-as egységmátrix).

a) Határozzuk meg A determinánsát.

b) Határozzuk meg A inverzének jobb alsó elemét.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 13 \\ 1 & 3 & 2 \\ -8 & -13 & -12 \end{pmatrix}$$

* * * * *

a) Mivel $A^3 = E$, a determinánsok szorzástétele szerint $\det A^3 = \det A^2 \det A = (\det A)^3$, így $(\det A)^3 = \det A^3 = \det E = 1$, (2 pont)
ahonnan $\det A = 1$. (1 pont)
b) A-nak létezik inverze, hiszen a determinánsa nem 0, de az inverz létezésére persze a feladat szövegéből is következtethetünk. (0 pont)
Mivel $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = A^3 = E$, A inverze az A^2 mátrix. (Aki csak az $A \cdot A^2 = A^3 = E$ vagy az $A^2 \cdot A = A^3 = E$ egyenlőséget mutatja meg, attól 1 pontot vonjunk le, aki ezek közül az egyiket is hiányosan igazolja, attól 2-t, végül aki csak kimondja, de nem igazolja az $A^{-1} = A^2$ állítást, attól 3-at.) (5 pont)
$A^{-1} = A^2$ jobb alsó eleme $-8 \cdot 13 + (-13) \cdot 2 + (-12) \cdot (-12) = 14$. (2 pont)

Természetesen a determináns és az inverz jobb alsó eleme is meghatározható az $A^3 = E$ egyenlőséget figyelmen kívül hagyva, egyszerűen Gauss-eliminációval. Az a) feladat esetén 1 vagy 2 számolási hibáért 1 pontot, ennél több számolási hibáért 2 pontot vonjunk le. Elvi hiba esetén természetesen szigorúbban járjunk el. A determináns persze máshogy is kiszámítható, amennyiben ez órán tanult eszközökkel történik, akkor az is maximum pontot ér (hibátlan megvalósítás esetén). Órán kívüli eszközök (pl. Sarrus-szabály) csak kellő indoklás esetén használhatók.

b) A

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 9 & 13 & 13 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -13 & -12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

kibővített együtthatómátrixban az első és a második sort megcserélve az egyenletrendszer megoldáshalmaza nem változik meg. (Erre a megállapításra azért van szükség, mert ez a lépés nem része magának a Gauss-eliminációnak, ha azt végeznénk, akkor az első sor 9-cel osztása lenne az első lépés.) (1 pont)

Az

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 13 & 13 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -13 & -12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

kibővített együtthatómátrixot Gauss-eliminációval az

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{9}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 13 & 14 \end{array}\right)$$

lépcsős alakra hozzuk, (3 pont)
ahonnan az inverz jobb alsó eleme leolvasható, hiszen az utolsó sor a Gauss-elimináció hátralevő részében már nem változik, (3 pont)
a keresett szám tehát a 14. (0 pont)

Ha valaki az inverz megadásával fejezi be a feladatot és nem adja meg a jobb alsó elemet (de az persze a megadott inverzből leolvasható), attól a pontozásnak megfelelően nem kell pontot levonni. Mint láttuk, a feladat megoldásához nem kell magát az inverzet kiszámítani, elég annak az utolsó sorát megállapítani, sőt, mivel annak is csak az utolsó eleme a kérdés, elég a Gauss-eliminációt a jobb oldali rész utolsó oszlopával végezni. Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le, ha azonban a hiba a lépcsős alak megállapítása után, az inverz második vagy harmadik sorának kiszámításakor történik, akkor ne vonjunk le érte pontot. Aki megállapítja, hogy a jobb oldalon valójában elég az utolsó oszloppal dolgozni, attól a többi oszlop számítása során elkövetett számolási hibákért se vonjunk le pontot. Elírásért, ha attól a feladat nem lett könnyebb, egyáltalán ne vonjunk le pontot.

5. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix rangját az x valós paraméter minden értékére.

$$A = \begin{pmatrix} x & x & 1 & x & x \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. A rangot Gauss-eliminációval állapítjuk meg: az nem lesz más, mint a lépcsős alakban a vezéregyesek száma. (1 pont)

Ha $x = 0$, akkor minimális számolás után megkapjuk a vezéregyeseket az első három oszlopban, a negyedik sort pedig (mivel csupa 0-ból áll) törölni kell (kétféle lépcsős alakot is kaphatunk, mert a második vezéregyes létrehozásakor a második sort a harmadikkal és a negyedikkel is kicserélhetjük). A rang ilyenkor tehát 3. (1 pont)

Ha $x \neq 0$, akkor osztunk x-szel, majd az első sort levonjuk a másodikból és a negyedikből. Ekkor a mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{x} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{1}{x} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x-\frac{1}{x} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alakot ölt, (1+1 pont)

vagyis a második sor -1-gyel szorzása után megvan a második vezéregyes is. (1 pont)

A második sort a harmadikból kivonva az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{x} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{x}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-\frac{1}{x} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk. (1 pont)

Ha $\frac{1}{x} \neq 1$, vagyis $x \neq 1$, akkor a harmadik sort $(1 - \frac{1}{x})$-szel osztva létre tudjuk hozni a harmadik vezéregyest is, (1 pont)

majd a harmadik sor $(x - \frac{1}{x})$-szeresét a negyedikből levonva és a negyedik (csupa 0) sort törölve megkapjuk az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{x} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{x}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lépcsős alakot, ilyenkor a rang tehát 3. (2 pont)

Ha viszont $\frac{1}{x} = 1$, vagyis $x = 1$, akkor a harmadik és a negyedik sor is csupa 0, a kapott lépcsős alakban ekkor tehát két vezéregyes lesz, ilyenkor a rang 2. (1 pont)

Összefoglalva: az derült ki, hogy ha $x = 1$, akkor a rang 2, különben pedig 3. (0 pont)

Második megoldás. Ismét Gauss-eliminációt használunk, de előtte felcseréljük az első és a második sort, ez a rangot (pl. a sorrang definíciója miatt, amiben a sorok sorrendje lényegtelen) nem változtatja meg. (Ha valaki a Gauss-elimináció keretében cseréli ki ezt a két sort, akkor elvileg indokolnia kéne, hogy a rang miért nem változik, de ennek hiányáért ne vonjunk le pontot.) (1 pont)

A lépcsős alakban keressük a vezéregyesek számát, (1 pont)

ehhez az első sor x-szeresét levonjuk a második sorból, az egyszeresét pedig a negyedik sorból. (1 pont)

Ekkor a mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1-x & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alakot ölt. Az elimináció folytatása előtt megcseréljük a második és a harmadik sort, ez a rangot nem fogja megváltoztatni (e megjegyzés hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)
Ekkor a második vezéregyes rendelkezésre áll, (1 pont)
most a második sor x-szeresét kell levonni a harmadikból és az egyszeresét a negyedikből. Így az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk. (1 pont)
Ha $x \neq 1$, akkor a harmadik sort $(1-x)$-szel osztva létre tudjuk hozni a harmadik vezéregyest is, (1 pont)
majd a harmadik sor $(x-1)$-szeresét a negyedikből levonva és a negyedik (csupa 0) sort törölve megkapjuk az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lépcsős alakot, ilyenkor a rang tehát 3. (2 pont)
Ha $x = 1$, akkor a harmadik és a negyedik sor is csupa 0, a kapott lépcsős alakban ekkor tehát két vezéregyes lesz, ilyenkor a rang 2. (1 pont)

Természetesen a rang más eljárásokkal is megkapható, érdemes lehet például megfigyelni, hogy a negyedik és az ötödik oszlop törölhető, mivel a lineárisan független oszlopok maximális számát nem befolyásolják (lévén azonosak a második, illetve az első oszloppal). Ha valaki csak ennyit állapít meg (helyes indoklással) az 2 pontot kapjon.

6*. Legyen V az $\mathbb{R}^k$ egy altere, C egy $k \times n$-es, A pedig egy $n \times n$-es mátrix. Tegyük fel továbbá, hogy a $C \cdot A$ mátrix minden oszlopa V-beli, de a C mátrixnak van olyan oszlopa, ami nem eleme V-nek. Mutassuk meg, hogy ekkor $\det A = 0$.

* * * * *

Tegyük fel indirekten, hogy $\det A \neq 0$, ekkor A-nak létezik inverze. (1 pont)
$(CA)A^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C$ (3 pont)
a mátrixszorzás asszociativitása miatt. (1 pont)
Az előadásról tudjuk, hogy az XY mátrix oszlopai az X mátrix oszlopainak lineáris kombinációi. (2 pont)
Ezt az $X = CA$, $Y = A^{-1}$ szereposztásban alkalmazva azt kapjuk, hogy C oszlopai a CA oszlopainak lineáris kombinációi. (2 pont)
Ebből az alterek lineáris kombinációra való zártsága miatt következik, hogy ha CA minden oszlopa V-beli, akkor C minden oszlopa is V-beli, ami ellentmond a feladatbeli feltételnek, tehát ellentmondásra jutottunk. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2019. december 16.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

1. Hány olyan 504-nél nem nagyobb, pozitív egész szám van, amelynek van 504-gyel osztva 1 maradékot adó többszöröse?

* * * * *

Az $a \in \{1, 2, \dots, 504\}$ egésznek akkor és csak akkor van 504-gyel osztva 1 maradékot adó többszöröse, ha megoldható az $ax \equiv 1 \pmod{504}$ lineáris kongruencia, (3 pont)
ami a tanult tétel szerint azzal ekvivalens, hogy $(a, 504) \mid 1$, vagyis $(a, 504) = 1$. (3 pont)
Az ilyen a-k száma éppen $\varphi(504) =$ (2 pont)
$= \varphi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 7) = (2^3 - 2^2)(3^2 - 3^1)(7^1 - 7^0) = 4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$ a tanult tétel szerint. (2 pont)

2. Határozzuk meg az összes olyan n egészt 1 és 1000 között, amelyre $n + 10$ 36-tal osztva, $n - 10$ pedig 38-cal osztva ad 1 maradékot.

* * * * *

A feladat feltételeiből $n + 10 \equiv 1 \pmod{36}$ és $n - 10 \equiv 1 \pmod{38}$ adódik. (1 pont)
Átrendezés után: $n \equiv -9 \pmod{36}$, $n \equiv 11 \pmod{38}$. (1 pont)
A kapott kongruenciarendszert a tanult módszerrel oldjuk meg.
Az első kongruenciából: $n = 36k - 9$ valamely k egészre. (1 pont)
Ezt a második kongruenciába helyettesítve: $36k - 9 \equiv 11 \pmod{38}$. Mindkét oldalhoz 9-et adva a $36k \equiv 20 \pmod{38}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
$36 \equiv -2 \pmod{38}$ miatt ez a $-2k \equiv 20 \pmod{38}$ alakba írható. Mindkét oldalt (-2)-vel osztva: $k \equiv -10 \equiv 9 \pmod{19}$, ahol a modulust $(-2, 38) = 2$ miatt kellett 2-vel osztani. (2 pont)

Mivel az osztás ekvivalens átalakítás volt, ezért $k \equiv 9 \pmod{19}$ valóban a lineáris kongruencia megoldáshalmazát adja meg. (1 pont)

Ebből tehát $k = 19\ell + 9$ valamely ℓ egészre. Ezt visszahelyettesítve: $n = 36k - 9 = 36(19\ell + 9) - 9 = 684\ell + 315$. (2 pont)

Az $\ell = 0, 1$ értékekre kapunk 1 és 1000 közötti n-eket: $n = 315$ és $n = 999$, így ez a két megoldása van a feladatnak. (1 pont)

A megoldás során előállt lineáris kongruencia természetesen más tanult módszerekkel, így akár az Euklideszi algoritmussal is megoldható. A megoldáshalmaz a $k \equiv 9 \pmod{19}$ alak helyett megadható így is: $k \equiv 9 \pmod{38}$ vagy $k \equiv 28 \pmod{38}$; aki így jár el, annak a $k = 38\ell + 9$ és a $k = 38\ell + 28$ esetet is vissza kell helyettesíteni az $n = 36k - 9$ egyenletbe. Ebben az esetben a lépések ekvivalenciájára való hivatkozás kiváltható azzal is, hogy $(36, 38) = 2 \mid 2$ miatt a lineáris kongruenciának 2 megoldása van modulo 38, így mindkét kapott megoldásnak jónak kell lennie.

3. Van-e az $5x - 3y + 2z = 1$ egyenletű síknak olyan P pontja, amelyre a P, a $Q(5; 9; 11)$ és az $R(13; 7; 7)$ pontok egy egyenesbe esnek? Ha igen, akkor határozzuk meg az összes ilyen P-t.

* * * * *

A keresett P-nek (ha létezik) az $5x - 3y + 2z = 1$ egyenletű S sík és a QR egyenes döféspontjának kell lennie. (1 pont)

A QR egyenesnek irányvektora a $\overrightarrow{QR}$ vektor, (1 pont)

vagyis a $\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q} = (8; -2; -4)$ (ahol $\underline{r}$, illetve $\underline{q}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorokat jelölik). (1 pont)

$\overrightarrow{QR}$ helyett kényelmi okokból használhatjuk a $\underline{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = (4; -1; -2)$ vektort is irányvektornak.

$\underline{v}$-ből és (például) Q-ból felírható a QR egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = 5 + 4t$, $y = 9 - t$, $z = 11 - 2t$ ($t \in \mathbb{R}$). (3 pont)

A döféspont meghatározásához ezeket S egyenletébe helyettesítjük: $5(5+4t) - 3(9-t) + 2(11-2t) = 1$. Ebből $19t = -19$, vagyis $t = -1$ adódik. Így a keresett döféspont koordinátái: $x = 5 + 4 \cdot (-1) = 1$, $y = 9 - (-1) = 10$, $z = 11 - 2 \cdot (-1) = 13$. Tehát egyetlen P pont felel meg a feladat szövegének: $P(1; 10; 13)$. (4 pont)

Természetesen az egyenes nem paraméteres egyenletrendszerét is használhatjuk a feladat megoldásához, majd az ebből, illetve a sík egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásaként kaphatjuk a döféspontot. Az egyenletrendszerért, illetve a számításért ebben az esetben is 3+4 pont jár.

4. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorok. Az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált altér $\underline{a}$ elemének első két koordinátája 1. Határozzuk meg az $\underline{a}$ koordinátáinak az összegét.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

* * * * *

Mivel $\underline{a} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$, ezért $\underline{a}$ kifejezhető $\underline{u}$-ból, $\underline{v}$-ből és $\underline{w}$-ből lineáris kombinációval; vagyis léteznek olyan α, β, γ skalárok, hogy $\alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v} + \gamma \cdot \underline{w} = \underline{a}$. (2 pont)

Jelölje $\underline{a}$ utolsó két koordinátáját p, illetve q. Behelyettesítve $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ konkrét értékét és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ -2\alpha + \beta &= 1 \\ -4\beta + 5\gamma &= p \\ -5\gamma &= q \end{aligned}$$ (4 pont)

Az első két egyenletből $\alpha = 1$ és $\beta = 1 + 2\alpha = 3$ adódik. (1 pont)

Így az $\underline{a}$ koordinátáinak összege: $1 + 1 + p + q = 1 + 1 + (-4 \cdot 3 + 5\gamma) + (-5\gamma) = -10$. (3 pont)

5. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}.$$

* * * * *

Tegyük fel, hogy $\alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v} + \gamma \cdot \underline{w} = \underline{0}$ teljesül valamilyen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ skalárokra. (1 pont)
Behelyettesítve $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ konkrét értékét és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} \alpha - \gamma &= 0 \\ -\alpha + \beta &= 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma &= 0 \\ \beta + p \cdot \gamma &= 0 \end{aligned}$$

(2 pont)

Az első két egyenletből: $\alpha = \beta = \gamma$. Ezt a harmadikba helyettesítve: $\alpha - 2\alpha + \alpha = 0$ adódik, vagyis ez az egyenlet következménye az első kettőnek. (1 pont)
(Valóban: a harmadik egyenlet az első (-1)-szeresének és a második (-2)-szeresének az összege.)
A negyedik egyenlet $\beta = \alpha$ és $\gamma = \alpha$ helyettesítés után $(p+1)\alpha = 0$ alakot ölt. (1 pont)
Ha $p \neq -1$, akkor ebből $\alpha = 0$ és így $\beta = \gamma = 0$ adódik. Így ebben az esetben a tanultak szerint $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ lineárisan függetlenek. (3 pont)
Ha viszont $p = -1$, akkor a negyedik egyenlet is következménye az első kettőnek (azok összege). Így ebben az esetben a rendszernek megoldása például $\alpha = \beta = \gamma = 1$, ezért $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ nem lineárisan függetlenek. (2 pont)
Így a feladat kérdésére a válasz: $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ a $p \neq -1$ értékekre lineárisan függetlenek.
A fenti lineáris egyenletrendszer Gauss-eliminációval is megoldható (annak ellenére is, hogy ez már az első zárthelyi után szerepelt az anyagban). Ha valaki így dolgozik, akkor a (nagyon egyszerű) eliminációért 2 pont jár, majd annak az eredményéből a $p \neq -1$, illetve a $p = -1$ esetben a helyes következtetés (világosan megindokolt) levonásáért 3, illetve 2 pont jár. Ebből a 3+2 pontból pedig 1+1 pont jár az egyenletrendszerre vonatkozó következtetésért (egyértelműen megoldható, illetve végtelen sok megoldása van) és 2+1 pont a vektorok lineáris függetlenségére vonatkozó helyes következtetésért.

6*. Létezik-e olyan n egész szám, amelyre $n^4 + 1$ osztható 101-gyel?

* * * * *

Tegyük fel, hogy $101 \mid n^4 + 1$ valamely n egészre. Ekkor $n^4 \equiv -1 \pmod{101}$. (1 pont)
Ha $101 \mid n$ teljesülne, akkor $101 \mid n^4$, vagyis $n^4 \equiv 0 \pmod{101}$ következne, ami ellentmondás. Így $101 \nmid n$, amiből $(101, n) = 1$ (hiszen 101 prím). (2 pont)
Ezért alkalmazható az Euler-Fermat tétel n-re és 101-re: $n^{\varphi(101)} \equiv 1 \pmod{101}$. (2 pont)
Mivel 101 prím, ezért $\varphi(101) = 100$. Vagyis $n^{100} \equiv 1 \pmod{101}$. (1 pont)
Másrészt az $n^4 \equiv -1 \pmod{101}$ kongruenciát 25-ödik hatványra emelve: $n^{100} \equiv (-1)^{25} \pmod{101}$, vagyis $n^{100} \equiv -1 \pmod{101}$. (2 pont)
Ez az ellentmondás mutatja, hogy ilyen n egész nem létezhet (hiszen $1 \not\equiv -1 \pmod{101}$). (2 pont)

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

1. A $W \leq \mathbb{R}^4$ altér álljon azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból, amelyeknek a második koordinátája duplája az elsőnek, a harmadik koordinátája pedig háromszorosa az elsőnek. (Így például a jobbra látható vektor W-beli.) Határozzuk meg a W altér dimenzióját. (Azt nem szükséges bebizonyítani egy teljes értékű megoldáshoz, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 39 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A W egy tetszőleges $\underline{w} \in W$ elemére $\underline{w} = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \beta)^T$ valamely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárokra, (1 pont)
így $\underline{w} = \alpha \cdot (1,2,3,0)^T + \beta \cdot (0,0,0,1)^T$. (2 pont)
Ez mutatja, hogy $\underline{b}_1 = (1,2,3,0)^T$ és $\underline{b}_2 = (0,0,0,1)^T$ generátorrendszert alkotnak W-ben. (2 pont)
Mivel $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ nem skalárszorosai egymásnak, ezért lineárisan függetlenek is. (2 pont)
Így $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ bázist alkot W-ben, (1 pont)
ezért $\dim W = 2$. (2 pont)

2. Legyen A egy olyan 5×10-es mátrix, amelynek a sorai lineárisan összefüggők, $\underline{b} \in \mathbb{R}^5$ pedig egy oszlopvektor. Mutassuk meg, hogy ha az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor van olyan megoldása is, amelyben legföljebb 4 változó értéke 0-tól különböző.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Első megoldás. Jelölje A sorait $\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_5$. Mivel a sorok lineárisan összefüggők, ezért valamelyikük – legyen ez például $\underline{s}_5$, a sorok sorrendje ugyanis érdektelen – kifejezhető a többiből lineáris kombinációval: $\underline{s}_5 = \lambda_1 \underline{s}_1 + \ldots + \lambda_4 \underline{s}_4$. (1 pont)
Vonjuk most le az $(A|\underline{b})$ ötödik sorából az első λ_1-szeresét, stb., a negyedik λ_4-szeresét. Ekkor a fenti összefüggés szerint az $(A|b)$ ötödik sorában a vonaltól balra csupa nulla lesz. (2 pont)
Ha most az ötödik sorban a vonaltól jobbra nem nulla állna, akkor ez tilos sor volna, így az egyenletrendszer nem volna megoldható. A feladat szövege szerint tehát ez lehetetlen. (2 pont)
Így az ötödik sor csupa nulla sor, vagyis elhagyható. (1 pont)
Ha a megmaradt, 4 sorú kibővített együtthatómátrixra futtatjuk a Gauss-eliminációt, akkor (továbbra sem keletkezik tilos sor, hiszen a rendszer megoldható és) a redukált lépcsős alakban legföljebb 4 vezéregyes lehet, hiszen minden megmaradó sorban pontosan 1 lesz. (2 pont)
Így a redukált lépcsős alakból kiolvasható megoldáshalmazban legalább 6 szabad paraméter lesz. Ha ezeknek az értékét mind 0-nak választjuk, akkor valóban olyan megoldást kapunk, amelyben legföljebb 4 változó értéke 0-tól különböző. (2 pont)
A csupa nulla sor keletkezése mellett érvelhetünk a következőképpen is: A rangja (a sorrangra gondolva) legföljebb 4, mert a sorok lineárisan összefüggők; ha tehát a Gauss-eliminációval határozzuk meg A rangját, akkor a redukált lépcsős alakban legföljebb 4 vezéregyes lesz (így az $(A|b)$-re futtatott Gauss-eliminációban is ez történik). Ha egy megoldó minden további indoklás nélkül csak kijelenti, hogy a sorok lineáris összefüggőségéből következően keletkezik csupa 0 sor, az tehát a fenti pontozás szerinti első 6 pontot biztosan elveszíti.

Második megoldás. Jelölje A rangját r. Mivel a sorok lineárisan összefüggők, ezért $r \leq 4$ (a sorrangra gondolva). (1 pont)
Jelölje A oszlopait $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{10}$. Válasszunk ki ezek közül az oszloprang definíciója szerint r lineárisan függetlent; jelöje ezeket $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$ (ugyanis az oszlopok számozása érdektelen). (1 pont)
Ha most $r + 1 < i \leq 10$, akkor az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r, \underline{a}_i$ rendszer az oszloprang definíciója szerint lineárisan összefüggő. Így az újonnan érkező vektor lemmája miatt $\underline{a}_i \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle$. (1 pont)
Ebből következik, hogy $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle = \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{10} \rangle$. Valóban: mivel a tanultak szerint $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle$ altér, ezért az altér definíciója miatt az $\underline{a}_i$ $(i = 1, \ldots, 10)$ vektorokkal együtt azok minden lineáris kombinációja is $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle$-ben van, így $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{10} \rangle \subseteq \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle$; a fordított irányú tartalmazás pedig magától értetődő. (2 pont)
Mivel az $(A|b)$ lineáris egyenletrendszer megoldható, ezért a tanultak szerint $\underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{10} \rangle$.(1 pont)
Így $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle = \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{10} \rangle$ miatt $\underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle$ is igaz. (1 pont)
Ezért (ismét a tanultak szerint) megoldható az $(A'|b)$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer is, ahol A' azt a mátrixot jelöli, amelynek oszlopai $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$. (1 pont)
Az $(A'|b)$ egy tetszőleges megoldása pedig valóban az $(A|b)$ egy olyan megoldását adja, amelyben legföljebb $r \leq 4$ változó értéke 0-tól különböző. (2 pont)

3. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 9 & 3 \\ -2 & -10 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \\ 2 & 13 & 12 & -10 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A determinánst a Gauss-elimináció determinánsra vonatkozó változatával számítjuk ki:

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 9 & 3 \\ -2 & -10 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \\ 2 & 13 & 12 & -10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & -12 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = (-9) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-36) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = (-36) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-36) \cdot 3 = -108.$$

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Arányos részpontszám jár minden, a determináns kiszámításának irányába mutató, hasznos lépésért. A kifejtési tétel puszta alkalmazása (egyéb, további átalakítások nélkül) legföljebb 2 pontot érhet, mert egyedül ezzel a determináns meghatározása nem válik könnyebbé az eredeti feladatnál.

4. A 2×3-as A mátrixnak nincs negatív eleme. Tudjuk róla ezen kívül, hogy az $A \cdot A^T$ mátrix bal felső eleme 0, a jobb alsó eleme pedig 14; továbbá az $A^T \cdot A$ mátrix bal felső eleme 4, a jobb alsó eleme pedig 9. Határozzuk meg az A, az $A \cdot A^T$, valamint az $A^T \cdot A$ mátrixokat.

* * * * *

Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Ekkor az $A \cdot A^T$, illetve az $A^T \cdot A$ elemeire vonatkozó megadott információkból sorra a következő egyenletek következnek:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 0 \\ d^2 + e^2 + f^2 &= 14 \\ a^2 + d^2 &= 4 \\ c^2 + f^2 &= 9 \end{aligned} \qquad \text{(4 pont)}$$

Az első egyenletből $a = b = c = 0$ adódik. (1 pont)

Innen a harmadik, illetve a negyedik egyenletből (felhasználva az elemek nemnegativitását is) $d = 2$, illetve $f = 3$ következik. Végül ezekből és a második egyenletből (és ismét a nemnegativitásból) $e = 1$ adódik. (2 pont)

Így tehát $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. (1 pont)

Elvégezve a mátrixszorzásokat: $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$ és $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. (2 pont)

5. Létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak? Ha igen, akkor határozzuk meg A inverzét, valamint A inverzének a rangját.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -13 & 15 & -7 \\ 7 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A^{-1}-et a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & 15 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -8 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 13/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{(3 pont)}$$

A vonaltól balra egységmátrix keletkezett (és így $\det A \neq 0$), ezért A-nak létezik inverze (2 pont)
és az a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (1 pont)
$A \cdot A^{-1} = E$ miatt a determinánsok szorzástételéből $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$ következik, így $\det A^{-1} \neq 0$. (2 pont)
Ebből a determinánsrang definíciója szerint azonnal következik, hogy $r(A^{-1}) = 3$. (2 pont)
Az inverz létezését indokolhatjuk úgy is, hogy külön kiszámítjuk A determinánsát és mivel az nem 0 ($\det A = 1$), ezért a tanultak szerint A^{-1} létezik. A $\det A^{-1} \neq 0$ állítást pedig indokolhatjuk úgy is, hogy $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ miatt A^{-1}-nek is létezik inverze (mégpedig A), így a tanult tétel szerint a determinánsa nem 0; aki azonban ugyanerre a következtetésre csupán az $A \cdot A^{-1} = E$ összefüggésből jut (és további indoklást nem fűz ehhez), az az ezért járó 2 pontból csak 1-et kapjon meg. A^{-1} rangját természetesen máshogyan, például Gauss-eliminációval is számíthatjuk. Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. Az egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák (jelentkezzenek azok akár A^{-1}, $\det A$ vagy $r(A^{-1})$ számolása közben) darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ha egy megoldó A^{-1} számolása közben egyszerű számolási hibát vét, de a végén a számolását beszorzással ellenőrizve észreveszi, hogy hibázott, az ezért 1 pontot visszakaphat a számolási hibákért levont pontok közül még akkor is, ha a hibát kijavítani nem tudja.

6*. Legyenek U és V olyan 10 dimenziós alterek $\mathbb{R}^{20}$-ban, amelyeknek a nullvektoron kívül nincs közös eleme. Mutassuk meg, hogy minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^{20}$ vektorhoz találhatók olyan $\underline{u} \in U$ és $\underline{v} \in V$ vektorok, amelyekre $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$.

* * * * *

Legyen U egy bázisa $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{10}$ és V egy bázisa $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{10}$. (1 pont)
Állítjuk hogy a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{10}, \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{10}$ rendszer lineárisan független. Vegyük ugyanis egy $\underline{0}$-t adó lineáris kombinációjukat: $\beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_{10} \underline{b}_{10} + \gamma_1 \underline{c}_1 + \ldots + \gamma_{10} \underline{c}_{10} = \underline{0}$. (1 pont)
Átrendezés után: $\beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_{10} \underline{b}_{10} = -\gamma_1 \underline{c}_1 - \ldots - \gamma_{10} \underline{c}_{10}$; jelölje a két oldal közös értékét $\underline{w}$.(1 pont)
Mivel $\underline{w}$ kifejezhető a $\underline{b}_i$-kből és a $\underline{c}_i$-kből is lineáris kombinációval, ezért (az altér definíciója szerint) $\underline{w} \in U \cap W$. Így a feladat szövege szerint $\underline{w} = \underline{0}$. (1 pont)
Mivel tehát $\beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_{10} \underline{b}_{10} = \underline{0}$ és $\gamma_1 \underline{c}_1 + \ldots + \gamma_{10} \underline{c}_{10} = \underline{0}$ és a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{10}$ és a $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{10}$ rendszerek egyaránt lineárisan függetlenek (mert bázisok a megfelelő altérben), ezért ebből $\beta_1 = \ldots = \beta_{10} = 0$ és $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{10} = 0$ következik a tanultak szerint. Ezzel tehát valóban beláttuk a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{10}, \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{10}$ rendszer lineáris függetlenségét. (1 pont)
A tanultak szerint $\dim \mathbb{R}^{20} = 20$, így a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{10}, \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{10}$ rendszer egy dimenzió elemszámú, lineárisan független rendszer $\mathbb{R}^{20}$-ban. Ezért a tanultak szerint bázis. (2 pont)
Legyen most $\underline{x} \in \mathbb{R}^{20}$ tetszőleges. A fentiek szerint (a bázis generátorrendszer tulajdonsága miatt) $\underline{x}$ kifejezhető a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{10}, \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{10}$ vektorok lineáris kombinációjaként: $\underline{x} = \beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_{10} \underline{b}_{10} + \gamma_1 \underline{c}_1 + \ldots + \gamma_{10} \underline{c}_{10}$. (1 pont)
Legyen $\underline{u} = \beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_{10} \underline{b}_{10}$ és $\underline{v} = \gamma_1 \underline{c}_1 + \ldots + \gamma_{10} \underline{c}_{10}$. Ekkor tehát $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$ és (az altér definíciója miatt) $\underline{u} \in U$ és $\underline{v} \in V$ is teljesülnek, amivel a feladat állítását beláttuk. (2 pont)