Wiener Gábor

BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 1 FELADATGYŰJTEMÉNY

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

BME SZIT

Készült a

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

gondozásában.

Lektorálta: Fleiner Tamás

Tartalomjegyzék

Előszó **5**

Feladatok **7**

Térbeli koordinátageometria 7
Altér, függetlenség, generálás, bázis, dimenzió 10
Lineáris egyenletrendszerek 13
Mátrixműveletek, inverz mátrix, determináns, rang 15
Lineáris leképezések 22
Sajátérték, sajátvektor 25
Számelmélet 27

Segítségek **31**

Megoldások, eredmények **37**

Zárthelyi dolgozatok, 2014. ősz **91**

Zárthelyi javítókulcsok, 2014. ősz **95**

Előszó

A feladatgyűjtemény a BME VIK mérnök-informatikus szakának Bevezetés a Számításelméletbe 1 tárgyához készült, de hasznos lehet bárkinek, aki bevezető szinten foglalkozik lineáris algebrával, térbeli koordinátageometriával vagy számelmélettel. A gyűjtemény elsődleges célja a zárthelyire való felkészülés megkönnyítése, ennek megfelelően nem helyettesíti a gyakorlatok feladatsorait (amelyek másképp vannak felépítve és részben könnyebb feladatokat tartalmaznak) és különösen nem helyettesíti a gyakorlatokon való (aktív) részvételt. Nem közlünk definíciókat, tételeket, algoritmusokat; ezek megtalálhatók a tárgy honlapján lévő jegyzetben (Szeszlér Dávid: Bevezetés a számításelméletbe 1). Bár az anyagnak része, a feladatgyűjtemény nem tartalmaz számosságokkal kapcsolatos feladatokat, mivel ez a témakör a zárthelyik után szerepel.

A felkészülés során célszerű az egyes feladatokat önállóan megoldani, feladatonként szükség esetén körülbelül 15 percet eltöltve (ennyi áll rendelkezésre átlagosan egy feladatra a zárthelyin), majd az eredményt ellenőrizni. A feladatok többségére részletes megoldást adunk (sokszor kettőt, akár hármat is), ahol megoldást nem közlünk, ott többnyire megadjuk az eredményt (ha van). Természetesen a közölt megoldástól eltérő gondolatmenet is lehet helyes. Nem célszerű a feladat szövege után azonnal elolvasni a megoldást, még akkor sem, ha idő hiányában ez tűnik jó felkészülési stratégiának; a feladaton való gondolkodás még akkor is segít megérteni a megoldást, ha önállóan még részeredményt sem sikerül elérni. A gyűjteményben szereplő feladatokat nem érdemes típuspéldáknak tekinteni és arra számítani, hogy a tényleges zh-ban is ugyanilyenek fognak szerepelni, esetleg más számokkal (bár ez természetesen nem kizárt), ennél semmi sem áll távolabb a szerző szándékaitól.

Számos feladathoz szerepel egy mondatos segítség, ezt akkor érdemes igénybe venni, ha valakinek nincs elképzelése arról, hogy hogyan is kéne elindulnia. A segítségek és a megoldások megtalálását megkönnyítendő, a feladatok (és így persze a segítségek és megoldások is) nem fejezetenként, hanem folytonosan vannak számozva.

A feladatokat nehézségük szerint öt csoportba soroltuk. A legtöbb feladat a 2-es nehézségi fokozatba tartozik, ez az átlagos zh-példának felel meg, a többi szint jelentése: 0: zh-példának túl egyszerű; 1: könnyű zh-példa; 3: nehéz zh-példa; 4: zh-példának túl bonyolult. Számos olyan feladat van, melyet az 1-es és 2-es, illetve a 2-es és 3-as szint közöttinek éreztünk, de újabb kategóriák bevezetése fölöslegesnek tűnt. Minden feladat mellett megtalálható a nehézségi fokozata és az, hogy van-e hozzá segítség, illetve megoldás. S betűvel jeleztük, ha a feladathoz rendelkezésre áll segítség, M betűvel, ha megoldás, E betűvel pedig, ha részletes megoldást nem, de eredményt közlünk. Így például SM2 azt jelenti, hogy a feladat átlagos zh-példa nehézségű, van hozzá megadva segítség és megoldás is.

A feladatok, segítségek és megoldások után, két külön fejezetben közöljük a 2014. őszi zárthelyik és pótzárthelyik feladatait, illetve a pontozási útmutatókat (ezek a feladatok a gyűjteményben külön nem szerepelnek). Ennek célja az, hogy a hallgatók számára megkönnyítsük annak eldöntését, hogy mit is érdemes leírni egy megoldásban, illetve hogy az egyes gondolatmenetek a feladok megoldásának mekkora részét képezik.

E helyen szeretnék köszönetet mondani Szeszlér Dávid, Fleiner Tamás, Recski András és Simonyi Gábor tanszéki kollégáimnak, akiknek több feladata is szerepel a gyűjteményben.

Feladatok

Térbeli koordinátageometria

1. (M0) Adjuk meg annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely merőleges az $x+2y+5z=8$ egyenletű síkra és átmegy a $(2;2;3)$ ponton.

2. (M0) Határozzuk meg azon egyenes paraméteres egyenletrendszerét, amely párhuzamos az $(1;2;3)$ és $(2;3;9)$ pontokon átmenő egyenessel és átmegy a $(4;2;1)$ ponton.

3. (M0) Átmegy-e az origón az a sík, amely párhuzamos az $5x-4y+3z=9$ egyenletű síkkal és tartalmazza a $P(1;5;5)$ pontot?

4. (SM1) Határozzuk meg azon sík egyenletét, mely tartalmazza az $x=y+1=z+2$ egyenest és a $(2;3;5)$ pontot.

5. (M1) Egy síkra esnek-e a térben az $A(1;5;3)$, $B(7;11;-5)$, $C(10;14;-9)$ és $D(12;6;-15)$ pontok?

6. (M1) Határozzuk meg az $S_1: 5x-3y+z=16$ és az $S_2: 3x+2y-z=-9$ síkok metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

7. (M1) Legyen $A=(2;4;6)$, $B=(4;6;-2)$. Legyen S az AB szakasz felező merőleges síkja (vagyis az a sík, melynek pontjai ugyanolyan távol vannak A-tól és B-től). Határozzuk meg S (egy) egyenletét.

8. (E1) Írjuk fel a tér $P=(0;2;4)$ és $Q=(6;-2;2)$ pontjait összekötő szakasz felező merőleges síkjának egyenletét.

9. (M1) Az $A(2;5;1)$, $B(5;7;4)$, $C(6;4;2)$ és $D(9;7;5)$ pontokra adjuk meg az $ABCD$ tetraéder ABC lapjához tartozó magasságvonalának egyenletrendszerét. (Egy tetraéder egy lapjához tartozó magasságvonala alatt a lap síkjára merőleges és a lapra nem illeszkedő csúcson áthaladó egyenest értjük.)

10. (M1) Az f egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$x = 3t + 1,\ y = 4t - 2,\ z = 7t - 1.$$

Adjuk meg egy f-fel párhuzamos, origót tartalmazó sík egyenletét.

11. (M1) Adjuk meg az összes olyan c értéket, melyre az

$$x = t + 1,\ y = t + 2,\ z = ct + 3$$

paraméteres egyenletrendszerrel megadott egyenes döfi az $x + y + z = 3$ egyenletű síkot.

12. (E1) Legyen az e egyenes az $x + 2y + 3z = 4$ és a $2x + 3y + 4z = 5$ síkok metszésvonala. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az e egyenesre és átmegy a $(3;5;6)$ ponton.

13. (M1) Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(1;3;4)$ és a $Q(3;6;10)$ pontokon és párhuzamos az $\frac{x-9}{3} = y + 4 = \frac{z}{5}$ egyenletrendszerű egyenessel.

14. (SM2) Tekintsük az $x + 2y + 3z = 14$, a $2x + 6y + 10z = 24$ és a $4x + 2y + pz = 68$ egyenletekkel megadott síkokat a szokásos háromdimenziós térben, ahol p tetszőleges valós paraméter. Határozzuk meg (p minden lehetséges értékére) a tér összes olyan pontját, amely e három sík mindegyikén rajta van.

15. (M2) Adjuk meg az összes olyan c értéket, melyre az $x + 2y + z = 3$ és $cx + 4y + 2z = 4$ síkok metszők és a metszetegyenes párhuzamos a $3x + 6y + cz = 5$ síkkal.

16. (M2) Legyen $A = (2;1;4)$, $B = (1;1;6)$, $C = (3;0;1)$, $D = (0;1;1)$, $E = (7;1;3)$. Határozzuk meg az A, B és C, illetve C, D és E pontok által meghatározott síkok metszetegyenesének irányvektorát.

17. (M1) Az f egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$x = 4t + 1,\ y = 8t + 1,\ z = 16t + 1,$$

az S sík egyenlete $2y + z = p$, ahol p tetszőleges valós paraméter. Határozzuk meg az f egyenes és az S sík közös pontjainak számát a p paraméter minden lehetséges értékére.

18. **(M2)** Az f egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$x = t + 1,\ y = t + 2,\ z = -1.$$

Határozzuk meg annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, mely merőlegesen metszi f-et és átmegy az origón.

19. **(M2)** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(12;1;7)$ ponton és merőlegesen metszi az

$$x - 3 = \frac{y - 2}{3} = \frac{-z - 1}{4}$$

egyenletrendszerű egyenest.

20. **(SM2)** Legyen $A = (1;1;2)$, $B = (4;2;5)$, $C = (4;0;3)$, $D = (10;2;p)$. Adjuk meg a p paraméter összes olyan értékét, melyre az AB és CD egyenesek kitérők.

Altér, függetlenség, generálás, bázis, dimenzió

21. (SM2) Igaz-e, hogy azok az $(a;b;c)$ valós számhármasok, melyekre $ac = bc$ alteret alkotnak $\mathbb{R}^3$-ben?

22. (SE2) Igaz-e, hogy azok az $(a;b;c;d)$ valós számnégyesek, melyekre $a + 2c = 3b + 4d$ alteret alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben?

23. (M2) Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci típusúnak, ha a harmadiktól kezdve mindegyik koordinátája az előtte álló két koordináta összege. Így például a $(3;-1;2;1;3)$ vektor Fibonacci típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben?

24. (S2) Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a harmadiktól kezdve mindegyik koordináta az előtte álló két koordináta átlaga. Így például a $(-2;10;4;7;5,5;5)$ vektor W-beli. Határozzuk meg $\dim W$ értékét. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

25. (SM2) Határozzuk meg a p valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^4$ vektorok független rendszert alkotnak.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ p \\ p+1 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

26. (M2) A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy igaz-e a $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ állítás az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^4$ vektorokra.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \\ p \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

27. (SM2) Határozzuk meg a c valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{v} \in \mathbb{R}^4$ vektorok generátorrendszert alkotnak.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \\ c \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} c \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

28. (M2) A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy igaz-e az $\underline{e} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}, \underline{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ p+4 \end{pmatrix}$$

29. (M2) Határozzuk meg a c valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^4$ vektorok független rendszert alkotnak.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \\ 3 \end{pmatrix}$$

30. (SM2) Egészítsük ki $\mathbb{R}^3$ egy bázisává a $(3;5;2)$, $(5;2;3)$ vektorrendszert.

31. (M2) $\mathbb{R}^{10}$ két bázisának pontosan kilenc közös eleme van. Igaz-e, hogy a bázisok nem közös elemei biztosan számszorosai egymásnak?

32. (SM2) Megadható-e $\mathbb{R}^4$-ben két olyan bázis, melyeknek pontosan két közös eleme van és a nem közös négy vektor szintén bázist alkot?

33. (S2) A tér három síkjának pontosan egy közös pontja van. Mutassuk meg, hogy a normálvektoraik bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ben.

34. (S2) Tegyük fel, hogy az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok között pontosan egy olyan van, ami kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy ekkor ez a vektor csakis a nullvektor lehet.

35. (SM2) Legyen $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ bázis $\mathbb{R}^4$-ben, legyen továbbá $\underline{b} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3 + \underline{b}_4$. Mutassuk meg, hogy $\{\underline{b}_1 + \underline{b}, \underline{b}_2 + \underline{b}, \underline{b}_3 + \underline{b}, \underline{b}_4 + \underline{b}\}$ is bázis $\mathbb{R}^4$-ben.

36. (SE2) Legyen az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független $\mathbb{R}^n$-ben. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$ rendszer is biztosan lineárisan független?

37. (SE2) Az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4$ vektorok függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{u}_1 + 2\underline{u}_2, \underline{u}_2 + 2\underline{u}_3, \underline{u}_3 + 2\underline{u}_4, \underline{u}_4 + 2\underline{u}_1$ vektorok is mindig függetlenek?

38. (SM2) Az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4 \in \mathbb{R}^n$ vektorok összefüggők. Igaz-e, hogy ekkor a $2\underline{u}_1 + 3\underline{u}_2, 2\underline{u}_2 + 3\underline{u}_3, 2\underline{u}_3 + 3\underline{u}_4, 2\underline{u}_4 + 3\underline{u}_1$ vektorok is mindig összefüggők?

39. (S3) Az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_{15} \in \mathbb{R}^n$ vektorok közül pontosan az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4$ és $\underline{u}_5$ vektorok fejezhetők ki a többi vektor lineáris kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5$ rendszer nem független.

40. (M3) Legyenek $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d} \in \mathbb{R}^n$. Tudjuk, hogy $\underline{d} \in \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c} \rangle$ és $\underline{c} \notin \langle \underline{a},\underline{b},\underline{d} \rangle$. Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz;
(ii) az állítás biztosan hamis;
(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (n és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ választásától függően).

a) $\underline{c} \in \langle \underline{a},\underline{d} \rangle$ b) $\underline{d} \in \langle \underline{a},\underline{b} \rangle$ c) $\underline{b} \in \langle \underline{a},\underline{c},\underline{d} \rangle$

41. (M3) Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_{100}$ vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{R}^n$ egy V alterében. Tegyük fel továbbá, hogy minden $\underline{u} \in V$ esetén léteznek olyan $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{100}$ skalárok, melyekre a $\underline{v}_1+\alpha_1\underline{u},\underline{v}_2+\alpha_2\underline{u},\ldots,\underline{v}_{100}+\alpha_{100}\underline{u}$ vektorok lineárisan összefüggők. Határozzuk meg V dimenzióját.

42. (M3) Legyen $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_n\}$ és $C=\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\ldots,\underline{c}_n\}$ két bázis $\mathbb{R}^m$ egy V alterében. Bizonyítsuk be, hogy minden $\underline{b}_i \in B$ esetén található olyan $\underline{c}_j \in C$, hogy $B\setminus\{\underline{b}_i\}\cup\{\underline{c}_j\}$ és $C\setminus\{\underline{c}_j\}\cup\{\underline{b}_i\}$ egyaránt bázisok V-ben.

Lineáris egyenletrendszerek

43. **(E0)** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-eliminációval.
$2x+4y+3z=5$
$3x+5y+7z=9$
$2x+2y+8z=8$

44. **(E1)** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a t valós paraméter minden lehetséges értékére.
$x+2y+z=4$
$3x+2y+3z=8$
$x-2y+tz=10$

45. **(E1)** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden lehetséges értékére.
$2x+4y+6z=6$
$2x+5y+cz=6$
$3x+6y+10z=7$

46. **(E1)** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden lehetséges értékére.
$3x+6y+6z=9$
$2x+4y+cz=6$
$2x+3y+9z=8$

47. **(E1)** Határozzuk meg az alábbi három sík közös pontjainak számát a p paraméter minden lehetséges értékére.
$5x+6y+7z=3$
$2x+3y+pz=9$
$4x+4y+9z=8$

48. **(SM1)** Milyen s, illetve t értékek mellett lesz az alábbi egyenletrendszernek pontosan egy megoldása?
$x+y+2z=2$
$-3x+y-z=2$
$x-y+3tz=2s$

49. **(M1)** Milyen a és b értékek mellett lesz pontosan három megoldása az alábbi egyenletrendszernek?
$2x+3y+3z=8$
$4x+2y-2z=8$
$4x+2y-az=9$
$4x+2y-bz=10$

50. (E1) A t valós paraméter mely értékére lesz az alábbi egyenletrendszernek
a) pontosan egy megoldása?
b) pontosan két megoldása?
$-x+2y+4z=3$
$3x+y+2z=5$
$x-y+3tz=9$

51. (E1) A t valós paraméter mely értékére lesz az alábbi egyenletrendszernek
a) pontosan egy megoldása?
b) legalább egy megoldása?
$x+y+2z=4$
$2x+2y+3z=6$
$3x-y+tz=10$

52. (SM2) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden értékére.

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 3 \\ 2x+5y+3z+4w &= 8 \\ 3x+6y+cz+cw &= c+6 \end{aligned}$$

53. (SM2) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden értékére.

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 2 \\ 2x+y+cz+2w &= c \\ 4x+2y+cz+cw &= c \end{aligned}$$

54. (SM2) Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} &x_1+3x_2+5x_3+x_4-4x_5=3 \\ &2x_1+11x_2+12x_4-3x_5=11 \\ &4x_1+9x_2+26x_3-2x_4+p\cdot x_5=9 \\ &3x_1+13x_2+7x_3+11x_4+q\cdot x_5=13 \end{aligned}$$

55. (S3) Egy egyenletrendszer Gauss-eliminációval történő megoldása során nem keletkezik tilos sor és a keletkező redukált lépcsős alaknak van olyan oszlopa, ahol az elemek összege 0. Mutassuk meg, hogy létezik megoldása annak az egyenletrendszernek, melyet az eredetiből úgy kapunk, hogy minden egyenletben minden ismeretlen együtthatójához hozzáadunk egyet.

Mátrixműveletek, inverz mátrix, determináns, rang

56. (E0) Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & 10 & 9 & 15 \\ 4 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

57. (E0) Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

58. (M0) Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az $A^{-1}B^{-1}$ szorzatot.

59. (M0) Legyen egy paralelepipedon egyik csúcsa az origó, az ezzel szomszédos három csúcsa pedig $A(0;1;-2)$, $B(1;1;5)$, illetve $C(1;3;-1)$. Határozzuk meg a paralelepipedon térfogatát.

60. (M1) A 100×100-as A mátrix bal felső sarkában álló 50×50-es részmátrixnak minden eleme 6, a jobb felső sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme -4, a bal alsó sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme 9, végül a jobb alsó sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme -6. Határozzuk meg az A^{1000} mátrixot (vagyis annak az 1000 tényezős szorzatnak az eredményét, amelynek minden tényezője A).

61. (M1) A 4×4-es A és B mátrixok i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet jelölje $a_{i,j}$, illetve $b_{i,j}$ minden $1 \le i, j \le 4$ esetén. Tegyük fel, hogy

$$a_{i,j} = \begin{cases} i+j, & \text{ha } j = 1,2, \\ 9-i-j, & \text{ha } j = 3,4; \end{cases} \qquad b_{i,j} = \begin{cases} j, & \text{ha } i = 1,3, \\ 1-j, & \text{ha } i = 2,4, \end{cases}$$

minden $1 \le i, j \le 4$ esetén.

a) Határozzuk meg az $A \cdot B$ mátrixot.

b) Határozzuk meg a $B \cdot A$ mátrix determinánsát.

62. **(M1)** Döntsük el az alábbi állításokról, hogy teljesülnek-e tetszőleges A négyzetes mátrixra. (E-vel jelöltük az egységmátrixot, A^k pedig azt a k tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.)

a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$, akkor $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$.

b) Ha $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$.

63. **(SM2)** Létezik-e olyan 2×2-es valós A mátrix, melyre $A^{100} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$?

64. **(SM2)** Létezik-e olyan 2×2-es A mátrix, melynek minden eleme racionális és melyre $A^{100} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$?

65. **(M1)** Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk is ki az inverzet.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

66. **(E1)** Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

67. **(SM1)** Legyen A nem 0 determinánsú 9×9-es mátrix, A' pedig az a mátrix, amit A első sorának λ-val való szorzásával kapunk. Mennyi lehet λ értéke, ha tudjuk, hogy $\det(A') = \det(\lambda A)$?

68. **(S1)** Egy nem 0 determinánsú négyzetes mátrix minden elemét megszorozzuk c-vel. Mennyi lehet c értéke, ha a mátrix determinánsa változatlan marad?

69. **(SE2)** Egy legalább 3×3-as, négyzetes mátrix minden sora számtani sorozat. Mennyi lehet a determinánsa?

70. **(M2)** Adjuk meg az alábbi determináns definíció szerinti kiszámításakor keletkező összes nemnulla szorzatot és ezek előjelét.

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 8 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

71. (M2) Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a determináns definíciója szerint. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

72. (M2) A t paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e olyan $\underline{y}$ sorvektor, amelyre $\underline{y} \cdot A = \underline{c}$ teljesül, ahol az A mátrix és a $\underline{c}$ sorvektor az alábbiak. Ha létezik ilyen $\underline{y}$, adjuk meg az összeset.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 8 & 7 \\ 25 & 19 & 16 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 20 & 16 & t \end{pmatrix}.$$

73. (M2) Legyen A tetszőleges 6×8-as mátrix, melynek rangja 3. Igaz-e hogy mindig kiválasztható olyan 4×6-os részmátrixa, melynek rangja szintén 3?

74. (M2) Határozzuk meg az alábbi determináns értékét a c paraméter függvényében.

$$\begin{vmatrix} c & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2c \end{vmatrix}$$

75. (S2) Határozzuk meg, hogy a p paraméter mely értékeire lesz invertálható az alábbi mátrix. Ha létezik, adjuk is meg az inverzet.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & p \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

76. (SM2) Legyen A olyan 3 sorból és 5 oszlopból álló mátrix, amiben az utolsó három oszlop által alkotott B négyzetes részmátrix determinánsa nem nulla. Igaz-e, hogy ekkor mindig létezik olyan C mátrix, amivel A-t jobbról megszorozva egységmátrixot kapunk?

77. (SM2) Legyen A olyan $n \times n$-es mátrix, amire $\det A \neq 0$, B pedig tetszőleges $n \times n$-es mátrix. Igaz-e, hogy létezik olyan $n \times n$-es X mátrix, melyre $AX = B$?

78. (SM2) Adjuk meg az alábbi mátrix rangját a c valós érték függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & c \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

79. (SM2) Adjuk meg az alábbi mátrix rangját a p valós paraméter minden értékére.

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 12 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & -12 & 0 \\ 5 & 22 & 19 & p & p+3 \end{pmatrix}$$

80. (E2) Számítsuk ki a következő mátrix rangját x minden lehetséges valós értékére.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

81. (2) Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját a t valós paraméter minden lehetséges értékére.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & t \end{pmatrix}$$

82. (2) Számítsuk ki a következő mátrix rangját x minden lehetséges valós értékére.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & x \\ 1 & -5 & 1 & 3x \\ 8 & -6 & 25 & 2 \end{pmatrix}$$

83. (M2) Legyen A az alább látható mátrix. Adjuk meg az n egész paraméter azon értékeit, melyekre az A mátrix invertálható és $\det A^{-1}$ pozitív egész szám. Ezen n értékekre határozzuk is meg az A^{-1} mátrixot.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & n \end{pmatrix}$$

84. (M2) Legyen A egy 50×100-as mátrix. Tegyük fel, hogy bárhogyan is választjuk a $\underline{b} \in \mathbb{R}^{50}$ vektort, mindig található olyan $\underline{x} \in \mathbb{R}^{100}$ vektor, amelyre $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$. Határozzuk meg A rangját.

85. (M2) Egy 10×10 -es mátrix rangja három. Mutassuk meg, hogy legalább hét elemét meg kell változtatnunk ahhoz, hogy a kapott mátrix rangja tíz legyen.

86. (M2) Megválasztható-e a p paraméter értéke úgy, hogy az alábbi mátrix rangja 3 legyen? Ha igen, hogyan?

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 9 & 4 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & p & p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

87. (E2) Legyenek A, B és C olyan 3×3-as mátrixok, melyekre az ABC mátrixnak létezik inverze. Melyek teljesülnek mindig az alábbi állítások közül? (Indokoljunk is!)

a) $A+B+C$-nek is létezik inverze.

b) CAB-nek is létezik inverze.

c) Annak a 6×6-os mátrixnak is létezik inverze, melynek bal felső 3×3-as részmátrixa ABC, jobb alsó 3×3-as részmátrixa CAB, a többi elem (azaz a bal alsó és a jobb felső 3×3-as részmátrixok elemei) pedig csupa 0.

88. (M2) Legyen $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$ tetszőleges, nullvektortól különböző vektor, A és B pedig olyan $n\times n$–es mátrixok, melyekre teljesül, hogy $A\underline{x} = B\underline{x}$. Igaz-e, hogy ekkor biztosan teljesül, hogy $\det(A-B)=0$?

89. (M2) Legyen A 3×5-ös, B 5×3-as mátrix, melyekre teljesül, hogy AB a 3×3-as egységmátrix. Mutassuk meg, hogy A sorai függetlenek.

90. (SM2) Legyen A olyan 2×2-es mátrix, melyre $A^2=A$. Mennyi lehet A rangja?

91. (M2) Legyen $\sigma = (\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(100))$ az $1,2,\dots,100$ elemek egy permutációja. Definiáljuk σ'-t a következőképp:

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i+1), & \text{ha } 1\le i\le 99 \\ \sigma(1), & \text{ha } i=100. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy $I(\sigma)$ és $I(\sigma')$ ellenkező paritású.

92. (SM3) Az $n\times n$-es A mátrix első oszlopának minden eleme 1. A mátrix minden, nem az első sorban és nem az első oszlopban álló eleme a tőle balra és a felette található két elem összege. (Képlettel: $a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$ minden $2\le i,j\le n$ esetén.) Mutassuk meg, hogy $\det A = 1$.

93. (SE3) Legyen M az az $n \times n$-es mátrix, melynek főátlójában minden elem 0, főátlóján kívül pedig minden elem 1. Határozuk meg M determinánsát.

94. (SM3) Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es A, B és C mátrixokra az $AX = B$ egyenlet megoldható, de az $AX = C$ egyenlet nem. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $n \times n$-es D mátrix, amelyre a $BX = D$ egyenlet nem megoldható. (Az $AX = B$ egyenlet megoldhatóságán azt értjük, hogy létezik olyan $n \times n$-es X mátrix, amelyre $AX = B$ fennáll.)

95. (M3) Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások minden olyan $n \times n$-es A mátrixra, amelynek van inverze.

a) Ha A első oszlopának minden eleme azonos, akkor A^{-1}-ben az elsőt kivéve minden sorban az elemek összege 0.

b) Ha A-ban az elsőt kivéve minden sorban az elemek összege 0, akkor A^{-1} első oszlopának minden eleme azonos.

96. (SM2) Igaz-e, hogy tetszőleges A és B $n \times n$-es mátrixokra AB és BA rangja azonos?

97. (SM2) Léteznek-e olyan 2×2-es A és B mátrixok, melyekre $A^2 = B^2$, de $A \neq B$ és $A \neq -B$?

98. (SM2) Léteznek-e olyan 2×2-es A, B és C mátrixok, melyekre $A^2 = B^2 = C^2$, és az A, B, C, $-A$, $-B$, $-C$ mátrixok mind különbözők?

99. (S3) Legyenek A és B olyan négyzetes mátrixok, melyekre $A^2 = B^2$, $AB = BA$ és $A + B$ determinánsa nem 0. Igaz-e, hogy ilyenkor $A = B$?

100. (S2) Egy 10×10-es mátrix első hat sorában az első öt elem (összesen tehát 30 elem) 0. Megadható-e a többi elem úgy, hogy a mátrix rangja 10 legyen?

101. (SM3) Egy 5×5-ös mátrixban 6 egyes és 19 nulla szerepel. Mutassuk meg, hogy a determinánsa 0, 1 vagy -1.

102. (S3) Egy 5×5-ös mátrixban 7 egyes és 18 nulla szerepel. Mutassuk meg, hogy a determinánsa 0, 1 vagy -1.

103. (3) Adjunk példát olyan 5×5-ös mátrixra, melyben 8 egyes és 17 nulla szerepel, a determinánsa pedig 2.

104. (SM2) Egy 5×5–ös mátrixban háromszor szerepel a 0, négyszer az 1 és tizennyolcszor a 2. Mutassuk meg, hogy a mátrix determinánsa nem 1.

105. (S2) Egy 5×5-ös mátrixban egyszer szerepel a 0, minden más elem 1 vagy -1. Mutassuk meg, hogy a mátrix determinánsa nem 1 és nem -1.

106. (S2) Létezik-e olyan nem nulla determinánsú 5×5–ös mátrix, melyben 3 nulla és 22 egyes szerepel?

107. (SM2) Létezik-e olyan 5×5-ös mátrix, melynek egyetlen eleme sem 0 és minden előjeles aldeterminánsa 0?

108. (SM3) Létezik-e olyan 5×5-ös mátrix, melynek egyetlen eleme sem 0 és pontosan egy olyan előjeles aldeterminánsa van, mely nem 0?

109. (SM3) Egy 5×5-ös mátrix determinánsának definíció szerinti kiszámításakor 30 nullától különböző szorzatot kapunk. Igaz-e, hogy ekkor a mátrix legfeljebb 15 nullát tartalmaz?

110. (SM3) Egy $n \times n$-es mátrix determinánsa nem 0. Igaz-e, hogy van olyan eleme, melyet alkalmasan megváltoztatva a kapott mátrix determinánsa 0 lesz?

111. (SM3) Egy 6×6-os mátrix rangja 4. Elérhető-e két alkalmas elem megváltoztatásával, hogy a rangja 2 legyen?

112. (SM4) Egy $n \times n$-es $(n \geq 2)$ A mátrixnak minden előjeles aldeterminánsa ugyanannyi. Mutassuk meg, hogy $\det A = 0$.

113. (SM3) Egy $n \times n$-es $(n \geq 2)$ A mátrixra teljesül, hogy bármely elemét 0-ra kicserélve a determinánsa nem változik. Mutassuk meg, hogy $\det A = 0$.

114. (S4) Egy $n \times n$-es $(n \geq 2)$ A mátrixra teljesül, hogy bármely két elemét kicserélve a determinánsa nem változik. Mutassuk meg, hogy $\det A = 0$.

Lineáris leképezések

115. (SM2) Mutassuk meg, hogy a síkon lineáris transzformáció az a leképezés, mely minden (x,y) vektorhoz a $(10x+y, 10x+y)$ vektort rendeli.

116. (M2) Határozzuk meg az előző feladat lineáris transzformációjának képterét és magterét.

117. (SM3) Igaz-e, hogy tetszőleges, origón átmenő e egyenes esetén létezik a síknak olyan lineáris transzformációja, melynek magtere éppen e?

118. (S3) Igaz-e, hogy tetszőleges, origón átmenő e egyenes esetén létezik a síknak olyan lineáris transzformációja, melynek képtere éppen e?

119. (M2) Létezik-e a síknak olyan lineáris transzformációja, mely az origóhoz az origót rendeli, minden más vektorhoz pedig az $(1;1),(2;2),(3;3)$ vektorok valamelyikét?

120. (E1) Tudjuk, hogy az origó körüli 135 fokos forgatás a sík egy lineáris transzformációja. Adjuk meg a mátrixát.

121. (SM2) Határozzuk meg a síkon az x tengelyre való tükrözés, mint lineáris transzformáció mátrixát az $\{(1;2),\ (1;0)\}$ bázisban.

122. (SE2) Adjuk meg az origó körüli 90 fokos forgatás, mint a sík egy lineáris transzformációja mátrixát az $(1;0)$ és $(1;2)$ vektorokból álló bázisban.

123. (SM2) Legyen $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan A mátrix, melyre $A^{100} = M$.
b) Mutassuk meg, hogy létezik olyan A mátrix, melyre $A^{101} = M$.

124. (SM3) Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan A mátrix létezik, melyre

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

125. (SM3) Mutassuk meg, hogy legalább 101 olyan A mátrix létezik, melyre

$$A^{101} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

126. **(SM3)** Mutassuk meg, hogy legalább 100 olyan A mátrix létezik, melyre

$$A^{100} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

127. **(SM4)** Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan A mátrix létezik, melyre

$$A^{101} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

128. **(SM2)** Van-e olyan lineáris transzformációja $\mathbb{R}^3$-nek, aminek a képtere és a magtere azonos?

129. **(S3)** Van-e olyan lineáris transzformációja $\mathbb{R}^4$-nek, aminek a képtere és a magtere azonos?

130. **(S2)** Legyen $\mathscr{A}$ $\mathbb{R}^3$ olyan lineáris transzformációja, melynek a képtere két dimenziós. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $v \in \mathbb{R}^3$ vektor, ami sem a magtérnek, sem a képtérnek nem eleme.

131. **(SM2)** A sík egy lineáris transzformációjáról tudjuk, hogy az $(5;3)$ vektor képe a $(2;3)$ vektor, a $(4;3)$ vektor képe pedig a $(3;2)$ vektor. Mi lesz a $(11;6)$ vektor képe?

132. **(SM2)** A sík egy lineáris transzformációjáról tudjuk, hogy az $(5;3)$ vektor képe a $(3;2)$ vektor, a $(4;3)$ vektor képe pedig a $(2;1)$ vektor. Adjuk meg a transzformáció mátrixát.

133. **(E2)** Legyen $\mathscr{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció. Az $(1;1)$ vektor $\mathscr{B}$ szerinti képe a $(4;3)$ vektor, az $(1;0)$ képe pedig a $(-1;2)$ vektor. Adjuk meg $\mathscr{B}$ mátrixát.

134. **(M2)** Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis a síkon, $\mathscr{A}$ pedig a sík lineáris transzformációja. Tegyük fel, hogy $\mathscr{A}$ mátrixa a B bázis szerint az alábbi A mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $\mathscr{A}(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$.

$$A = \begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

135. **(S2)** Az $\mathscr{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés az $(1;2)$ vektorhoz a $(0;3;-3)$ vektort, a $(2;1)$-hez a $(3;3;0)$-t rendeli. Igaz-e az $(1;2;3) \in \operatorname{Im}\mathscr{A}$ állítás?

136. (M2) Legyen az $\mathscr{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa az alább látható mátrix. Határozzuk meg $\mathrm{Im}(\mathscr{A})$-t és $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})$-t.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

137. (M3) Legyen az $\mathscr{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa az alább látható mátrix. Határozzuk meg a c valós paraméter minden értékére az $\mathrm{Im}(\mathscr{A})$ és $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})$ altereket.

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

138. (S3) Legyenek A és B olyan $n\times n$-es mátrixok, melyekre AB a nullmátrix. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leq n$.

139. (S2) Legyen $\mathscr{A}$ az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges lineáris transzformációja. Tudjuk, hogy az $\mathscr{A}(v_1),\ldots,\mathscr{A}(v_k)$ vektorok bázist alkotnak $\mathrm{Im}(\mathscr{A})$-ban. Igaz-e, hogy a $v_1,\ldots,v_k$ vektorok lineárisan függetlenek?

140. (M3) Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektort konstansnak, ha minden eleme azonos. Legyen $\mathscr{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és legyen $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_n\}$, illetve $C=\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\ldots,\underline{c}_n\}$ két bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1+\underline{b}_2+\ldots+\underline{b}_n$ és $\underline{c}_1+\underline{c}_2+\ldots+\underline{c}_n$ egyaránt konstans vektorok és az $[\mathscr{A}]_B$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. Mutassuk meg, hogy ekkor az $[\mathscr{A}]_C$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor.

Sajátérték, sajátvektor

141. (M1) Határozzuk meg az alábbi mátrix minden sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez adjunk meg egy sajátvektort.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

142. (E1) Adjuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és minden sajátértékhez egy-egy sajátvektort is.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

143. (S1) Bizonyítsuk be, hogy egy vektor akkor és csak akkor sajátvektora az A invertálható mátrixnak, ha sajátvektora A^{-1}-nek.

144. (SM2) Legyen $\mathscr{A}$ a következő lineáris transzformáció a síkon: kétszeres nagyítás az origóból, majd tükrözés az $x+y=0$ egyenesre. Határozzuk meg $\mathscr{A}$ mátrixát, ennek sajátértékeit, sajátvektorait és a karakterisztikus polinomot.

145. (SM2) Legyen $\mathscr{A}$ a vetítés a síkon az $x+y=0$ egyenesre. Tudjuk, hogy $\mathscr{A}$ lineáris transzformáció; határozzuk meg a mátrixát, ennek sajátértékeit, sajátvektorait és a karakterisztikus polinomot.

146. (SM3) Legyen $\mathscr{A}$ a vetítés a síkon az $x+7y=0$ egyenesre. Tudjuk, hogy $\mathscr{A}$ lineáris transzformáció; határozzuk meg a mátrixát, ennek sajátértékeit, sajátvektorait és a karakterisztikus polinomot.

147. (SE2) Legyen $\mathscr{A}$ a következő lineáris transzformáció $\mathbb{R}^3$-ben: kétszeres nagyítás az origóból, majd forgatás +90 fokkal a z tengely körül. Határozzuk meg $\mathscr{A}$ mátrixát, ennek sajátértékeit, sajátvektorait és a karakterisztikus polinomot.

148. (M2) A sík egy lineáris transzformációja az $(1;0)$ vektorhoz a $(4;2)$ vektort rendeli, a $(0;2)$ vektorhoz pedig a $(3;4)$ vektort. Határozzuk meg a transzformáció mátrixát, ennek sajátértékeit és sajátvektorait.

149. (M2) A sík egy lineáris transzformációja az $(1;1)$ vektorhoz a $(-1;7)$ vektort rendeli, a $(2;1)$ vektorhoz pedig az $(1;8)$ vektort. Határozzuk meg a transzformáció mátrixát, ennek sajátértékeit, sajátvektorait és a karakterisztikus polinomot.

150. (M2) Az 5×5-ös A mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.)

a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 7$ sajátértéke A-nak.

b) Adjuk meg A egy sajátvektorát.

151. (M2) Az alábbi A mátrixról tudjuk, hogy $\lambda = 3$ sajátértéke A-nak.
a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét.
b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátvektorát.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & p \\ 5 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

152. (SE2) A sík egy lineáris transzformációja a $(3;2)$ vektorhoz a $(0;15)$ vektort rendeli, az $(5;3)$ vektorhoz pedig az $(1;23)$ vektort. Döntsük el, hogy 9 a transzformáció mátrixának sajátértéke-e.

153. (SM2) Legyen A tetszőleges négyzetes mátrix. Igaz-e, hogy
a) A^3 minden sajátvektora sajátvektora lesz A-nak is?
b) A minden sajátvektora sajátvektora lesz A^3-nek is?

154. (S2) Legyen A olyan négyzetes mátrix, melyre $A^2 = A$. Mutassuk meg, hogy A-nak csak a 0 és az 1 lehetnek a sajátértékei.

155. (S3) Legyen A olyan, a nullmátrixtól és az egységmátrixtól különböző négyzetes mátrix, melyre $A^2 = A$. Mutassuk meg, hogy A-nak pontosan a 0 és az 1 a sajátértékei.

156. (SM2) Legyenek az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok ugyananannak az A mátrixnak különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Mutassuk meg, hogy $\underline{u}+\underline{v}$ nem sajátvektora A-nak.

157. (S2) Az A 2×2-es mátrixnak $\underline{u}$ sajátvektora, a $\underline{v}$ vektor pedig nem sajátvektora és nem is a nullvektor. Lehetséges-e, hogy $\underline{u}+\underline{v}$ is sajátvektora A-nak?

Számelmélet

158. **(M1)** Mutassuk meg, hogy két négyzetszám legnagyobb közös osztója is négyzetszám.

159. **(M2)** Legyen n tetszőleges egész szám. Határozzuk meg a $3n^2-2n+1$ és n^2-n számok legnagyobb közös osztóját.

160. **(M2)** Legyen n tetszőleges páratlan szám. Határozzuk meg az n^2-n+2 és n^3+n^2 számok legnagyobb közös osztóját.

161. **(M2)** Határozzuk meg minden pozitív egész n-re az n^3+3n^2+2n és $n-1$ számok legnagyobb közös osztóját.

162. **(M2)** Határozzuk meg minden pozitív egész n-re az n^2+n és $3n+2$ számok legnagyobb közös osztóját.

163. **(M2)** Határozzuk meg az $n^5-n^4-n^2$ és n^3-n^2+1 számok legnagyobb közös osztóját minden n egész számra.

164. **(M2)** Mutassuk meg, hogy tetszőleges n egészre $3n^2-5n-1$ és n^2-2n relatív prímek.

165. **(2)** Mutassuk meg, hogy tetszőleges n egészre $6n^2-n+2$ és $2n^2+1$ legnagyobb közös osztója legfeljebb 3.

166. **(M2)** Legyenek a és b tetszőleges pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy a és b legkisebb közös többszöröse nem lehet $3a+5b$.

167. **(2)** Legyenek a és b különböző pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy a és b legnagyobb közös osztója nem lehet $\frac{a+2b}{3}$.

168. **(M2)** Legyen p tetszőleges prímszám. Mutassuk meg, hogy ha $n^2 \equiv 1 \pmod{p}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{p}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{p}$.

169. **(2)** Legyen p páratlan prímszám. Mutassuk meg, hogy ha $n^2 \equiv 1 \pmod{p^2}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{p^2}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{p^2}$.

170. **(M2)** Egy szám 464-szerese 8 maradékot ad 50-nel osztva. Milyen maradékot ad maga a szám 50-nel osztva?

171. **(M2)** Oldjuk meg a $93x \equiv 9 \pmod{129}$ lineáris kongruenciát.

172. (M2) Egy szám 36-szorosa 68 maradékot ad 82-vel osztva. Milyen maradékot ad maga a szám 82-vel osztva?

173. (M2) Milyen maradékot adhat egy egész szám 153-mal osztva, ha a 31-szerese 10 maradékot ad 153-mal osztva?

174. (M2) Oldjuk meg a $34x \equiv 6 \pmod{98}$ lineáris kongruenciát.

175. (M2) Oldjuk meg az $53x \equiv 3 \pmod{89}$ lineáris kongruenciát.

176. (M2) Egy n egész szám 45-szöröse 21 maradékot ad 78-cal osztva. Milyen maradékokat adhat n 130-cal osztva?

177. (M2) Egy n egész szám 14-szerese 3 maradékot ad 51-gyel osztva. Milyen maradékokat adhat n 34-gyel osztva?

178. (M2) Oldjuk meg a $113x \equiv 2 \pmod{531}$ lineáris kongruenciát.

179. (M2) Hány olyan 2015-nél kisebb pozitív egész szám van, amely 19-cel osztva 10 maradékot ad, 37-tel osztva pedig 15 maradékot ad?

180. (M2) Hány olyan n egész szám van 1 és 1000 között, amelyhez található olyan m egész szám, hogy a $37n + 218m = 10$ egyenlet fennálljon?

181. (M2) Határozzuk meg az összes olyan n számot, melyre $\varphi(n) = 2$.

182. (M2) Adjuk meg az összes olyan n számot, melyre $\varphi(n) = 17$.

183. (M2) Határozzuk meg az összes olyan n számot, melyre $\varphi(n)$ prím.

184. (M3) Adjuk meg az összes olyan n számot, melyre $\varphi(n) = 4$.

185. (SE3) Határozzuk meg az összes olyan n számot, melyre $\varphi(n) = 10$.

186. (M2) Mutassuk meg, hogy minden m, n pozitív egészre

$$\varphi(m)\varphi(n) \leq \varphi(mn).$$

187. (S4) Mutassuk meg a φ függvény definíciója alapján (tehát φ képleteinek használata nélkül), hogy minden m, n pozitív egészre

$$\varphi(m)\varphi(n) \leq \varphi(mn).$$

188. (SM3) Adjuk meg az összes olyan pozitív egész n-et, melyre

$$\varphi(n) = \frac{n}{2} + 1.$$

189. (SM2) Mutassuk meg, hogy minden n pozitív egészre teljesül az alábbi egyenlőtlenség.

$$\varphi(n) + \mathrm{d}(n) \leq n + 1$$

(Ahol $\mathrm{d}(n)$ az n szám pozitív osztóinak száma.)

190. (SM3) Mely $n \geq 2$ egészekre teljesül, hogy

$$\varphi(n) + \mathrm{d}(n) = n + 1?$$

(Ahol $\mathrm{d}(n)$ az n szám pozitív osztóinak száma.)

191. (SM3) Mely $n \geq 2$ egészekre teljesül, hogy

$$\varphi(n) + \frac{\mathrm{d}(n)}{2} = n?$$

(Ahol $\mathrm{d}(n)$ az n szám pozitív osztóinak száma.)

192. (SM3) Egy számnak pontosan 100 pozitív osztója van. Mutassuk meg, hogy ezek közül legalább 95 összetett szám.

193. (SM3) Határozzuk meg az összes olyan n számot, melyre

$$\varphi(n) = n - 3.$$

194. (SM4) Határozzuk meg az összes olyan n számot, melyre

$$\varphi(n) = n - 4.$$

195. (M2) Határozzuk meg $107^{123^{145}}$ utolsó két számjegyét (a tízes számrendszerben).

196. (M2) Határozzuk meg $23^{25^{24}}$ utolsó három számjegyét a hatos számrendszerben.

197. (M2) Határozzuk meg 43^{98} kettes számrendszerbeli alakjának utolsó öt számjegyét.

198. (M2) Határozzuk meg $46^{47^{48}}$ 25-tel vett osztási maradékát.

199. (M2) Tudjuk, hogy egy n egész szám kettes számrendszerbeli alakja 11010010110110001101 1. Határozzuk meg n^n kettes számrendszerbeli alakjának utolsó négy jegyét.

200. (M2) Az n szám négyes számrendszerbeli alakja 331102102023. Határozzuk meg n^{3n+1} négyes számrendszerbeli alakjának utolsó három számjegyét.

201. (M2) Az n szám hármas számrendszerbeli alakja 200102100202. Határozzuk meg n^n hármas számrendszerbeli alakjának utolsó három számjegyét.

202. (E2) Határozzuk meg $78^{79^{80}}$ ötös számrendszerben felírt alakjának utolsó három számjegyét.

203. (SM3) Határozzuk meg 125^{125} utolsó két számjegyét a hetes számrendszerben.

204. (M2) Mennyi maradékot ad 22-vel osztva $3^{22}+33^{22}+333^{22}$?

205. (M2) Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, melyre n^7-n osztható 9-cel.

206. (SM3) Milyen maradékot ad 5^{73}-nal osztva $16^{5^{73}}$?

207. (SM3) Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan n szám van, melyre $52 \mid 5^n-21$.

208. (S2) Legyen n tetszőleges pozitív egész. Mutassuk meg, hogy

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod n$$

akkor és csak akkor teljesül *minden* $a<n$ pozitív egészre, ha n prím.

209. (M3) Legyen $p>2$ olyan prímszám, amelyre $2p+1$ is prím. Bizonyítsuk be, hogy ekkor fennáll az alábbi kongruencia:

$$(p-1)^{(p-2)^{p-1}} \equiv p-1 \qquad (\mathrm{mod}\ 2p+1)$$

210. (M4) Legyen p tetszőleges prímszám, a pedig olyan egész szám, ami nem osztható p-vel és pontosan p^2 darab pozitív osztója van. Mutassuk meg, hogy ekkor a 1 maradékot ad p-vel osztva.

Segítségek

4. Keressünk az egyenesen két pontot.

14. Oldjuk meg a három egyenletből álló egyenletrendszert.

20. Két egyenes akkor kitérő, ha se nem párhuzamosak, se nem metszők.

21. A definíció alapján a zártságot érdemes vizsgálni, szem előtt tartva, hogy $ac = bc \Leftrightarrow (a = b \vee c = 0)$.

22. Természetesen itt is a zártságot érdemes vizsgálni.

24. Mutassuk meg, hogy W (egyetlen) $(1;0;\ldots)$ kezdetű, illetve (egyetlen) $(0;1;\ldots)$ kezdetű eleme generátorrendszert alkot.

25. A vektorok akkor és csak akkor alkotnak független rendszert, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort; ezt Gauss-eliminációval célszerű vizsgálni.

27. Ha nincs kedvünk azt megnézni, hogy egy tetszőleges (d,e,f,g) vektor mikor áll elő az adott vektorok lineáris kombinációjaként, akkor a vektorok függetlenségét is vizsgálhatjuk (miért?); mindkét esetben a Gauss-eliminációt érdemes használni.

30. Olyan vektort keressünk, melyet a rendszerhez véve az független marad.

32. Semmi akadálya.

33. A síkok egyenleteiből álló rendszernek egyértelmű megoldása van.

34. Indirekt.

35. Elég megmutatni, hogy a kérdéses vektorhalmaz generátorrendszer (miért?).

36. Írjuk fel a nullvektort az $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ vektorok lineáris kombinációjaként és rendezzük át az egyenlőséget.

37. Írjuk fel a nullvektort az $\underline{u}_1+2\underline{u}_2, \underline{u}_2+2\underline{u}_3, \underline{u}_3+2\underline{u}_4, \underline{u}_4+2\underline{u}_1$ vektorok lineáris kombinációjaként és rendezzük át az egyenlőséget.

38. Hány dimenziós az $\langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4 \rangle$ altér?

39. Írjuk fel a nullvektort a 15 vektor egy nem triviális lineáris kombinációjaként (miért lehet?) és vizsgáljuk meg az együtthatókat.

48. Nem muszáj megoldani az egyenletrendszert, csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy mikor van egyértelmű megoldás.

52. Természetesen Gauss-eliminációval érdemes dolgozni és nem árt figyelni rá, hogy ismeretlenekkel csak úgy nem osztunk.

53. Természetesen Gauss-eliminációval érdemes dolgozni és nem árt figyelni rá, hogy ismeretlenekkel csak úgy nem osztunk.

55. Az eredeti egyenletrendszer megoldása után próbáljuk megoldani azt az egyenletet, amiben az ismeretlenek összege 0.

63. Vizsgáljuk meg a determinánst.

64. Itt is vizsgáljuk meg a determinánst.

67. Mi történik a determinánssal, ha egy sort megszorzunk λ-val?

68. Tudjuk, hogy mi történik a determinánssal, ha egy sort megszorzunk c-vel.

69. Egy oszlopból egy másikat levonva a determináns nem változik.

75. Gauss-elimináció, az első és a harmadik sor cseréjét követően.

76. B-nek van inverze.

77. A-nak van inverze.

78. Gauss-elimináció.

79. Használjunk Gauss-eliminációt, a rang a vezéregyesek száma lesz.

88. $(A-B)\underline{x} = \underline{0}$.

90. 0 és 2 nyilván lehet a rang, az 1-re sem nehéz példát mutatni.

92. Alulról fölfelé haladva az A minden sorából (az elsőt kivéve) vonjuk ki a fölötte állót.

93. Kezdésnek adjuk hozzá az első sorhoz a többit.

94. A $D := C$ választás jó lesz, de kihasználhatjuk azt is, hogy $\det A = 0$ (ez miért igaz?).

96. Nem igaz, keressünk 2×2-es ellenpéldát.

97. Igen, keressünk például olyan mátrixot, aminek a négyzete a nullmátrix (vagy az egységmátrix).

98. Használjuk az előző feladat nullmátrixtól (vagy egységmátrixtól) különböző megoldásait.

99. Ha $AB = BA$, akkor $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

100. Vizsgáljuk meg a mátrix determinánsát a definíció szerint vagy nézzük meg, hogy az első öt oszlop hogy viselkedik.

101. Használjuk a definíciót és vizsgáljuk a nemnulla szorzatokat.

102. Használjuk a definíciót és vizsgáljuk a nemnulla szorzatokat.

104. Használjuk a definíciót és vizsgáljuk a szorzatok paritását.

105. Használjuk a definíciót és vizsgáljuk a szorzatok paritását.

106. Mutassuk meg, hogy a mátrixnak van két azonos oszlopa.

107. Igen.

108. Ha lenne ilyen, akkor találnánk benne két olyan sort, melyek szerint kifejtve a mátrix determinánsát, különböző eredményeket kapnánk.

109. Használjuk a definíciót és bizonyítsunk indirekten.

110. Kifejtési tétel.

111. Nem feltétlen; keressünk öt olyan oszlopvektort, melyek összefüggők, de bármely négy közülük független.

112. Használjuk a kifejtési tételt és nézzük meg a sorösszegeket.

113. Kifejtési tétel.

114. A 112. feladat valamennyit segít.

115. Keressünk olyan mátrixot, amivel balról szorozva az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oszlopvektort, a $\begin{pmatrix} 10x+y \\ 10x+y \end{pmatrix}$ oszlopvektort kapjuk vagy igazoljuk, hogy teljesül a lineáris leképezéseket karakterizáló két feltétel.

116. Használjuk a definíciókat.

117. Nézzük meg, hogy mi a magtér a 115. feladatban.

118. Vetítés (merőlegesen) e-re.

121. Határozzuk meg a megadott bázis vektorainak képeit, majd írjuk fel a kapott vektorok koordinátáit a megadott bázisban vagy használjuk a bázistranszformációt a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixszal.

122. Határozzuk meg a megadott bázis vektorainak képeit, majd írjuk fel a kapott vektorok koordinátáit a megadott bázisban vagy használjuk a bázistranszformációt a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix-szal.

123. Az a)-hoz nézzük meg a determinánst, a b)-hez pedig (mondjuk) azt, hogy A a sík melyik transzformációjának a mátrixa.

124. Elég végtelen sok olyan B mátrixot találni, melyre $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

125. Forgatás.

126. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a 180 fokos forgatás mátrixa.

127. Forgatás + bázistranszformáció.

128. Dimenziótétel.

129. Határozzuk meg a képtér és a magtér dimenzióját, majd adjuk meg a szokásos bázisvektorok képeit.

130. A képtér egy sík, a magtér egy egyenes (miért?).

131. Állítsuk elő a $(11;6)$ vektort az $(5;3)$ és a $(4;3)$ vektorok lineáris kombinációjaként.

132. Számítsuk ki az $(1;0)$ és a $(0;1)$ vektorok képét.

135. Lássuk be, hogy $\mathrm{Im}\,\mathscr{A} = \langle(0;3;-3),(3;3;0)\rangle$, majd döntsük el, hogy az $(1;2;3)$ vektor ebben a generált altérben van-e.

138. Vizsgáljuk azokat a leképezéseket, melyeknek A, B, illetve AB a mátrixa és ezek képterét, illetve magterét.

139. Igen, bizonyítsunk indirekten.

143. Használjuk a sajátvektor definícióját.

144. Határozzuk meg az $(1,0)$ és $(0,1)$ vektorok képét, majd ebből írjuk fel a mátrixot.

145. Itt is határozzuk meg az $(1,0)$ és $(0,1)$ vektorok képét, majd ebből írjuk fel a mátrixot.

146. Itt is határozzuk meg az $(1,0)$ és $(0,1)$ vektorok képét, majd ebből írjuk fel a mátrixot.

147. Határozzuk meg a szokásos bázis vektorainak képeit; a z tengely körüli forgatásnak nincs hatása a z koordinátára, az x és y koordinátákra pedig úgy hat, mint a síkon az origó körüli forgatás.

152. A 149. feladathoz hasonlóan határozzuk meg a transzformáció mátrixát, majd ellenőrizzük, hogy a 9 ennek sajátértéke-e (ehhez nem feltétlen szükséges a sajátértékek meghatározása).

153. Az a) feladathoz keressünk (mondjuk) olyan mátrixot, aminek nincs sajátvektora, de a köbének van. A b)-hez egyszerűen alkalmazzuk a definíciót.

154. Használjuk a definíciót.

155. A 0 és az 1 sajátérték: vegyük észre, hogy az A által meghatározott lineáris transzformáció a képtér minden vektorát saját magába viszi; más sajátérték nincs: $Ax = \lambda x \Rightarrow A^2x = \lambda^2 x$ (miért?).

156. Indirekt, használjuk a definíciót.

157. Miért ne?

185. A 183. feladathoz hasonlóan érdemes eljárni.

187. Tudjuk, hogy ha m és n relatív prímek, akkor $\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(mn)$; ennek a ténynek a jegyzetben található bizonyítását próbáljuk meg adaptálni.

188. n páros kell legyen.

189. $\varphi(n)$ és $\mathrm{d}(n)$ esetében is a definíciót érdemes használni és hasznos megvizsgálni, hogy n mely osztói lehetnek relatív prímek n-hez.

190. Az előző feladathoz hasonlóan érdemes elindulni.

191. Ugyanúgy, mint az előző feladatban, most is a definíciókat érdemes használni és hasznos megvizsgálni, hogy n mely osztói lehetnek relatív prímek n-hez.

192. Használjuk a pozitív osztók számára vonatkozó képletet és próbálkozzunk indirekten.

193. Nem képletet, hanem a definíciót érdemes használni.

194. Itt is a definíciót érdemes használni.

203. Az Euler-Fermat tétel használata után a keresett maradékra próbáljunk felírni egy lineáris kongruenciát.

206. $16 = 2^4$.

207. Keressünk egy ilyen számot (elég az is, ha belátjuk, hogy van ilyen), majd használjuk az Euler-Fermat tételt.

208. Ha a nem relatív prím n-hez, akkor $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ biztosan nem teljesül.

Megoldások, eredmények

1. A keresett egyenesnek irányvektora az adott sík bármely normálvektora, így az $(1;2;5)$ vektor is. A paraméteres egyenletrendszer ez alapján

$$\begin{aligned} x &= t+2 \\ y &= 2t+2 \\ z &= 5t+3. \end{aligned}$$

2. Az $(1;2;3)$ és $(2;3;9)$ pontokon átmenő egyenes (egyik) irányvektora $(2;3;9)-(1;2;3)=(1;1;6)$, így ez lesz a keresett egyenes (egyik) irányvektora is. Ez alapján a kérdéses egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x &= t+4 \\ y &= t+2 \\ z &= 6t+1. \end{aligned}$$

3. A megadott sík (egy) normálvektora $\underline{n}(5;-4;3)$. Mivel a két sík párhuzamos, $\underline{n}$ a keresett síknak is normálvektora. P és $\underline{n}$ alapján a keresett sík (egyik) egyenlete: $5x-4y+3z=0$. Az origó koordinátái ezt kielégítik, így az origó rajta van a síkon.

4. Első megoldás. Keressünk az egyenesen két pontot: pl. $z=0$ esetén $x=2$, $y=1$, míg $z=1$ esetén $x=3$, $y=2$, így a megadott $(2;3;5)$ ponton kívül a $(2;1;0)$ és $(3;2;1)$ pontok is a síkban vannak. Legyen a sík egyenlete $ax+by+cz=d$, az ismert pontokat behelyettesítve a

$$\begin{aligned} 2a+3b+5c &= d \\ 2a+b &= d \\ 3a+2b+c &= d \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Ezt az a,b,c ismeretlenekre (d-t paraméternek tekintve) megoldjuk Gauss-eliminációval vagy ahogy jólesik, és azt kapjuk, hogy $a=3d$, $b=-5d$, $c=2d$. Mivel a sík egyenletében nem lehet a,b,c mindegyike 0, a $d=0$ esetet ki kell zárnunk, minden más esetben a sík egyenlete $3dx-5dy+2dz=d$ lesz. Mivel $d\neq 0$, nyugodtan oszthatunk vele, ekkor a $3x-5y+2z=1$ egyenletet kapjuk.

Ha nincs kedvünk d-t paraméternek tekinteni vagy túl misztikusnak találjuk, megoldhatjuk az egyenletrendszert konkrét d értékre is, szem előtt tartva, hogy a keresett síkegyenlet számszorosai is síkegyenletek, azaz ha valamilyen 0-tól különböző szám lehet d értéke, akkor lesz olyan egyenlet, amiben $d = 1$, ellenkező esetben pedig persze $d = 0$. Ezt a két értéket elég tehát kipróbálni ($d = 1$-re a felírt egyenletet kapjuk, $d = 0$-ra pedig azt, hogy nincs megoldás, mert $a = b = c = 0$).

Második megoldás. Az $A = (2;1;0)$ és $B = (3;2;1)$ pontok az egyenesen vannak, így benne kell lenniük a síkban is. Legyen a $(2;3;5)$ pont neve C, ez is a síkban van, így az $\overrightarrow{AC} = (2;3;5) - (2;1;0) = (0;2;5)$ és $\overrightarrow{BC} = (2;3;5) - (3;2;1) = (-1;1;4)$ vektorok is a síkban vannak. Mivel $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BC}$ nem párhuzamosak, a vektoriális szorzatuk a keresett sík normálvektora lesz. A vektoriális szorzatot determináns és a kifejtési tétel segítségével felírva:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4 - 1 \cdot 5)\underline{i} - (0 \cdot 4 - 5 \cdot (-1))\underline{j} + (0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1))\underline{k},$$

vagyis a sík (egyik) normálvektora $(3;-5;2)$. Innen a sík (egyik) egyenlete $3x - 5y + 2z = d$, valamely d számra. d értékét a sík egy tetszőleges pontját (mondjuk A-t) behelyettesítve kapjuk: $3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = d$, azaz a keresett síkegyenlet $3x - 5y + 2z = 1$.

5. Első megoldás. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (7;11;-5) - (1;5;3) = (6;6;-8)$ (ahol O az origót jelöli) és hasonlóan $\overrightarrow{AC} = (10;14;-9) - (1;5;3) = (9;9;-12)$. $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ párhuzamosak (hiszen $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$), vagyis A, B és C egy egyenesre esnek. Ebből következik, hogy tetszőlegesen választott D pont esetén (így a feladatban megadottra is) A, B, C és D egy síkra esnek.

Második megoldás. Felírjuk az A, B és D pontok által meghatározott sík egyenletét. Ennek normálvektora lesz minden, az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokra egyaránt merőleges vektor, így például az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ vektoriális szorzat. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (7;11;-5) - (1;5;3) = (6;6;-8)$ (ahol O az origót jelöli) és hasonlóan $\overrightarrow{AD} = (12;6;-15) - (1;5;3) = (11;1;-18)$. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$-t a tanult képlettel meghatározva:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & 6 & -8 \\ 11 & 1 & -18 \end{vmatrix} = (6 \cdot (-18) - 1 \cdot (-8))\underline{i} - (6 \cdot (-18) - 11 \cdot (-8))\underline{j} + (6 \cdot 1 - 6 \cdot 11)\underline{k},$$

vagyis a vektoriális szorzat a $(-100;20;-60)$ vektor. Ehelyett használhatjuk normálvektornak ennek a (-20)-adrészét, az $\underline{n} = (5;-1;3)$ vektort. A kapott normálvektor és (például) A segítségével az ABD sík egyenlete már a tanult képlettel felírható: $5x-y+3z=9$. Ebbe a C pont koordinátáit helyettesítve az egyenlet teljesül, így C rajta van a síkon, vagyis a négy pont egy síkra esik.

6. Első megoldás. Keressünk két pontot az egyenesen. Ha szerencsénk van (részleteket ld. a második megoldásnál), akkor bármely szám lehet egyenesen lévő pont első koordinátája, így elég két darab két ismeretlenes egyenletet megoldani, mondjuk legyen $x=0$, ekkor $-3y+z=16$ és $2y-z=-9$, ahonnan $y=-7$ és $z=-5$, illetve $x=1$, ekkor $-3y+z=11$ és $2y-z=-12$, ahonnan $y=1$ és $z=14$. A $(0;-7;-5)$ és $(1;1;14)$ pontok tehát az egyenesen vannak, ezek különbsége, $(1;8;19)$ jó lesz irányvektornak, ahonnan a paraméteres egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 8t-7 \\ z &= 19t-5. \end{aligned}$$

Mi a teendő, ha nincs szerencsénk és hogy derül ez ki? Úgy derül ki, hogy a két ismeretlenes egyenletrendszernek nem lesz megoldása (vagy ha pont beletaláltunk az egyetlen szóbajövő értékbe, akkor végtelen sok megoldása lesz), ilyenkor megpróbálkozhatunk a második koordinátával, ha ez sem működik, akkor a harmadikkal és ez már biztosan jó lesz, hiszen mindhárom koordináta nem lehet fix, ekkor ugyanis nem egyenesünk, hanem pontunk lenne. Az egész hercehurca elkerülhető persze, ha az eredeti, három ismeretlenes rendszert oldjuk meg (pl. Gauss-eliminációval).

Második megoldás. A metszésvonal irányvektora mindkét síkkal párhuzamos, tehát mindkét sík normálvektorára merőleges lesz, azaz párhuzamos lesz a két normálvektor vektoriális szorzatával. A vektoriális szorzatot determináns és a kifejtési tétel segítségével felírva

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1;8;19).$$

Szükségünk van még az egyenes egy pontjára, ehhez a két síkegyenletből álló egyenletrendszernek kell megtalálnunk egy megoldását. Ezt sokféleképp megtehetjük (pl. Gauss-eliminációval), de a leggyorsabb, ha megpróbálunk megszabadulni az egyik ismeretlentől. Mivel az egyenes irányvektorának első koordinátája nem 0, tetszőleges a szám esetén lesz olyan pontja az egyenesnek, melynek első koordinátája a (ezt a paraméteres egyenletrendszer első egyenletét vizsgálva lehet a legkönnyebben látni: $x=1\cdot t+p$ valamely p számra, így a $t=a-p$ választásra a pontunk első koordinátája a). Keressünk tehát (mondjuk) olyan pontot, melyre $x=0$. Ekkor $-3y+z=16$ és $2y-z=-9$, ahonnan $y=-7$ és $z=-5$. A kérdéses paraméteres egyenletrendszer tehát

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 8t-7 \\ z &= 19t-5. \end{aligned}$$

Harmadik megoldás. Ha már az első két megoldásban mindent elkövettünk, hogy ne kelljen Gauss-eliminálni, érdemes megállapítani, hogy ezzel a technikával is lehet gyors megoldást adni. Gauss-elimináljuk a két sík egyenletéből álló rendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -9 \\ 5 & -3 & 1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{19}{3} & \frac{8}{3} & 31 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{19} & -\frac{93}{19} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{19} & \frac{5}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{19} & -\frac{93}{19} \end{array}\right)$$

A harmadik oszlopban nincs vezéregyes, tehát a z változóhoz szabad paraméter tartozik, mondjuk t. A megoldás $x = \frac{1}{19}t + \frac{5}{19}$, $y = \frac{8}{19}t - \frac{93}{19}$, $z = t$. Nini, ez egy paraméteres egyenletrendszer, ami épp az egyenes pontjaira teljesül. Akkor jó is lesz megoldásnak.

Megjegyzés. Egy egyenesnek természetesen több paraméteres egyenletrendszere is van, ez magyarázza azt, hogy a harmadik megoldás más, mint az első kettő (az első két megoldásban látott irányvektor helyett itt annak $\frac{1}{19}$-szerese szerepel és a pont is más, a harmadik koordinátája 0, nem az első). A Gauss-elimináció kellemesebb lesz, ha felcseréljük az x és a z koordináta szerepét, vagy ha (ami ezzel ekvivalens) az egyenletrendszer megoldása előtt cseréljük fel az első és a harmadik oszlopot, de egyik sem javasolt, mivel nehezítik az eljárás átlátását és számos hibalehetőséget rejtenek magukban (persze a bemutatott Gauss-eliminációt meg elég könnyű elszámolni).

7. S átmegy az AB szakasz felezőpontján, vagyis a $(3;5;2)$ ponton. Mivel S merőleges az AB szakaszra, az $\overrightarrow{AB}$ vektor normálvektora lesz S-nek. Így S-nek normálvektora $(2;2;-8)$, ahonnan S (egy) egyenlete $2x+2y-8z=d$. A d értéket a $(3;5;2)$ pont koordinátáit behelyettesítve kapjuk: $d = 2\cdot 3 + 2\cdot 5 - 8\cdot 2 = 0$.

8. Eredmény: a sík egyenlete $3x-2y-z=6$ (és ennek (nem nulla) számszorosai).

9. A keresett egyenesnek irányvektora lesz minden, az ABC lap síkjára merőleges (nullától különböző) vektor. Jó irányvektor lesz tehát például a $\underline{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektoriális szorzat. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5;7;4)-(2;5;1) = (3;2;3)$ (ahol O az origót jelöli) és hasonlóan $\overrightarrow{AC} = (6;4;2)-(2;5;1) = (4;-1;1)$. A vektoriális szorzatot determináns és a kifejtési tétel segítségével felírva:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\underline{i} + 9\underline{j} - 11\underline{k}.$$

Tehát $\underline{v} = (5;9;-11)$. $\underline{v}$ és D segítségével a magasságvonal egyenletrendszere könnyen felírható:

$$\frac{x-9}{5} = \frac{y-7}{9} = \frac{z-5}{-11}.$$

Természetesen az irányvektor meghatározásához nem szükséges a vektoriális szorzat fogalma: valamivel több számolással skaláris szorzás segítségével, a $\underline{v}\cdot\overrightarrow{AB} = \underline{0}$, $\underline{v}\cdot\overrightarrow{AC} = \underline{0}$ összefüggéseket felhasználva is megkapható egy alkalmas $\underline{v}$ irányvektor.

10. Egy sík pontosan akkor lesz párhuzamos f-fel, ha a normálvektora merőleges f irányvektorára, $(3;4;7)$-re, azaz a skaláris szorzatuk 0. Legyen a normálvektor (a,b,c), ekkor tehát $3a+4b+7c=0$ kell, hogy teljesüljön. Ennek sok megoldása van, ilyen pl. az $(1;1;-1)$ vektor. Megfelelő megoldás tehát például az $x+y-z=0$ sík (a jobboldali 0 onnan jön, hogy a sík tartalmazza az origót).

11. Egy egyenes pontosan akkor döf egy síkot, ha nem párhuzamos vele, vagyis ha az irányvektora és a sík normálvektora nem merőlegesek, azaz a skaláris szorzatuk nem 0. A megadott egyenes irányvektora $(1;1;c)$ a megadott sík normálvektora $(1;1;1)$, így az egyenes akkor döfi a síkot, ha $(1;1;c)\cdot(1;1;1) = c+2 \neq 0$, azaz $c \neq -2$ esetén.

12. Eredmény: a sík egyenlete $-x+2y-z=1$ (és ennek (nem nulla) számszorosai).

13. Jelölje a megadott egyenest e, a keresett síkot S, annak egy normálvektorát pedig $\underline{n}$. e irányvektora $\underline{v}(3;1;5)$. Mivel S párhuzamos e-vel, ezért $\underline{n}$ merőleges $\underline{v}$-re, $\underline{n}$ ugyancsak merőleges a $\overrightarrow{PQ}$ vektorra (hiszen ez a két pont a síkban fekszik). $\overrightarrow{PQ} = \underline{q}-\underline{p} = (2;3;6)$ (ahol $\underline{p}$ és $\underline{q}$ a két pontba mutató helyvektorokat jelölik). Így a $\overrightarrow{PQ}\times\underline{v}$ vektoriális szorzat jó választás $\underline{n}$-re. Ezt a tanultképlettel meghatározva:

$$\overrightarrow{PQ}\times\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 9\underline{i}+8\underline{j}-7\underline{k}.$$

A kapott normálvektor és P (vagy Q) segítségével a sík egyenlete már könnyen felírható: $9x+8y-7z=5$. A normálvektor meghatározásához persze nem feltétlenül szükséges a vektoriális szorzat fogalma: valamivel több számolással a $\underline{v}\cdot\underline{n}=\underline{0}$, $\overrightarrow{PQ}\cdot\underline{n}=\underline{0}$ összefüggéseket felhasználva is megkapható egy alkalmas $\underline{n}$ normálvektor.

14. Egy (x,y,z) pont akkor és csak akkor lesz rajta mindhárom síkon, ha x,y,z megoldása a három síkegyenletből álló egyenletrendszernek. A Gauss-elimináció első lépései során az alábbiakat kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 6 & 10 & 24 \\ 4 & 2 & p & 68 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & p-12 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{array}\right).$$

Két esetet érdemes megkülönböztetni aszerint, hogy p értéke 0 vagy sem. Ha $p = 0$, akkor az utolsó sort töröljük, majd a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk. A megoldás innen $x = t + 18$, $y = -2t - 2$, $z = t$, ahol t tetszőleges valós szám. Ez egy $(1; -2; 1)$ irányvektorú, és (többek közt) a $(18; -2; 0)$ ponton átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszere, bár ezt senki nem kérdezte. Ha $p \neq 0$, akkor p-vel osztva, majd a Gauss-eliminációt folytatva

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

adódik, vagyis ekkor a megoldás a $(18; -2; 0)$ pont.

15. Első megoldás. A síkok pontosan akkor metszők, ha a normálvektoraik nem párhuzamosak, ez jelen esetben nyilván $c \neq 2$ esetén teljesül. ($c = 2$-re a két sík párhuzamos (de nem azonos) lesz.) A metszetegyenes akkor és csak akkor nem lesz párhuzamos a harmadik síkkal, ha döfi, azaz pontosan egy közös pontjuk van. Azt kell tehát megvizsgálnunk, hogy ($c \neq 2$ esetén) a három síknak mikor nem lesz pontosan egy közös pontja (hiszen a metszetegyenes épp az első két sík közös pontjainak halmaza). Magyarán a három síkegyenletből kapott egyenletrendszer megoldásainak számára vagyunk kíváncsiak. Az egyenletrendszer

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ c & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & c & 5 \end{array}\right).$$

A megoldások számához elég a baloldali mátrix determinánsát vizsgálni: ha a determináns 0, akkor nulla vagy végtelen sok megoldás lesz, ha nem 0, akkor pontosan egy. A determinánst kifejtési tétellel (vagy máshogy, a Gauss-elimináció most körülményes) kiszámítva $-2c^2 + 10c - 12$ adódik, ez $c = 2$ és $c = 3$ esetén lesz 0, az előbbit kizártuk, a megoldás tehát $c = 3$.

Második megoldás. Az első két sík $c \neq 2$ esetén metsző, a metszetegyenes egy irányvektora a két sík normálvektorainak vektoriális szorzata, azaz

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ c & 4 & 2 \end{vmatrix} = (0; c-2; 4-2c).$$

Az egyenes pontosan akkor lesz párhuzamos a harmadik síkkal, ha az irányvektora merőleges a sík normálvektorára, azaz a $(0; c-2; 4-2c) \cdot (3; 6; c)$ skaláris szorzat 0. A skaláris szorzat $0 \cdot 3 + (c-2) \cdot 6 + (4-2c) \cdot c = -2c^2 + 10c - 12$, ez $c = 2$ és $c = 3$ esetén lesz 0, az előbbit kizártuk, a megoldás tehát $c = 3$.

Harmadik megoldás. A metszet vizsgálatához Gauss-elimináljuk a két síkegyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ c & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4-2c & 2-c & 4-3c \end{array}\right).$$

Ha $4 - 2c = 0$, azaz $c = 2$, akkor tilos sort kapunk (mivel $2 - c$ is 0, $4 - 3c$ viszont nem), azaz ekkor nem lesz metsző a két sík. Ellenkező esetben oszthatunk $(4 - 2c)$-vel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{4-3c}{4-2c} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 - \frac{4-3c}{2-c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{4-3c}{4-2c} \end{array}\right).$$

Innen a megoldás $x = 3 - \frac{4-3c}{2-c}$, $y = -\frac{1}{2}t + \frac{4-3c}{4-2c}$, $z = t$, tetszőleges t valós számra. Ez egy egyenes paraméteres egyenletrendszere, melynek irányvektora $(0; -\frac{1}{2}; 1)$ (ennek kiszámításához a redukált lépcsős alak jobboldalára nincs is szükség). Az egyenes akkor lesz párhuzamos a harmadik síkkal, ha az irányvektora merőleges a sík normálvektorára, azaz a $(0; -\frac{1}{2}; 1) \cdot (3; 6; c)$ skaláris szorzat 0. A skaláris szorzat $0 \cdot 3 + -\frac{1}{2} \cdot 6 + 1 \cdot c = c - 3$, a megoldás tehát $c = 3$.

16. A síkok egy-egy normálvektora előáll (például) az AC és BC, illetve DC és EC vektorok vektoriális szorzataként. A vektoriális szorzatokat determináns segítségével kiszámítva az első sík egy normálvektorának $(2; -1; 1)$, a második sík egy normálvektorának $(2; 6; -7)$ adódik. Ezek a vektorok merőlegesek a keresett irányvektorra és egymással nem párhuzamosak, tehát a vektoriális szorzatuk párhuzamos a keresett vektorral. A vektoriális szorzatot determináns segítségével kiszámítva (egy lehetséges) megoldásként az $(1; 16; 14)$ vektor adódik.

Természetesen vektoriális szorzás nélkül is megoldható a feladat: meghatározhatjuk a két sík egyenletét, majd az e két egyenletből álló rendszer megoldásait, ezek lesznek a metszetegyenes pontjai. Innen az irányvektor (a 14. feladat megoldásánál és a 15. feladat harmadik megoldásánál látottak szerint) leolvasható, de az is jó, ha keresünk két konkrét megoldást, a különbségük az egyenes irányvektora lesz. Mivel a C pont nyilván rajta van a metszetegyenesen, valójában elég egy ettől különböző megoldást megtalálnunk.

17. Első megoldás. Az egyenes irányvektora $(4; 8; 16)$, a sík normálvektora $(0; 2; 1)$, skaláris szorzatuk $(4; 8; 16) \cdot (0; 2; 1) = 32$, vagyis a két vektor nem merőleges, így az egyenes nem párhuzamos a síkkal, tehát pontosan egy közös pontjuk van.

Második megoldás. Keressük meg a metszésponto(ka)t, vagyis oldjuk meg az egyenes egyenleteiből és a sík egyenletéből álló rendszert. Ennek legegyszerűbb módja, ha a paraméteres egyenletrendszer egyenleteit a sík egyenletébe írva meghatározzuk t-t: $p = 2y+z = 2(8t+1)+(16t+1) = 32t+3$, innen $t = \frac{p-3}{32}$. Mivel ezzel az x, y, z értékeket is egyértelműen meghatároztuk (a paraméteres egyenletrendszer egyenleteit használva), minden p értékre pontosan egy közös pont lesz.

Megjegyzés. Láttuk, hogy a közös pontok száma p értékétől független. Ennek az az oka, hogy p a sík normálvektorát nem befolyásolja, csak azt, hogy a $(0;2;1)$ normálvektorú párhuzamos síkok közül melyikről van szó, továbbá a sík és az egyenes nem párhuzamos. Ha a sík és az egyenes párhuzamosak lennének, akkor p is szerephez jutna: p határozná meg, hogy az egyenes benne van-e a síkban (amikor is végtelen sok közös pont lenne) vagy sem (mely esetben nem lenne közös pont).

18. Legyen a keresett egyenes e, az irányvektora pedig $(a;b;c)$. Mivel e és f merőleges, az irányvektoraik skaláris szorzata 0, azaz $(a;b;c)\cdot(1;1;0) = a+b = 0$. Mivel e átmegy az origón, (egyik) paraméteres egyenletrendszere

$$x = at',\ y = -at',\ z = ct'.$$

Az egyenesek $(x;y;z)$ metszéspontjára mindkét paraméteres egyenletrendszer teljesül (nem feltétlenül azonos paraméterrel, ezért is jelöltük a második rendszer paraméterét t'-vel), tehát egyfelől (e miatt) $x+y=0$, másfelől (f miatt) $x+y = 2t+3$, ahonnan $t = -\frac{3}{2}$, ebből pedig $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -1$. Mivel ez a pont és az origó is rajta van e-n, a $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1)$ vektor irányvektora e-nek, innen a keresett paraméteres egyenletrendszer

$$x = -\frac{1}{2}t',\ y = \frac{1}{2}t',\ z = -t'.$$

19. Jelölje az adott egyenest e, a keresett egyenest f. e egy irányvektora $\underline{v}(1;3;-4)$, egy pontja $Q(3;2;-1)$. A P-n átmenő, $\underline{v}$ normálvektorú S sík e-vel vett M metszéspontja épp f és e metszéspontja. S egyenlete felírható $\underline{v}$ és P segítségével: $x+3y-4z = 1\cdot 12+3\cdot 1+(-4)\cdot 7 = -13$. Az M metszéspont innen már könnyen megkapható, csak meg kell oldanunk azt az egyenletrendszert, mely az e egyenest meghatározó két egyenletből és S egyenletéből áll:

$$x-3 = \frac{y-2}{3} = \frac{-z-1}{4},\ x+3y-4z = -13.$$

Az első két egyenletből y-t és z-t x segítségével kifejezve: $y = 3x-7, z = -4x+11$, majd ezt a harmadik egyenletbe behelyettesítve és rendezve $x = 2$ adódik. Ebből $y = -1$, $z = 3$ (az egyenletrendszert persze másképp is megoldhatjuk). Vagyis megkaptuk M-et: $M(2;-1;3)$. f-nek $\overrightarrow{MP}$ irányvektora. Ez megkapható a P-be, illetve M-be mutató helyvektorok különbségeként: $\overrightarrow{MP}(10;2;4)$. (Ennek a fele is használható irányvektornak: $(5;1;2)$.) Az irányvektor és P (vagy M) segítségével már felírható f egyenletrendszere: $\frac{x-12}{5} = y-1 = \frac{z-7}{2}$. (Vagy ugyanez M-et használva: $\frac{x-2}{5} = y+1 = \frac{z-3}{2}$.)

Megjegyzés. A feladat a következő ötlettel is megoldható: a fenti megoldás jelöléseit használva, legyen $\underline{v}_0$ a $\underline{v}$-vel azonos irányú, egység hosszú vektor. (Azaz $\underline{v}_0 = (\frac{1}{\sqrt{26}}) \cdot \underline{v}$.) Ekkor a $\underline{v}_0 \cdot \overrightarrow{QP}$ skaláris szorzat abszolút értéke (a skaláris szorzat definíciója és a derékszögű háromszög oldalai és szögei közt fennálló ismert összefüggések szerint) épp a $\overrightarrow{QM}$ vektor hossza. Ebből pedig $\overrightarrow{QM}$, majd M már könnyen meghatározható.

20. Első megoldás. A két egyenes akkor kitérő, ha se nem párhuzamosak, se nem metszők. Párhuzamosak akkor lesznek, ha az irányvektoraik párhuzamosak. Az AB egyenes (egyik) irányvektora $(3;1;3)$, a CD egyenes (egyik) irányvektora $(6;2;p-3)$. Ezek pontosan akkor párhuzamosak, ha létezik olyan c valós szám, melyre $c \cdot (3;1;3) = (6;2;p-3)$. Világos, hogy ez pontosan ($c = 2$ és) $p = 9$ esetén teljesül. Ha a két egyenes nem párhuzamos, akkor meg kell még vizsgálni, hogy metszők-e. Ehhez célszerű felírni a két egyenes egyenletrendszerét: AB (egyik) paraméteres egyenletrendszere az $x = 3t+1$, $y = t+1$, $z = 3t+2$ egyenletekből, CD (egyik) paraméteres egyenletrendszere pedig az $x = 6s+4$, $y = 2s, z = (p-3)s+3$ egyenletekből áll. Innen AB (nem paraméteres) egyenletrendszere $\frac{x-1}{3} = y-1 = \frac{z-2}{3}$, CD (nem paraméteres) egyenletrendszere pedig $\frac{x-4}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{p-3}$, ha $p \neq 3$, illetve $\frac{x-4}{6} = \frac{y}{2}$, $z = 3$, ha $p = 3$. Könnyen kiszámítható, hogy a két egyenletrendszernek egyik esetben sem lesz közös megoldása, vagyis a két egyenes soha nem lesz metsző. Az egyenesek tehát pontosan akkor kitérők, ha $p \neq 9$.

Második megoldás. A két egyenes akkor nem kitérő, ha az A, B, C, D pontok egy síkban vannak. Az ABC síknak normálvektora lesz az $AB = (3;1;3)$ és az $AC = (3;-1;1)$ vektorok vektoriális szorzata, azaz

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

ahol $\underline{i}$, $\underline{j}$, és $\underline{k}$ az x, y, illetve z irányú egységvektorok. A kifejtési tétellel a determinánst kiszámítva a $(4;6;-6)$ vektor adódik normálvektornak. Innen a sík egyenlete $2x+3y-3z = d$, d értékére a sík egy tetszőleges pontját (pl. A-t) behelyettesítve a -1-et kapjuk. A D csúcs akkor lesz a síkban, ha a kapott egyenlet teljesül a koordinátáira, azaz $2 \cdot 10 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot p = -1$. Innen $p = 9$, az egyenesek tehát akkor és csak akkor kitérők, ha $p \neq 9$.

21. Az állítás nem igaz, a kérdéses halmaz ugyanis nem zárt az összeadásra: például az $(1;1;1)$ és $(0;1;0)$ számhármasokra teljesül a feltétel, az összegükre azonban nem.

22. Eredmény: igen.

23. Legyen a Fibonacci típusú, $\mathbb{R}^5$-beli vektorok halmaza F és legyen $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ és $\underline{w} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$ két F-beli elem, $\lambda \in \mathbb{R}$ pedig tetszőleges skalár. Először megmutatjuk, hogy $\underline{v}+\underline{w}$ szintén F-beli. Ugyanis $\underline{v}+\underline{w}$ harmadik eleme x_3+y_3, ahol $x_3 = x_1+x_2$ és $y_3 = y_1+y_2$ (mert $\underline{v}$ és $\underline{w}$ F-beliek). Így $\underline{v}+\underline{w}$ harmadik eleme $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)$, vagyis valóban $\underline{v}+\underline{w}$ első két elemének összege. Hasonlóan látható be, hogy $\underline{v}+\underline{w}$ negyedik és ötödik eleme is a fölötte álló kettő összegével egyenlő. Most megmutatjuk, hogy $\lambda \cdot \underline{v}$ is F-beli. Ugyanis $\lambda \cdot \underline{v}$ harmadik eleme $\lambda \cdot x_3 = \lambda(x_1+x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$, vagyis a $\lambda \cdot \underline{v}$ harmadik eleme az első kettő összegével egyenlő. Ugyanígy indokolható, hogy $\lambda \cdot \underline{v}$ negyedik és ötödik eleme is a fölötte álló kettő összege. Mindebből következik, hogy F olyan nemüres részhalmaza $\mathbb{R}^5$-nek, amely zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra, így altér. (F valóban nemüres, hiszen például benne van a nullvektor vagy a feladatban megadott konkrét vektor.)

25. A vektorok akkor és csak akkor alkotnak független rendszert, ha $\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}+\gamma\underline{c}+\delta\underline{d} = \underline{0}$ csak $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ esetén lehetséges, vagyis ha az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 9 & p & 0 \\ 0 & 3 & 6 & p+1 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek csak egy megoldása van. Gauss-eliminációt alkalmazva az egyenletrendszer az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4-p}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7p}{2}-6 & 0 \end{array}\right)$$

alakra hozható, ahonnan látható, hogy a megoldás pontosan akkor lesz egyértelmű, ha a negyedik sorban is lesz vezéregyes, tehát $\frac{7p}{2}-6 \neq 0$, vagyis $p \neq \frac{12}{7}$. Így a vektorok $p \neq \frac{12}{7}$ esetén alkotnak független rendszert.

Megjegyzés. Természetesen vizsgálhattuk volna (praktikusan – a jobboldali 0-k nem túl fárasztó kiszámításától eltekintve – pontosan ugyanígy) az egyenletrendszer baloldalán lévő 4×4-es mátrix determinánsát is: ez akkor és csak akkor nem 0, ha létezik egyértelmű megoldás.

26. A generált altér definíciója szerint azt kell eldönteni, hogy léteznek-e olyan α, β, γ skalárok, melyekre $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = \underline{d}$ teljesül. Behelyettesítve $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ értékét, a

$$\begin{aligned} 3\alpha + 15\beta + 12\gamma &= 6 \\ -\alpha + 6\gamma &= 8 \\ 2\alpha + 8\beta + 7\gamma &= -9 \\ \alpha + 7\beta + p \cdot \gamma &= 12 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerre jutunk. Erre a Gauss-eliminációt alkalmazva:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 15 & 12 & 6 \\ -1 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 7 & -9 \\ 1 & 7 & p & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -13 \\ 0 & 2 & p-4 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & p-8 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3p-18 \end{array}\right).$$

Látható, hogy ha $3p - 18 \neq 0$, akkor tilos sor keletkezik, vagyis az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ha viszont $3p - 18 = 0$, akkor az utolsó sor elhagyható és az egyenletrendszer megoldható lesz. Így a $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ állítás pontosan akkor igaz, ha $p = 6$.

Megjegyzés. $p = 6$ esetén az elimináció folytatásával megkapható az egyenletrendszer (egyértelmű) megoldása: $\alpha = -26$, $\beta = 8$, $\gamma = -3$, a feladatban szereplő kérdés megválaszolásához azonban erre nincs szükség.

27. Első megoldás. A négy vektor pontosan akkor alkot generátorrendszert, ha minden (d, e, f, g) valós számnégyeshez létezik olyan $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, melyekre $\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} + \gamma\underline{z} + \delta\underline{v} = (d, e, f, g)$. Más szóval az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & c & d \\ c & c & c & 4 & e \\ c & c & 0 & 0 & f \\ c & 0 & 0 & 0 & g \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek létezik megoldása minden (d, e, f, g) valós számnégyesre. Könnyen látható, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha a bal oldali mátrix determinánsa nem 0. (Ha a determináns nem 0, akkor mindig létezik (egyértelmű) megoldás, ha viszont 0, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik vagy tilos sor vagy csupa 0 sor. Ez utóbbi esetben a sornak megfelelő jobboldalt megváltoztatva tilos sort kapunk, vagyis mindig lesz olyan (d,e,f,g) négyes, amire tilos sort kapunk és így nincs megoldás.) A determinánst a negyedik sor szerint kifejtve, majd a kapott determinánst a harmadik sor szerint kifejtve (vagy akár a definíció alapján) $c^2(c^2-12)$ adódik. Ez pontosan akkor lesz 0, ha $c=0$, $c=\sqrt{12}$ vagy $c=-\sqrt{12}$. Ezen c értékekre tehát a vektorok nem alkotnak generátorrendszert, minden más c-re viszont igen.

Második megoldás. Négy vektor egy négy dimenziós térben akkor és csak akkor alkot generátorrendszert, ha függetlenek, hiszen ha függetlenek lennének, de nem alkotnának generátorrendszert, akkor egy általuk nem generált vektorral együtt már öt elemű független rendszert alkotnának (az újonnan érkező vektor lemmája miatt), ami lehetetlen; másrészt ha nem lennének függetlenek, akkor egy alkalmas elemet elhagyva egy három elemű generátorrendszert kapnánk, ami szintén lehetetlen. A négy vektor pontosan akkor lesz független, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort, vagyis az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & c & 0 \\ c & c & c & 4 & 0 \\ c & c & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Ez ekvivalens azzal, hogy a baloldali mátrix determinánsa nem 0, innentől pedig az első megoldásban látottak szerint járunk el.

28. A generált altér definíciója szerint azt kell eldönteni, hogy léteznek-e olyan $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ skalárok, amelyekre $\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}+\gamma\underline{c}+\delta\underline{d}=\underline{e}$ teljesül. Behelyettesítve $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ és $\underline{e}$ konkrét értékét, a $2\alpha+4\beta+10\gamma-4\delta=0$, $3\alpha+4\beta+9\gamma=-2$, $-\alpha+\gamma+p\cdot\delta=p+4$ lineáris egyenletrendszerhez jutunk. Erre a Gauss-eliminációt alkalmazva:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 4 & 10 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & p & p+4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & p-2 & p+4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p+4 & p+2 \end{array}\right)$$

Ha $p+4=0$, akkor tilos sor keletkezik, így az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha viszont $p+4\neq 0$, akkor az utolsó sor $(p+4)$-gyel osztása után kapjuk a lépcsős alakot. Ebben az esetben tehát az egyenletrendszernek lesz megoldása, mert a redukált lépcsős alakig hátralévő lépések során tilos sor már nem keletkezhet. Így az $\underline{e} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás pontosan akkor igaz, ha $p \neq -4$.

29. A vektorok pontosan akkor lesznek függetlenek, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort, vagyis a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} c & 1 & 1 & 0 \\ 1 & c & 2 & 0 \\ 2 & 2 & c & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. A Gauss-elimináció kellemetlennek tűnik, de ha előtte kicseréljük az első és a negyedik sort (ami a megoldáshalmazt nem változtatja meg), akkor fájdalommentes lesz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & c & 2 & 0 \\ 2 & 2 & c & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & c-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-2 & 0 \\ 0 & 1-c & 1-c & 0 \end{array}\right).$$

Ha $c = 1$, akkor a második oszlopban nem lesz vezéregyes, vagyis semmiképp sem lehet egyértelmű a megoldás. Ha $c \neq 1$, akkor a második sort $(c-1)$-gyel osztva és a Gauss-eliminációt folytatva

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{c-1} & 0 \\ 0 & 0 & c-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-c & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{c-1} & 0 \\ 0 & 0 & c-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-c & 0 \end{array}\right).$$

Ha $c = 2$, akkor a harmadik oszlopban nem lesz vezéregyes, tehát ekkor sem lehet egyértelmű a megoldás. Ha $c \neq 2$, akkor a harmadik sort $(c-2)$-vel osztva és a Gauss-eliminációt folytatva az alábbi lépcsős alakot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{c-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Mivel minden oszlopban van vezéregyes, a megoldás egyértelmű, tehát a vektorok akkor és csak akkor lesznek függetlenek, ha $c \neq 1$ és $c \neq 2$.

30. Első megoldás. A két megadott vektor független rendszert alkot (ha nem így lenne, akkor természetesen nem is lehetne őket bázissá kiegészíteni), olyan harmadik vektort kell keresnünk, amelyet a rendszerhez véve az független marad, hiszen

3 független vektor egy 3 dimenziós térben bázist kell, hogy alkosson. Legyen a harmadik vektor $(a;b;c)$, ekkor arra lesz szükségünk, hogy a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & a & 0 \\ 5 & 2 & b & 0 \\ 2 & 3 & c & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek csak egy megoldása legyen (azaz a 3 vektornak csak a triviális lineáris kombinációja adja a nullvektort). Ez azzal ekvivalens, hogy a baloldali 3×3-as mátrix determinánsa nem 0. A determinánst kifejtési tétellel kiszámítva (a harmadik oszlop szerint kifejtve) $11a+b-19c$ adódik, minden olyan a,b,c hármas jó lesz, amire ez a kifejezés nem 0. Ha nincs kedvünk a kifejtési tételt használni (vagy még nem tanultuk), akkor használhatjuk a definíciót is (esetleg a Sarrus-szabályt, de csak ha megígérjük, hogy kizárólag 3×3-as mátrixokra fogjuk alkalmazni és nem rontjuk el), vagy intelligens próbálgatást is alkalmazhatunk: a $(0;0;1)$, $(0;1;0)$, $(1;0;0)$ vektorok valamelyike biztosan jó lesz harmadiknak, hiszen nem lehet mindegyikük benne a két adott vektor síkjában (most történetesen mind a három jó lesz).

Második megoldás. Egy kételemű (független) halmazt kell egy három dimenziós tér bázisává kiegészíteni, tehát pontosan egy plusz vektorra lesz szükség. Ez a vektor bármi lehet, ami nincs benne a két megadott vektor által generált altérben (ami egy sík), hiszen ekkor a három vektor együtt legalább 3 dimenziós alteret generál, ez pedig csak maga $\mathbb{R}^3$ lehet. Ilyen vektort sokféleképp kaphatunk, a leggyorsabb talán a két adott vektor vektoriális szorzatát tekinteni, ami merőleges mindkét vektorra, így természetesen nincs benne az általuk meghatározott síkban. A vektoriális szorzatot determináns segítségével kiszámítva a $(11;1;-19)$ vektort kapjuk.

Ha már úgyis megvan a vektoriális szorzat, akkor akár fel is írhatjuk a két megadott vektor által generált sík egyenletét (amit az első megoldásban is megkaptunk): $11x+y-19z=0$ (a jobboldali 0 onnan jön, hogy az origó benne van a síkban). Minden olyan vektor jó lesz harmadiknak, ami nincs a síkban, azaz amire az egyenlet nem teljesül. A sík egyenletét természetesen vektoriális szorzás és determináns használata nélkül is megkaphatjuk, például úgy, hogy felvesszük 3 pontját (mondjuk a két megadott vektort és az origót), majd megoldjuk az így adódó egyenletrendszert.

31. A kilenc közös vektor egy kilenc dimenziós alteret feszít, amiben a nem közös vektorok egyike sincs benne. Ebből azonban nem következik, hogy ezek egymás számszorosai, hiszen legyen pl. a kilenc közös vektor a szokásos bázis első kilenc vektora, a nem közös vektorok pedig a szokásos bázis tizedik vektora, illetve (mondjuk) a szokásos bázis vektorainak összege. Könnyen látható, hogy így valóban két bázist kapunk, a két nem közös vektor pedig nyilván nem egymás számszorosa.

32. Például a szokásos $(1;0;0;0),(0;1;0;0),(0;0;1;0),(0;0;0;1)$ bázis és az $(1;0;0;0),(0;1;0;0),(1;0;1;0),(0;1;0;1)$ bázis ilyenek lesznek.

35. Elég megmutatni, hogy a kérdéses vektorhalmaz (a továbbiakban B) generátorrendszer, hiszen ekkor az F-G egyenlőtlenség miatt független is kell legyen. (Ha nem lenne az, lenne vektora, amely a többiek lineáris kombinációja. B-ből ezt a vektort elhagyva is generátorrendszert kapnánk, ami lehetetlen, hiszen $\mathbb{R}^4$-et (az F-G egyenlőtlenség szerint) 4-nél kevesebb vektor nem generálhatja.) Mivel

$$4(\underline{b_1}+\underline{b})-(\underline{b_2}+\underline{b})-(\underline{b_3}+\underline{b})-(\underline{b_4}+\underline{b})=5\underline{b_1},$$

$\underline{b_1}$ előáll B elemeinek lineáris kombinációjaként. Ugyanígy látható, hogy $\underline{b_2},\underline{b_3}$ és $\underline{b_4}$ is előáll B elemeinek lineáris kombinációjaként. Mivel B egy bázis minden elemét generálja, maga is generátorrendszer.

Megjegyzés. Természetesen megoldható a feladat úgy is, hogy B függetlenségét bizonyítjuk, és ebből vonjuk le azt a következtetést, hogy generátorrendszer is (az elemszáma miatt), illetve a két tulajdonságot egymástól függetlenül, külön-külön is beláthatjuk.

36. Eredmény: igen.

37. Eredmény: igen.

38. Az $\langle\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3,\underline{u}_4\rangle$ altér legfeljebb 3 dimenziós, hiszen az $\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3,\underline{u}_4$ vektorok nem függetlenek. A $2\underline{u}_1+3\underline{u}_2$, $2\underline{u}_2+3\underline{u}_3$, $2\underline{u}_3+3\underline{u}_4$, $2\underline{u}_4+3\underline{u}_1$ vektorok mind benne vannak az $\langle\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3,\underline{u}_4\rangle$ altérben, vagyis az általuk generált altér része ennek, tehát szintén legfeljebb 3 dimenziós, ez pedig azt jelenti, hogy a kérdéses vektorok összefüggők.

40. a) Az állítás biztosan hamis. Ugyanis ha $\underline{c}\in\langle\underline{a},\underline{d}\rangle$ igaz volna, akkor $\underline{c}\in\langle\underline{a},\underline{b},\underline{d}\rangle$ is teljesülne (hiszen ha $\underline{c}=\alpha\underline{a}+\delta\underline{d}$, akkor $\underline{c}=\alpha\underline{a}+\delta\underline{d}+0\cdot\underline{b}$).

b) Az állítás biztosan igaz. Ugyanis $\underline{d}\in\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle$ miatt tudjuk, hogy létezik a $\underline{d}=\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}+\gamma\underline{c}$ lineáris kombináció. Itt $\gamma=0$ kell teljesüljön, ellenkező esetben átrendezéssel $\underline{c}=-\frac{\alpha}{\gamma}\underline{a}-\frac{\beta}{\gamma}\underline{b}+\frac{1}{\gamma}\underline{d}$ adódna, vagyis $\underline{c}\in\langle\underline{a},\underline{b},\underline{d}\rangle$ következne. Ezért $\underline{d}=\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}$, vagyis $\underline{d}\in\langle\underline{a},\underline{b}\rangle$ valóban igaz.

c) Az állítás lehet igaz is és hamis is. Legyen először $n=3$ és legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a három tengelyirányú egységvektor, valamint legyen $\underline{d}=\underline{a}$. Ekkor $\underline{d}\in\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle$ igaz (hiszen $\underline{d}=1\cdot\underline{a}$). Továbbá $\underline{c}\notin\langle\underline{a},\underline{b},\underline{d}\rangle$ is teljesül (hiszen $\langle\underline{a},\underline{b},\underline{d}\rangle$ elemei az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített sík vektorai). Ebben az esetben a $\underline{b}\in\langle\underline{a},\underline{c},\underline{d}\rangle$ állítás hamis (mert $\langle\underline{a},\underline{c},\underline{d}\rangle$ elemei az $\underline{a}$ és $\underline{c}$ által kifeszített sík vektorai). Másodszor legyen $\underline{a}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$

ugyanaz, mint a fenti példában, de legyen $\underline{b} = \underline{a}$. Ekkor $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ változatlanul igaz és $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ is megint teljesül (mert $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ csak az $\underline{a}$ skalárszorosaiból áll). Ám ebben az esetben a $\underline{b} \in \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás már igaz (hiszen $\underline{b} = 1 \cdot \underline{a}$).

41. Megmutatjuk, hogy $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{100}$ generátorrendszer V-ben; ebből következni fog, hogy bázis is (hiszen a feladat szerint lineárisan független), ebből pedig következik, hogy $\dim V = 100$. Legyen $\underline{u} \in V$ tetszőleges vektor; azt kell megmutatnunk, hogy $\underline{u}$ kifejezhető a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok egy lineáris kombinációjaként. Felhasználva a feladat feltételét $\underline{u}$-ra: léteznek olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_{100}$ skalárok, amelyekre a $\underline{v}_1 + \alpha_1 \underline{u}, \ldots, \underline{v}_{100} + \alpha_{100} \underline{u}$ vektorok lineárisan összefüggők. Vagyis léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_{100}$ skalárok, hogy ezek nem mindegyike 0 és

$$\lambda_1(\underline{v}_1 + \alpha_1 \underline{u}) + \lambda_2(\underline{v}_2 + \alpha_2 \underline{u}) + \ldots + \lambda_{100}(\underline{v}_{100} + \alpha_{100} \underline{u}) = \underline{0}.$$

Beszorzás, átrendezés és kiemelés után:

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_{100} \underline{v}_{100} + (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_{100} \alpha_{100}) \underline{u} = \underline{0}.$$

Legyen $\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \ldots + \lambda_{100} \alpha_{100}$. Ekkor $\beta \neq 0$, különben a fenti egyenlőségből

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_{100} \underline{v}_{100} = \underline{0}$$

adódna, ellentmondásban $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{100}$ lineáris függetlenségével (hiszen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{100}$ nem mind 0). Így a fenti egyenlőségből átrendezés után

$$\underline{u} = -\frac{\lambda_1}{\beta} \underline{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\beta} \underline{v}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{100}}{\beta} \underline{v}_{100}$$

adódik, vagyis az $\underline{u}$-t előállító lineáris kombináció valóban létezik.

42. A feladat állítását az egyszerűség kedvéért $\underline{b}_1$-re mutatjuk meg (hiszen B elemeinek számozása tetszőleges). Legyen $W = \langle \underline{b}_2, \underline{b}_3, \ldots, \underline{b}_n \rangle$. Ekkor C-ben van W-hez nem tartozó elem, különben W-ben C n elemű lineárisan független rendszert, $B \setminus \{\underline{b}_1\}$ pedig $n-1$ elemű generátorrendszert alkotna, ami ellentmondana az F-G egyenlőtlenségnek. Legyen tehát $C \setminus W = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_k\}$ (C elemeinek számozása szintén tetszőleges). Mivel C bázis, ezért $\underline{b}_1$ pontosan egyféleképp állítható elő C elemeiből lineáris kombinációval:

$$\underline{b}_1 = \gamma_1 \underline{c}_1 + \gamma_2 \underline{c}_2 + \ldots + \gamma_n \underline{c}_n.$$

Állítjuk, hogy a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ együtthatók között van nemnulla. Ellenkező esetben ugyanis

$$\underline{b}_1 = \gamma_{k+1} \underline{c}_{k+1} + \ldots + \gamma_n \underline{c}_n$$

adódna, amiből $\underline{c}_{k+1}, \ldots, \underline{c}_n \in W$ miatt $\underline{b}_1 \in W$ is következne, ellentmondásban B lineáris függetlenségével. Tudjuk tehát, hogy $\gamma_j \neq 0$ valamely j-re , ahol

$1 \leq j \leq k$. Állítjuk, hogy $\underline{c}_j$ megfelel a feladat állításának. Először megmutatjuk, hogy $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ bázis V-ben. $\underline{c}_j \notin W$-ből az újonnan érkező vektor lemmája miatt adódik, hogy $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ lineárisan független rendszer. Ha $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ nem volna generátorrendszer, akkor létezne egy, az elemeiből lineáris kombinációval ki nem fejezhető $\underline{w}$ vektor. Ekkor azonban, ismét csak az újonnan érkező vektor lemmája miatt $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j, \underline{w}\}$ is lineárisan független volna, ami ellentmond annak, hogy V-ben van n elemű generátorrendszer (bármelyik bázis). Így tehát $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ valóban bázis. Most megmutatjuk, hogy $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ is bázis V-ben. $\underline{b}_1$ biztosan nem fejezhető ki $C \setminus \{\underline{c}_j\}$ elemeiből lineáris kombinációval, mert a $\underline{b}_1$ egyetlen, C elemeiből való kifejezésében a $\underline{c}_j$ együtthatója (nevezetesen γ_j) nem nulla, így $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ független az újonnan érkező vektor lemmája miatt. Ha $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ nem volna generátorrendszer, akkor – a fentiekkel analóg módon – hozzávehető volna egy további vektor a lineáris függetlenség megtartásával, ellentmondásban azzal, hogy V-ben van n elemű generátorrendszer. Így tehát $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ is bázis, ezzel az állítást beláttuk.

43. Eredmény: $x = \frac{11}{2} - \frac{13}{2}p$, $y = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}p$, $z = p$, minden $p \in \mathbb{R}$ esetén.

44. Eredmény: $t = 1$ esetén nincs megoldás, $t \neq 1$ esetén $x = 2 - \frac{10}{t-1}$, $y = 1$, $z = \frac{10}{t-1}$.

45. Eredmény: $x = 33 - 4c$, $y = -12 + 2c$, $z = -2$.

46. Eredmény: $c = 4$ esetén $x = 7 - 12p$, $y = -2 + 5p$, $z = p$, minden $p \in \mathbb{R}$-re, $c \neq 4$ esetén $x = 7$, $y = -2$, $z = 0$.

47. Eredmény: $p = \frac{1}{4}$ esetén nincs közös pont, egyébként pedig pontosan egy közös pont lesz.

48. Ismert, hogy n egyenletből álló, n ismeretlenes rendszernek (most épp $n = 3$) akkor és csak akkor van pontosan egy megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa nem 0, vagyis s értéke indifferens. A kérdéses determinánst Gauss-eliminációval (vagy máshogy) meghatározva $12t + 2$ adódik, tehát pontosan akkor lesz egy megoldás, ha $t \neq -\frac{1}{6}$.

Megjegyzés. Persze meg lehet oldani az egyenletrendszert Gauss-eliminációval és így kideríteni a fentieket, de ez lényegesen tovább tart.

49. Valós együtthatós egyenletrendszernek nem lehet pontosan három megoldása, hiszen a tanultak szerint a megoldások száma 0, 1 vagy végtelen sok, aszerint, hogy keletkezik-e a Gauss-elimináció során tilos sor, illetve lesz-e a lépcsős alakban olyan oszlop, ami nem tartalmaz vezéregyest. A válasz tehát az, hogy a feltétel semmilyen a és b érték mellett sem teljesül. Ez a következtetés persze levonható a Gauss-eliminációt követően is, de ez lényegesen tovább tart.

50. Eredmény: egy megoldás $t \neq -\frac{2}{3}$ esetén lesz, kettő pedig természetesen soha.

51. Eredmény: mindig pontosan egy megoldás lesz (és így persze mindig legalább egy is lesz).

Megjegyzés. Felmerülhet a kérdés, hogy miért nem függ a megoldások száma t-től. Ha a baloldalon négyzetes mátrix van, akkor a megoldások száma a mátrix determinánsától, illetve (ha a determináns 0) a jobboldaltól függ. Ha a t-hez tartozó előjeles aldetermináns értéke 0, akkor a determináns értéke, és így a megoldások száma független t-től.

52. Gauss-eliminációval az egyenletrendszer az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & c-3 & c & c-3 \end{array}\right)$$

alakra hozható. Ha $c \neq 3$, akkor a harmadik sort $(c-3)$-mal osztva és a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{c}{c-3}-8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4-\frac{c}{c-3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{c-3} & 1 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk, ahonnan a megoldás: $x = (8 - \frac{c}{c-3})p$, $y = 1 + (\frac{c}{c-3} - 4)p$, $z = 1 - \frac{c}{c-3}p$, $w = p$, ahol p tetszőleges valós szám.
Ha $c = 3$, akkor az alsó sorban jobbra lépve majd $c = 3$-mal osztva és a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk, ahonnan a megoldás: $x = p-1$, $y = 2-p$, $z = p$, $w = 0$, ahol p tetszőleges valós szám.

53. Gauss-eliminációval az egyenletrendszer az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4-c & -2 & 4-c \\ 0 & 0 & -c & c-4 & -c \end{array}\right)$$

alakra hozható. Ha $c \neq 0$, akkor a harmadik sort c-vel osztva és a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & c+\frac{8}{c}-4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c-\frac{16}{c}+6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{c}-1 & 1 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk, ahonnan a megoldás: $x = (-c - \frac{8}{c} + 4)p$, $y = (c + \frac{16}{c} - 6)p$, $z = 1 - (\frac{4}{c} - 1)p$, $w = p$, ahol p tetszőleges valós szám. Ha $c = 0$, akkor az alsó sorban jobbra lépve majd -4-gyel osztva és a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk, ahonnan a megoldás: $x = 2p - 2$, $y = 4 - 4p$, $z = p$, $w = 0$, ahol p tetszőleges valós szám.

54. A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 11 & 0 & 12 & -3 & 11 \\ 4 & 9 & 26 & -2 & p & 9 \\ 3 & 13 & 7 & 11 & q & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & -10 & 10 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & -6 & p+16 & -3 \\ 0 & 4 & -8 & 8 & q+12 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+8 & 0 \end{array}\right).$$

Ha $p = -19$ és $q = -8$, akkor az utolsó két sor csupa 0, így ezek elhagyhatók. Ekkor a Gauss-elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk (egyetlen további, vezéregyes fölötti elem kinullázásával:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 11 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_4 = \beta \in \mathbb{R}$, $x_5 = \gamma \in \mathbb{R}$ szabad paraméterek, $x_1 = 7\gamma + 5\beta - 11\alpha$, $x_2 = 1 - \gamma - 2\beta + 2\alpha$.
Ha $p \neq -19$ vagy $q \neq -8$ (vagy mindkettő), akkor az eliminációt folytatva az alábbi alakot kapjuk. Valóban, ha például $p \neq -19$, akkor a harmadik sor $(p+19)$-cel osztása, majd a negyedik sorból a harmadik $(q+8)$-szorosának a kivonása és a kapott csupa nulla sor elhagyása után jutunk az alábbi alakhoz (és analóg a helyzet a $q \neq -8$ esetben is).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Innen a vezéregyesek fölötti nemnulla elemek (3 darab) kinullázásával kapjuk a redukált lépcsős alakot:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 11 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ekkor is végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_4 = \beta \in \mathbb{R}$, $x_1 = 5\beta - 11\alpha$, $x_2 = 1 + 2\alpha - 2\beta$, $x_5 = 0$.

56. A determináns értékét Gauss-eliminációval határozzuk meg:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & 10 & 9 & 15 \\ 4 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \cdot 3 = -18.$$

57. Eredmény: 17.

58. A kérdéses mátrix épp a BA mátrix inverze (hiszen $(A^{-1}B^{-1})(BA) = (A^{-1}(B^{-1}B))A = (A^{-1}I)A = A^{-1}A = I$.) A BA szorzatra $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ adódik, ennek inverzét Gauss-eliminációval kiszámítva az eredmény $\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Megjegyzés. Persze az inverzeket külön-külön is ki lehet számítani, majd összeszorozni, de ez valamivel tovább tart és több (számolási) hibalehetőséget rejt magában.

59. Ismert, hogy az $\overrightarrow{OA}(0;1;-2)$, $\overrightarrow{OB}(1;1;5)$, $\overrightarrow{OC}(1;3;-1)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata az alábbi determináns értékének abszolút értéke:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Gauss-eliminációval számolva a következőket kapjuk:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

Így a paralelepipedon térfogata 2.

60. A mátrixszorzás definíciója szerint az A^2 mátrix bal felső sarkában álló 50×50-es részmátrixának minden eleme $50 \cdot \big(6 \cdot 6 + (-4) \cdot 9\big) = 0$. Hasonlóan, az A^2 jobb felső, bal alsó, illetve jobb alsó sarkában álló 50×50-es részmátrixának minden eleme is $50 \cdot \big(6 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-6)\big) = 0$, $50 \cdot \big(9 \cdot 6 + (-6) \cdot 9\big) = 0$, illetve $50 \cdot \big(9 \cdot (-4) + (-6) \cdot (-6)\big) = 0$. Így tehát $A^2 = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{0}$ a 100×100-as nullmátrixot jelöli (amelynek minden eleme 0). Mivel a $\mathbf{0}$-val végzett szorzás mindig a $\mathbf{0}$-t adja eredményül, $A^{1000} = \mathbf{0}$.

61. a) A feladatbeli két mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix i. sora $\begin{pmatrix} i+1 & i+2 & 6-i & 5-i \end{pmatrix}$, a B mátrix j. oszlopa $\begin{pmatrix} j & 1-j & j & 1-j \end{pmatrix}^T$ minden $1 \le i, j \le 4$ esetén. Így az $A \cdot B$ mátrix i. sorának és j. oszlopának kereszteződésében álló elem: $(i+1)j + (i+2)(1-j) + (6-i)j + (5-i)(1-j) = ij + j + i + 2 - ij - 2j + 6j - ij + 5 - i - 5j + ij = 7$. A 4×4-es $A \cdot B$ mátrixnak tehát minden eleme 7.

b) $\det(A \cdot B) = 0$, hiszen $A \cdot B$ minden eleme (így minden sora) egyenlő. A determinánsok szorzástétele miatt $\det(B \cdot A) = \det(A \cdot B)$ (mindkét oldal $\det A \cdot \det B$-vel egyenlő), ezért $\det(B \cdot A) = 0$. Természetesen hivatkozhatunk arra is, hogy $\det B = 0$ (mert B-nek vannak azonos sorai), ebből is következik a determinánsok szorzástétele szerint $\det(B \cdot A) = 0$. Sőt, a szorzástétel nélkül is könnyen megoldható a feladat: B első és harmadik sorának egyenlőségéből ugyanez következik $B \cdot A$-ra is, ahonnan $\det(B \cdot A) = 0$.

62. a) Az állítás igaz. Ugyanis $A^k = E$ miatt $\det(A^k) = 1$ adódik (mert $\det E = 1$). A determinánsok szorzástételéből következik, hogy $\det(A^k) = (\det A)^k$, így $(\det A)^k = 1$, amiből $\det A = \pm 1$ valóban igaz.

b) Az állítás hamis; ennek igazolására mutatunk egy ellenpéldát. Legyen például $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ekkor $\det A = 0{,}5 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 1$, de a mátrixszorzás definíciójából azonnal adódik, hogy $A^k = \begin{pmatrix} 0{,}5^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$ minden $k \ge 1$ egészre, vagyis $A^k = E$ semmilyen k-ra nem teljesül.

63. Ha lenne ilyen A mátrix, akkor a determinánsok szorzástétele szerint

$$(\det A)^{100} = \det A^{100} = \det \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = -18,$$

ami lehetetlen, hiszen $\det A$ valós, így a 100. hatványa nem lehet negatív.

64. Ha lenne ilyen A mátrix, akkor a determinánsok szorzástétele szerint

$$(\det A^{50})^2 = \det A^{100} = \det \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} = 3,$$

ahonnan $\det A^{50}$ vagy $\sqrt{3}$ vagy $-\sqrt{3}$. Ez azonban nem lehetséges, mivel $\det A$ racionális (hiszen A minden eleme racionális), így $\det A^{50} = (\det A)^{50}$ is racionális, $\sqrt{3}$ és $-\sqrt{3}$ azonban nem.

65. A^{-1}-et Gauss-eliminációval számolva:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Így A^{-1} létezik és azonos a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrixszal.

66. Eredmény:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

67. A determináns idevágó tulajdonsága alapján $\det A' = \lambda \det A$, ugyanezen alaptulajdonság és a mátrixok skalárral szorzásának definíciója szerint $\det(\lambda A) = \lambda^9 \det A$. Mivel $\det A \neq 0$, ebből $\lambda = \lambda^9$ következik. $\lambda^9 - \lambda = \lambda(\lambda^8 - 1)$, így a megoldások 0,1 és -1.

69. Eredmény: 0.

70. Ha nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a harmadik sorból csak a 4-et választhatjuk; így az ötödik sorból a 8-at már nem, csak az 5-öt választhatjuk (mert a negyedik oszlopból már vettünk elemet); hasonlóan folytatva, az első sorból csak a 2-t, ezért a másodikból csak az 1-et, végül a negyedikből csak a 3-at választhatjuk. Így egyetlen nemnulla szorzat keletkezik: $2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5$. Ehhez az egyetlen nemnulla szorzathoz tartozó permutáció az 5,2,4,3,1 (hiszen az első sorból az ötödik elemet vettük, a másodikból a másodikat, stb). Ennek a permutációnak az inverziószáma 8 (hiszen 8 inverzióban álló pár van: $(5,2)$, $(5,4)$, $(5,3)$,

$(5,1)$, $(2,1)$, $(4,3)$, $(4,1)$, $(3,1)$). Mivel az inverziószám páros, ezért a szorzathoz tartozó előjel: $+$.

71. A definícióban összeadandóként szereplő szorzatok közül nyilván csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem tartalmaznak 0 tényezőt, hiszen a többi szorzat a determináns értékét nem befolyásolja. Egy ilyen szorzatban tehát a harmadik sorból csak a $\sqrt{5}$ választható. Az első sorból 3 vagy 8 választható. Az előbbi esetben az ötödik sorból már csak a 2-est választhatjuk (mert a harmadik oszlopból már vettünk elemet), emiatt a második sorból csak a 2-est, így a negyedikből csak a 4-est választhatjuk. Hasonlóan, ha az első sorból a 8-ast vesszük, akkor a negyedikből már csak a 2-est, a másodikból az 1-est és az ötödikből a 3-ast választhatjuk. Így összesen csak két nemnulla szorzat keletkezik: $3\cdot 2\cdot \sqrt{5}\cdot 4\cdot 2$ és $8\cdot 1\cdot \sqrt{5}\cdot 2\cdot 3$. A determináns értékének kiszámításához már csak az ehhez a két szorzathoz tartozó előjelet kell meghatározni. Az első szorzathoz tartozó permutáció $3,1,4,5,2$ (mert az első sorból a harmadik elemet vettük ki, a másodikból az elsőt, stb). Ennek a permutációnak az inverziószáma 4 (az inverzióban álló elempárok $(3,1)$, $(3,2)$, $(4,2)$ és $(5,2)$). Mivel az inverziószám páros, a szorzat előjele $+$. Hasonlóan, a második szorzathoz tartozó permutáció $5,2,4,1,3$, ennek az inverziószáma 7, az előjel $-$. Amint látható, a két nemnulla szorzat abszolút értékben egyenlő (mindkettő $48\cdot\sqrt{5}$), de az előjelük ellentétes, így a determináns értéke 0.

72. A mátrixszorzás definíciója alapján $\underline{y}$ csak 4 hosszú sorvektor lehet. Az $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ változókat bevezetve, ezekre az alábbi lineáris egyenletrendszer adódik:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 5 & 10 & 25 & 5 & 20 \\ 3 & 8 & 19 & -3 & 16 \\ 2 & 7 & 16 & -7 & t \end{array}\right).$$

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & t-8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-14 \end{array}\right).$$

Ha $t \neq 14$, akkor tilos sort kapunk, így nincs megoldás (és így a keresett $\underline{y}$ sem létezik). Ha viszont $t = 14$, akkor a harmadik sor elhagyható és az elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Így a $t = 14$ esetben végtelen sok megoldás van: $\underline{y} = (-\alpha - 7\beta; 2 - 2\alpha + 3\beta; \alpha; \beta)$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméterek.

73. Első megoldás. A rangfogalmak egyenlősége miatt A determinánsrangja is 3, így A-nak létezik olyan 3×3-as B részmátrixa, melynek a determinánsa nem 0. Bármely olyan részmátrix, amely B-t tartalmazza, pontosan 3 rangú lesz, hiszen a rangja legalább 3, ennél nagyobb viszont nem lehet (hiszen akkor A rangja is nagyobb lenne, mint 3), a válasz tehát igen (sőt, legalább 30 ilyen lesz).

Második megoldás. 3 rangú 4×8-as részmátrixot nem nehéz találni. A-nak van 3 független sora, a többi sor pedig elő kell hogy álljon ezek lineáris kombinációjaként. A maradék 3 sorból tehát bármelyiket hozzávéve a 3 független sorhoz 3 rangú mátrixot kapunk. Ebből kéne most elhagyni 2 oszlopot úgy, hogy a rang ne változzon. Ez sem nehéz: lesz 3 oszlop, ami független, a maradék oszlopok pedig ezeknek lesznek lineáris kombinációi. A maradékból 2 oszlopot elhagyva tehát a rang nem fog változni, így 4×6-os, 3 rangú részmátrixot kapunk.

74. A második sor kétszeresét a harmadik sorból kivonva a

$$\begin{vmatrix} c & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2c-10 \end{vmatrix}$$

determinánst kapjuk, amit a harmadik sor szerint kifejtve $0-(5c-3)+(2c-10)(c-2)=2c^2-19c+23$ adódik. Természetesen számos más módszerrel is megkapható az eredmény.

76. Igaz, az az 5 sorból és 3 oszlopból álló mátrix, amiben az utolsó három sor által alkotott négyzetes részmátrix B inverze, a többi elem pedig 0, jó lesz.

77. Igaz, $A^{-1}B$ jó lesz.

78. A második és a harmadik sort megcseréljük, majd a mátrixot Gauss-elimináljuk a lépcsős alak eléréséig (ezek a lépések a rangon nem változtatnak), a rang a lépcsős alakban szereplő vezéregyesek száma lesz. Az elimináció során az

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-2 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz jutunk. Ha $c=2$, akkor az utolsó sor csupa 0-ból áll és így elhagyható, ekkor a lépcsős alakban a vezéregyesek száma 2, ha $c\neq 2$, akkor (a harmadik sort $(c-2)$-vel osztva) a lépcsős alakban a vezéregyesek száma 3.

A rang természetesen Gauss-elimináció nélkül is kiszámítható, például a független oszlopok maximális számát meghatározva: mivel az első két oszlop független, ez a szám 2 vagy 3 lehet, az előbbi pontosan akkor, ha a három oszlopvektor összefüggő, ami (mivel az első két oszlop független) azzal ekvivalens, hogy a harmadik oszlop az első kettő lineáris kombinációja.

79. A rang kiszámítására a Gauss-eliminációt alkalmazzuk (a feladatbeli mátrix-szal indítva):

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 10 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & -10 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & p-10 & p-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & p & p+4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-p \end{pmatrix}.$$

Ha $p = 4$, akkor az utolsó sor csupa 0 sor, így elhagyható. Ekkor a vezéregyesek száma a kapott lépcsős alakban 3, így a mátrix rangja is ennyi. Ha $p \neq 4$, akkor az utolsó sor $(4-p)$-vel osztása után kapjuk a lépcsős alakot. Ekkor a vezéregyesek száma, és ezzel a mátrix rangja is 4.

80. Eredmény: $x = 1$ esetén a rang 1, $x = -2$ esetén a rang 2, minden más esetben pedig 3.

83. Első megoldás. Az A mátrix determinánsa a harmadik oszlop szerint kifejtve $-1-n$. A determinánsok szorzástétele szerint így $\det A^{-1} = \frac{-1}{n+1}$, ha az A^{-1} mátrix létezik. Ez $n = 0$ és $n = -2$ esetén lehet csak egész és az utóbbi esetben lesz csak pozitív egész. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét Gauss-eliminációval a szokásos módon meghatározva a

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 & -3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk.

Második megoldás. Az A mátrix inverzét Gauss-eliminációval határozzuk meg. Az első fázis végén az egyenletrendszer az

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & n+1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

alakot ölti. Ahhoz, hogy A invertálható legyen, n tehát nem lehet -1. $0 \neq (n+1)$-gyel osztva, majd a Gauss-eliminációt folytatva, inverzként a

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{n+1}-3 & -\frac{6}{n+1}+2 & \frac{3}{n+1} \\ -\frac{2}{n+1}+2 & \frac{4}{n+1}-1 & -\frac{2}{n+1} \\ \frac{1}{n+1} & -\frac{2}{n+1} & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

mátrix adódik. A determináns kiszámításához a harmadik sor kétszeresét a második sorhoz adva, háromszorosát pedig az első sorból levonva a

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & -\frac{2}{n+1} & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk, melynek determinánsa (ami egyenlő A^{-1} determinánsával) a harmadik oszlop szerint kifejtve $-\frac{1}{n+1}$. Ez $n = 0$ és $n = -2$ esetén lehet csak egész és az utóbbi esetben lesz csak pozitív egész. Az inverz mátrix az $n = -2$ behelyettesítéssel:

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 & -3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

84. Jelölje A oszlopait $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{100}$. A feladat állítása nem más, mint hogy minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^{50}$ kifejezhető az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{100}$ vektorokból lineáris kombinációval, vagyis hogy $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{100} \rangle = \mathbb{R}^{50}$. Ismert, hogy $\mathrm{r}(A) = \dim\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{100} \rangle$. Így $\mathrm{r}(A) = \dim \mathbb{R}^{50}$. Mivel $\dim \mathbb{R}^n = n$ bármely pozitív egész n-re, $\mathrm{r}(A) = 50$.

85. A rang a lineárisan független sorok maximális száma, tehát a mátrixnak bármely négy sora lineárisan összefüggő. Ha legfeljebb hat elemet változtatunk meg, akkor lesz (legalább) négy olyan sor, ahol nem változtattunk, ezek tehát továbbra is összefüggők és így természetesen az új mátrix tíz sora is az, ami ellentmondás.

86. Először tegyük fel, hogy $p \neq 0$. Ekkor a harmadik és negyedik sort p-vel, az első sort 3-mal, a másodikat 5-tel osztva lépcsős alakú mátrixot kapunk, amelyben 4 vezéregyes van, így ilyenkor a mátrix rangja 4. Tegyük most fel, hogy $p = 0$. Ekkor a harmadik és negyedik sor csupa 0, elhagyásuk a rangot nem változtatja. A maradék (és így az eredeti) mátrix rangja ekkor 2, mert az első sort ismét 3-mal, a másodikat 5-tel osztva két vezéregyessel bíró lépcsős alakot kapunk. Következésképp a mátrix rangja p semmilyen értékére sem lesz 3.

87. Eredmény: Az a) állítás nem teljesül mindig, a többi igen.

88. A mátrixszorzás mátrixösszeadás feletti disztributivitása miatt $(A-B)\underline{x} = A\underline{x} - B\underline{x} = \underline{0}$, vagyis az $A-B$ mátrix oszlopainak az $\underline{x}$ koordinátáival, mint együtthatókkal vett lineáris kombinációja a nullvektor. Mivel $\underline{x}$ nem minden koordinátája 0, az $A-B$ mátrix oszlopai lineárisan összefüggők, ahonnan a tanultak szerint $\det(A-B) = 0$ következik.

89. Tegyük fel indirekten, hogy A sorai nem függetlenek. Ekkor A rangja legfeljebb 2 lehet, így semelyik 3 oszlopa sem lenne független, más szóval A oszlopai legfeljebb 2 dimenziós teret generálnának. Ismert, hogy az AB mátrix oszlopai előállnak az A oszlopainak lineáris kombinációiként, így AB oszlopai mind benne vannak az A oszlopai által generált térben, így AB-nak legfeljebb 2 független oszlopa lehet, hiszen k dimenziós térben legfeljebb k vektor alkothat független rendszert. Ez ellentmondás, hiszen a 3×3-as egységmátrixnak 3 független oszlopa van.

90. A nullmátrix és az egységmátrix ilyenek, a rang tehát lehet 0 és 2 is. 1 rangú példa (mondjuk) az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix. 2-nél nagyobb (vagy 0-nál kisebb, illetve nem egész) számok természetesen szóba sem jöhetnek.

91. A σ permutációban az utolsó 99 helyen álló számok a σ' permutációban változatlan sorrendben szerepelnek, így a belőlük alkotott párok közül pontosan ugyanazok vannak fordított sorrendben a két permutációban. A $\sigma(1)$ szám viszont az első helyről az utolsóra kerül, így az összes többi számhoz megváltozik a viszonya. Ez 99 darab eggyel csökkenés/növelés, ami összességében páratlan változást jelent.

92. Alulról fölfelé haladva az A minden sorából (az elsőt kivéve) vonjuk ki a fölötte állót; a kapott mátrix legyen A'. A tanultak szerint $\det A' = \det A$. A' első oszlopában a legfelső 1-estől eltekintve minden elem 0. Így például a kifejtési tételből következik, hogy $\det A'$ megegyezik $\det B$-vel, ahol B az A' első sorának és első oszlopának elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix. Megmutatjuk, hogy B-re is fennállnak a feladatban A-ról mondott feltételek. Ebből már a mátrix sorainak és oszlopainak számára vonatkozó teljes indukcióval következni fog a feladat állítása: valóban, egyrészt $n = 1$ esetén nyilván igaz az állítás, másrészt $\det B = \det A$ miatt – ha B-re valóban teljesülnek a feltételek és így alkalmazható rá az indukciós feltevés – $\det A = 1$ is következik. A második oszlopában az elemek fölülről lefelé haladva egyesével növekednek – ez következik az $a_{i,2} = a_{i-1,2} + a_{i,1}$ és az $a_{i,1} = 1$ feltételekből. Így az A'-t előállító lépések valóban csupa 1-est hoznak létre A' második oszlopában és így B első oszlopában is. Válasszunk most ki A-ból 5 elemet, amelyek a következőképpen helyezkednek el egymáshoz képest: $\begin{pmatrix} & q \\ p & z \\ y & x \end{pmatrix}$. Ekkor a feladat feltételéből $z = p + q$ és $x = y + z$ következik. Ezeket egymásból kivonva: $x - z = (y - p) + (z - q)$. Ez az egyenlet pedig valóban mutatja, hogy B-re is fennáll a feladatbeli második feltétel, mert az A' mátrixban x helyén $x - z$, y helyén $y - p$ és z helyén $z - q$ áll.

93. Eredmény: $(-1)^{n-1}(n-1)$.

94. Első megoldás. A $D := C$ választás megfelel a feladat feltételeinek: ha X_1 megoldása volna a $BX = D = C$ egyenletnek, X_2 pedig az $AX = B$-nek, akkor $A(X_2X_1) = (AX_2)X_1 = BX_1 = C$, azaz X_2X_1 megoldása volna $AX = C$-nek, ami lehetetlen.

Második megoldás. Könnyen látható, hogy $\det A = 0$, ellenkező esetben ugyanis létezne az A^{-1} mátrix, így $X = A^{-1}C$ megoldása volna az $AX = C$ egyenletnek (mert $A(A^{-1}C) = (AA^{-1})C = EC = C$). Ebből a determinánsok szorzástétele szerint $\det B = 0$ következik: ha X_0 megoldása az $AX = B$ egyenletnek (ami a feladat szerint megoldható), akkor $\det B = \det(AX_0) = \det A \cdot \det X_0 = 0 \cdot \det X_0 = 0$. $\det B = 0$-ból ugyanígy következik, hogy ha a $BX = D$ egyenlet megoldható, akkor $\det D = 0$. Így valóban van olyan D, amelyre $BX = D$ nem megoldható: minden nemnulla determinánsú D mátrix (például az egységmátrix) megfelel a feltételnek.

Harmadik megoldás. Mivel az AX mátrix oszlopai az A oszlopainak lineáris kombinációi, ha A rangja n, akkor tetszőleges C mellett lesz megoldása az $AX = C$ egyenletnek. Másrészt ha A rangja kisebb, mint n (azaz A oszlopai legfeljebb $n-1$ dimenziós alteret generálnak), akkor lesz olyan C, melyre $AX = C$-nek nem lesz megoldása. Vagyis $AX = C$ akkor és csak akkor lesz bármely C esetén megoldható, ha A rangja n. A feladatban szereplő A mátrix rangja így kisebb, mint n. Mivel $AX = B$ megoldható, létezik X_0 mátrix, melyre $AX_0 = B$, így B rangja is kisebb, mint n (hiszen B oszlopai az A oszlopainak lineáris kombinációi), ahonnan a fentiek szerint a feladat állítása következik.

95. a) Legyen A első oszlopának minden eleme α és jelölje az A^{-1} mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet $c_{i,j}$. Ekkor $\alpha \neq 0$, különben $\det A = 0$ volna és így A-nak nem volna inverze. Mivel $A^{-1} \cdot A = E$ és az E első oszlopának minden eleme a legfelsőt kivéve 0, ezért a mátrixszorzás definíciója szerint $c_{i,1} \cdot \alpha + c_{i,2} \cdot \alpha + \ldots + c_{i,n} \cdot \alpha = 0$ igaz minden $2 \leq i \leq n$ esetén. Ebből α-val való osztás után éppen azt kapjuk, hogy A^{-1} i-edik sorában ($i \geq 2$ esetén) az elemek összege 0, vagyis az állítás igaz.

b) Jelölje most $\underline{z}$ az A^{-1} első oszlopát. Ekkor $A \cdot A^{-1} = E$ miatt $A \cdot \underline{z}$ az egységmátrix első oszlopával egyenlő – jelölje ezt $\underline{e}_1$. Jelölje az A első sorában álló elemek összegét β. Ekkor $\beta \neq 0$, ellenkező esetben az A minden sorában az elemek összege 0, más szóval A oszlopainak az összege a $\underline{0}$ vektor, vagyis A oszlopai lineárisan összefüggők. Ekkor viszont $\det A = 0$ és így A-nak nincs inverze, ami ellentmondás. Legyen $\underline{y}$ az az oszlopvektor, amelynek minden eleme $\frac{1}{\beta}$. Ekkor az $A \cdot \underline{y}$ oszlopvektor i-edik koordinátája (a mátrixszorzás definíciója szerint) az A mátrix i-edik sorában álló elemek összegének $\frac{1}{\beta}$-szorosa, vagyis $A \cdot \underline{y} = \underline{e}_1$. Ezek szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_1$ lineáris egyenletrendszernek megoldása $\underline{x} = \underline{y}$ és $\underline{x} = \underline{z}$ is. Mivel azonban $\det A \neq 0$, ezért az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_1$ lineáris egyenletrendszer megoldása egyértelmű, vagyis $\underline{z} = \underline{y}$. Így $\underline{z}$ minden eleme azonos (épp $\frac{1}{\beta}$), tehát ez az állítás is igaz.

96. Az állítás nem igaz, például $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ esetén AB a (2×2-es) nullmátrix, míg BA rangja 1 lesz.

97. Válasszuk például A-t az egységmátrixnak, B pedig legyen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Jó megoldás (többek közt) az is, ha A a nullmátrix, B pedig $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ahol b tetszőleges, 0-tól különböző szám.

98. Az előző feladat második megoldásában szereplő $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alakú mátrixok jók lesznek, b-nek három, egymástól és a nullától különböző értéket választva.

101. Ha a determináns definíció szerinti kiszámításakor nincs olyan permutáció, melyhez tartozó szorzat minden tényezője egyes, akkor a determináns nyilván 0. Megmutatjuk, hogy ha van ilyen permutáció, akkor pedig a determináns 1 vagy -1. Ekkor ugyanis a 6 egyes közül 5 úgy helyezkedik el, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy van közülük. Ha egy szorzathoz a 6. egyest akarnánk használni, akkor az említett 5 egyes közül tehát kettőt (a 6. egyes sorában és oszlopában lévőket) nem tudunk kiválasztani. Mivel így a szorzat 4 tényezője lehet csak nullától különböző, a szorzat értéke nulla. Ebből kifolyólag ekkor pontosan 1 nemnulla szorzatunk van, a determináns értéke tehát valóban 1 vagy -1.

104. A determináns definíció szerinti kiszámításakor keletkező szorzatoknak 5 tényezője lesz, így minden szorzatban lesz olyan tényező, amelyik páros, hiszen csak 4 páratlan szám szerepel a mátrixban. Ezek szerint az összes szorzat páros lesz, vagyis a determináns (ami ezen szorzatok valamilyen előjelekkel vett összege) is páros, azaz nem lehet 1.

107. Ilyen például a csupa 1-esekből álló mátrix.

108. A válasz nem. Tegyük fel ugyanis indirekten, hogy ilyen mátrix létezik és a determinánsát fejtsük ki aszerint a sor szerint, amelyben az az elem van, melyhez a nem 0 előjeles aldetermináns tartozik. Mivel itt egy kivétellel minden előjeles aldetermináns 0, a nem 0 aldeterminánshoz tartozó elem viszont nem 0, a teljes determináns értéke nem 0. Bármely más sor szerint kifejtve a determinánst azonban 0-t kapnánk (hiszen ezekben a sorokban minden elemhez 0 értékű előjeles aldetermináns tartozik), ami nyilván ellentmondás.

109. Tegyük fel, hogy a mátrix legalább 16 nullát tartalmaz. Ekkor lesz olyan S sora, melyben legalább 4 darab nulla van, ellenkező esetben ugyanis minden sorban csak három nulla lehetne, így összesen csak 15 nulla lehetne a mátrixban.

A determináns definíció szerinti kiszámításakor kapott $5! = 120$ szorzat közül így legfeljebb $4! = 24$ lehet nullától különböző, hiszen az S sorból legfeljebb egy nullától különböző elem választható, ami ellentmond a feladat feltételének, tehát a mátrix valóban legfeljebb 15 nullát tartalmaz.

110. A determinánst bármely (mondjuk az i.) sora szerint kifejtve nem 0 eredményt kapunk, így a felbukkanó előjeles aldeterminánsok közt lesz 0-tól különböző, mondjuk $A_{i,j}$. Ekkor az $a_{i,j}$ elemet meg tudjuk úgy változtatni, hogy a kapott mátrix determinánsa 0 legyen: válasszuk az új $a'_{i,j}$ értéket $a_{i,j} - \frac{\det A}{A_{i,j}}$-nek. Az új determinánst az i. sor szerint kifejtve csak a j. tag változott, ez pedig $\det A$-val lett kevesebb, így az új mátrix determinánsa csakugyan 0.

111. A válasz az, hogy ez nem minden 4 rangú mátrixnál érhető el, megadunk egy olyan M mátrixot, ahol ez tényleg nem lehetséges. Legyen $e_i \in \mathbb{R}^6$ az a vektor, melynek i. koordinátája 1, a többi koordinátája 0. Legyen most az M mátrix i. oszlopa e_i $i = 1,2,3,4$ esetén, legyen az ötödik oszlop $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, a hatodik oszlop pedig a nullvektor. M rangja 4, hiszen van 4 független oszlopa, de 5 már nincs. Könnyen látható továbbá, hogy az első öt oszlop közül bármely négyet választva független rendszert kapunk. Ha M-nek két elemét változtatjuk meg, akkor az első öt oszlop közül legalább háromban nincs változás. Mivel ezek az oszlopok független rendszert alkotnak (hiszen az első öt oszlopból bármely négy független, így bármely három is), a kapott mátrix rangja legalább 3 lesz.

112. Legyen A előjeles aldeterminánsainak értéke d, az i. sorban lévő elemek összege pedig s_i. Ekkor A determinánsát az i. sor szerint kifejtve $\det A = ds_i$ adódik. Ha $d = 0$, akkor $\det A = 0$ és kész vagyunk, ellenkező esetben viszont tetszőleges $1 \leq i, j \leq n$ esetén $s_i = s_j$. Adjuk most hozzá az A mátrixban az utolsó oszlophoz az összes többi oszlopot, legyen az így kapott mátrix B. Látható, hogy B utolsó oszlopában minden elem s_1, B többi eleme pedig azonos A megfelelő helyen álló elemeivel, igaz továbbá (a determináns alaptulajdonságai szerint), hogy $\det B = \det A$. Fejtsük most ki a B mátrixot az utolsó oszlopa szerint. Mivel B első $n-1$ oszlopa azonos A első $n-1$ oszlopával, a kifejtés során adódó előjeles aldeterminánsok azonos értékűek A megfelelő előjeles aldeterminánsaival, így $\det B = ds_1 + ds_1 + \ldots + ds_1 = nds_1$. Eszerint $\det A = ds_1 = nds_1$, vagyis $(n-1)ds_1 = 0$. Mivel $n-1$ nem lehet 0 (hiszen $n \geq 2$), $ds_1 = 0$, amivel az állítást beláttuk.

113. Legyen a_{ij} a mátrix egy tetszőleges eleme és jelöljük A_{ij}-vel a hozzá tartozó előjeles aldeterminánst. Az eredeti és a csere utáni mátrixot is kifejtve az i. sora szerint a determinánsokra olyan összegeket kapunk, amelyek a j. tagot leszámítva azonosak. A j. tag az A mátrixban $a_{ij}A_{ij}$, míg a csere utáni mátrixban 0. Eszerint (mivel a két összeg egyenlő) $a_{ij}A_{ij} = 0$. Beláttuk tehát, hogy bármely elemnek és a hozzá tartozó előjeles aldeterminánsnak a szorzata 0, ahonnan (bármely sor vagy oszlop szerint kifejtve A-t) azonnal következik, hogy $\det A = 0$.

115. Első megoldás.

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x+y \\ 10x+y \end{pmatrix},$$

így a kérdéses leképezés valóban lineáris és a mátrixa $\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$. Mivel a síkról a síkra képez, ezért lineáris transzformáció is.

Második megoldás. Megmutatjuk, hogy teljesül a lineáris leképezéseket karakterizáló két feltétel. Nézzük először a tetszőleges (x,y) és (a,b) vektorok összegét. Ennek képe $(10(x+a)+y+b, 10(x+a)+y+b)$, ami épp a $(10x+y, 10x+y)$ vektor és a $(10a+b, 10a+b)$ vektor összege, ezek pedig az (x,y), illetve (a,b) vektorok képei, vagyis az első feltétel teljesül. Az (x,y) vektor λ-szorosának képe $(10\lambda x+\lambda y, 10\lambda x+\lambda y)$, ami épp $\lambda(10x+y, 10x+y)$, vagyis a második feltétel is teljesül, azaz a leképezés lineáris transzformáció lesz.

116. A képtérben nyilván csak az $x = y$ egyenes pontjai lehetnek, hiszen minden képként előálló vektornak azonosak a koordinátái, ezek viszont mind benne is lesznek a képtérben (hiszen bármilyen x számhoz találunk olyan a-t és b-t, melyekre $10a+b = x$, pl. $a = 0$, $b = x$). A magtérben azok az (a,b) vektorok vannak, melyekre $10a+b = 0$, vagyis a $10x+y$ egyenes pontjai.

117. Legyen az e egyenes egyenlete $\alpha x+\beta y = 0$ és tekintsük azt a leképezést, amely egy (a,b) vektorhoz az $(\alpha a+\beta b, \alpha a+\beta b)$ vektort rendeli. A 115. feladatban látottakkal megegyezően igazolható, hogy ez lineáris transzformáció lesz, melynek magtere a 116. feladatban látottakkal megegyezően éppen az e egyenes.

119. Első megoldás. Tegyük fel, hogy létezik ilyen lineáris transzformáció és legyen $\underline{v}$ egy tetszőleges, nullvektortól különböző vektor a síkon. Ekkor $\underline{v}$ képe $(1;1), (2;2)$ vagy $(3;3)$. A $4\underline{v}$ vektor képe így $(4;4), (8;8)$ vagy $(12;12)$. Mivel ezen vektorok egyike sem lehet semelyik vektor képe sem, ellentmondásra jutottunk, a kérdéses lineáris transzformáció tehát nem létezik.

Második megoldás. Tegyük fel, hogy létezik ilyen lineáris transzformáció, jelöljük $\mathscr{A}$-val. A feltétel szerint $\mathrm{Im}(\mathscr{A})$ legalább 2 és legfeljebb 4 vektorból áll, ami lehetetlen, hiszen $\mathrm{Im}(\mathscr{A})$ altere a síknak, az alterek pedig vagy 1 vagy végtelen sok vektort tartalmaznak, hiszen bármely (nullától különböző) altérbeli vektornak minden számszorosa is benne lesz az altérben.

120. Eredmény: a mátrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

121. Az x tengelyre tükrözésnél az $(x;y)$ vektor képe $(x;-y)$, így a leképezés mátrixa $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. (Az első oszlop az $(1;0)$ képe, a második oszlop a $(0;1)$ képe.) A megadott bázishoz tartozó B mátrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ennek inverze (amit Gauss-eliminációval könnyen megkaphatunk) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. A bázistranszformációról tanultak szerint a transzformáció mátrixa a megadott bázisban tehát $B^{-1}XB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

122. Eredmény:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

123. a) Ha $A^{100} = M$ lenne, akkor a determinánsok szorzástétele szerint $\det M = (\det A)^{100}$ nem lehetne negatív, ami ellentmondás.

b) M az x tengelyre való tükrözés mátrixa, így nem meglepő, hogy $M^{101} = M$, tehát $A = M$ jó lesz. Erre persze másképp is rá lehet jönni.

124. Első megoldás. Az origón átmenő egyenesekre való tükrözések négyzete az identitás transzformáció, így a mátrixaik (amik különböző egyenesek esetén nyilván különbözők) négyzete az egységmátrix. Így ezen mátrixok századik hatványa is az egységmátrix, amivel a feladat állítását beláttuk.

Második megoldás. Legyen a keresett mátrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ekkor $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$. Ahhoz, hogy A^2 az egységmátrix legyen, elég tehát ha (például) $a+d=0$ és $a^2+bc=1$. Ilyen mátrixból nyilván végtelen sok van, ilyenek például az $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ alakú mátrixok. Mivel ezeknek a négyzete az egységmátrix, természetesen a századik hatványuk is az egységmátrix lesz.

125. Legyen $\alpha = \frac{360°}{101}$. A síkon az origó körüli $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, 100\alpha$ szögű forgatások mátrixai mind különbözők és a 101. hatványaik (a lineáris leképezések szorzatáról tanultak szerint) mind az egységmátrixot adják.

126. Legyen $\alpha = 1{,}8°$. A síkon az $\alpha, 3\alpha, 5\alpha, \ldots, 199\alpha$ szögű forgatások mátrixai mind különbözők és a 100. hatványaik (a lineáris leképezések szorzatáról tanultak szerint) mind az egységmátrixot adják.

127. A $\frac{360}{101}$ fokos forgatás mátrixa például ilyen lesz, még akkor is, ha nem a szokásos bázisban írjuk fel. Azt kell még végiggondolni, hogy különböző bázisokban felírva a forgatás mátrixát, kaphatunk-e valóban végtelen sok különböző mátrixot. Legyen A a $\frac{360}{101}$ fokos forgatás mátrixa a szokásos bázisban, $x \neq 0$ tetszőleges valós szám, B_x pedig az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ mátrix. A $\frac{360}{101}$-os forgatás mátrixa az $\{(1;0),(0;x)\}$ bázisban $B_x^{-1}AB_x$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $B_x^{-1}AB_x$ mátrix és a $B_y^{-1}AB_y$ mátrix különbözik, ha $x \neq y$ és az is, hogy $(B_x^{-1}AB_x)^{101}$ minden $x \neq 0$ esetén az egységmátrix, ahonnan a feladat állítása következik.

128. Ha f ilyen lineáris transzformáció lenne, akkor $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = 3$ (dimenziótétel) és $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$ miatt $\dim \mathrm{Ker} f = \frac{3}{2}$ lenne, ami lehetetlen, ilyen transzformáció tehát nem létezik.

131. Nevezzük a lineáris transzformációt $\mathscr{A}$-nak. Először előállítjuk a $(11;6)$ vektort az $(5;3)$ és a $(4;3)$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz megoldjuk a-ra és b-re az $a(5;3)+b(4;3) = (11;6)$ egyenletet. Az egyenletet koordinátánként vizsgálva az

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 11 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk, melyet (Gauss-eliminációval vagy ahogy jólesik) megoldva $a = 3$, $b = -1$ adódik. Így $(11;6) = 3(5;3)-(4;3)$. Innen a lineáris leképezéseket karakterizáló szabályok használatával $\mathscr{A}(11;6) = \mathscr{A}(3(5;3)-(4;3)) = 3\mathscr{A}(5;3)-\mathscr{A}(4;3) = 3(2;3)-(3;2) = (3;7)$.

132. Előállítjuk az $(1;0)$ és a $(0;1)$ vektort az $(5;3)$ és a $(4;3)$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ehhez használhatunk egyenletrendszert, mint az előző feladatban, de gyorsabb megfigyelni, hogy $(1;0) = (5;3)-(4;3)$, és $(0;1) = \frac{1}{3}((5;3)-5(1;0)) = -\frac{4}{3}(5;3)+\frac{5}{3}(4;3)$, ahonnan $\mathscr{A}(1;0) = \mathscr{A}((5;3)-(4;3)) = \mathscr{A}(5;3)-\mathscr{A}(4;3) = (3;2)-(2;1) = (1;1)$ és $\mathscr{A}(0;1) = \mathscr{A}(-\frac{4}{3}(5;3)+\frac{5}{3}(4;3)) = -\frac{4}{3}\mathscr{A}(5;3)+\frac{5}{3}\mathscr{A}(4;3) = (-4;-\frac{8}{3})+(\frac{10}{3};\frac{5}{3}) = (-\frac{2}{3};-1)$. A keresett mátrix így

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

133. Eredmény:

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

134. Mivel $\underline{b}_1 = 1\cdot\underline{b}_1 + 0\cdot\underline{b}_2$ és $\underline{b}_2 = 0\cdot\underline{b}_1 + 1\cdot\underline{b}_2$, ezért $[\underline{b}_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $[\underline{b}_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mivel $\mathscr{A}(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, ezért a tanult tétel szerint $[\mathscr{A}]_B \cdot [\underline{b}_1]_B = [\underline{b}_2]_B$, vagyis $\begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ezért a mátrixszorzás definíciója szerint $1\cdot p + 0\cdot\sqrt{2} = 0$ és $1\cdot q + 0\cdot\sqrt{3} = 1$, vagyis $p = 0$ és $q = 1$.

136. Első megoldás. Legyen a feladatban szereplő mátrix A. Ker($\mathscr{A}$)-ban azok az $(x,y,z)^T$ vektorok lesznek, melyeket A-val balról szorozva a $(0;0;0)^T$ vektort kapjuk. Ebből az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk, melyet (Gauss-eliminációval vagy máshogy) megoldva $x=y=z=0$ adódik. Így Ker($\mathscr{A}$) egyedül a nullvektorból áll. Im($\mathscr{A}$)-ban azok az $(a,b,c)^T$ vektorok lesznek, melyek előállnak úgy, hogy A-val balról szorzunk egy $(x,y,z)^T$ vektort. Ebből az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk, melyet (Gauss-eliminációval vagy máshogy) megoldva $x=a$, $y=b-a$, $z=c-b$ adódik. Rögzített a,b,c értékekhez tehát mindig találtunk alkalmas x,y,z értékeket, így $\mathrm{Im}(\mathscr{A})=\mathbb{R}^3$.

Második megoldás. Ismert, hogy a leképezés mátrixának oszlopai a bázisvektorok képeinek koordinátavektorai, így az $(1;1;1)^T$, $(0;1;1)^T$, $(0;0;1)^T$ vektorok mindhárman benne vannak Im($\mathscr{A}$)-ban. Mivel ezek bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ben és Im($\mathscr{A}$) altere $\mathbb{R}^3$-nek, $\mathrm{Im}(\mathscr{A})=\mathbb{R}^3$. A dimenziótétel szerint $\dim\mathrm{Ker}(\mathscr{A})+\dim\mathrm{Im}(\mathscr{A})=\dim\mathbb{R}^3=3$, így $\dim\mathrm{Ker}(\mathscr{A})=0$, tehát Ker($\mathscr{A}$) egyedül a nullvektorból áll.

137. Ker($\mathscr{A}$) meghatározásához az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & 1 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A $c=0$ esetet érdemes külön vizsgálni, ha ugyanis nem ez a helyzet, akkor a Gauss-elimináció sokkal kellemesebben futtatható az 1. és a 3. sor cseréje után. $c=0$ esetén (mondjuk Gauss-eliminációval) $x=-y=-z$ adódik (ami egy origón átmenő egyenes). Ha c nem 0, akkor az 1. és a 3. sor cseréje után Gauss-eliminációval az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1-c^2 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk. Ennek a megoldása $c=1$ esetén $x=0$, $y=-z$, $c=-1$ esetén $x=0$, $y=z$ (ezek is origón átmenő egyenesek), minden más esetben pedig (amikor tehát c nem 0,1,−1) $x = y = z = 0$. Az utóbbi esetben $\mathrm{Im}(\mathscr{A}) = \mathbb{R}^3$ a dimenziótétel miatt. A többi esetben $\mathrm{Im}(\mathscr{A})$-t a bázisvektorok képei által generált altérként határozzuk meg: $c = 0$ esetén $\mathrm{Im}(\mathscr{A})$ nyilván a $z = 0$ sík, $c = 1$ esetén $\mathrm{Im}(\mathscr{A})$ az $x = y$ sík, $c = -1$ esetén $\mathrm{Im}(\mathscr{A})$ az $x+y = -2z$ sík.

140. Álljon a C a $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n$ vektorokból és legyen ezek közül egy tetszőlegesen választott $\underline{c}_i$. Azt kell megmutatnunk, hogy $[\mathscr{A}(\underline{c}_i)]_C$ (vagyis a $\underline{c}_i$ képének C szerinti koordinátavektora) konstans vektor. Tudjuk, hogy $[\mathscr{A}(\underline{c}_i)]_B = [\mathscr{A}]_B \cdot [\underline{c}_i]_B$. Mivel $[\mathscr{A}]_B$ minden oszlopa konstans, ezért $[\mathscr{A}]_B$ minden sora azonos, így (a mátrixszorzás definíciója miatt) $[\mathscr{A}]_B \cdot [\underline{c}_i]_B$ is konstans vektor lesz; legyen ennek minden eleme γ. A fentiekből tehát $\mathscr{A}(\underline{c}_i) = \gamma \cdot (\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n)$, ahol $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ a B vektorai. Mivel $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n$ és $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n$ egyaránt konstans vektorok, ezért létezik olyan λ szám, melyre

$$\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n = \lambda \cdot (\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n),$$

hiszen $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n$ nem lehet a nullvektor (mert C vektorai lineárisan függetlenek). Ezt a fentibe helyettesítve:

$$\mathscr{A}(\underline{c}_i) = \gamma \cdot \lambda \cdot (\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n).$$

Ez pedig épp azt jelenti, hogy $[\mathscr{A}(\underline{c}_i)]_C$ minden eleme $\gamma \cdot \lambda$, amivel az állítást beláttuk.

141. λ akkor és csak akkor sajátértéke a mátrixnak, ha $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$, azaz ha $(2-\lambda)(4-\lambda) - 1 \cdot 3 = 0$. A kapott $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ másodfokú egyenletet megoldva megkapjuk a sajátértékeket: $\lambda = 1$ és $\lambda = 5$. Egy $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektor definíció szerint akkor lesz a $\lambda = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha $A \cdot \underline{v} = 5 \cdot \underline{v}$ és $\underline{v} \neq 0$ (ahol A a feladatbeli mátrixot jelöli). A mátrixszorzás definíciója szerint ez a $2x + y = 5x$, $3x + 4y = 5y$ egyenletrendszerre vezet. Mindkét egyenletből $y = 3x$ adódik, vagyis sajátvektor lesz minden olyan, a nullvektortól különböző vektor, ami ennek a feltételnek megfelel. Így például 5-höz tartozó sajátvektor a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

142. Eredmény: a sajátértékek az 1 és a 4, az 1 sajátértékhez a $(-2;1)$ vektor (nem nulla) többszörösei, a 4 sajátértékhez az $(1;1)$ vektor (nem nulla) többszörösei tartoznak sajátvektorként.

144. A transzformáció mátrixáról tanultak szerint a keresett mátrix első oszlopa az $(1,0)$ vektor képe, második oszlopa pedig a $(0,1)$ vektor képe lesz. Könnyen látható, hogy az $(1,0)$ képe a $(0,-2)$, a $(0,1)$ képe pedig a $(-2,0)$. Így a keresett mátrix $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. A karakterisztikus polinom ez alapján $\det \begin{pmatrix} -x & -2 \\ -2 & -x \end{pmatrix} =$

x^2-4. A sajátértékek és sajátvektorok ebből a tanult módon megkaphatók, de valójában erre nincs is szükség: mivel (a nagyítás után) egyenesre tükrözünk, a kép és az eredeti vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha az eredeti vektor az egyenesen van vagy merőleges rá. Ez alapján a sajátvektorok az egyenes pontjai (leszámítva az origót), a hozzájuk tartozó sajátérték a 2 (a nagyítás miatt); illetve az $x=y$ egyenes pontjai, a hozzájuk tartozó sajátérték a -2 (szintén a nagyítás miatt).

145. A transzformáció mátrixáról tanultak szerint a keresett mátrix első oszlopa az $(1,0)$ vektor képe, második oszlopa pedig a $(0,1)$ vektor képe lesz. Könnyen látható, hogy az $(1,0)$ pont, a képe, illetve az origó egyenlőszárú derékszögű háromszöget alkot, így az $(1,0)$ képe az $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Hasonlóan kapjuk, hogy a $(0,1)$ képe $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Így a keresett mátrix $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. A karakterisztikus polinom ez alapján $\det\begin{pmatrix} 1/2-x & -1/2 \\ -1/2 & 1/2-x \end{pmatrix} = (\frac{1}{2}-x)^2-\frac{1}{4}$. A sajátértékek és sajátvektorok ebből a tanult módon megkaphatók, de valójában erre most sincs szükség: mivel egyenesre vetítünk merőlegesen, a kép és az eredeti vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha az eredeti vektor az egyenesen van vagy ha a kép a nullvektor (vagyis az origó). Ez alapján a sajátvektorok az egyenes pontjai (leszámítva az origót), a hozzájuk tartozó sajátérték az 1; illetve az $x=y$ egyenes pontjai (leszámítva az origót), a hozzájuk tartozó sajátérték a 0.

146. Első megoldás. Jelöljük e-vel az $x+7y=0$ egyenest. Határozzuk meg először egy tetszőleges (a,b) vektor képét. Az (a,b)-n átmenő és az e-re merőleges egyenes, illetve e metszeteként előálló pontot fogjuk megkeresni, ami épp a kérdéses kép lesz. e irányvektora (például) a $(7,-1)$, így ez a rá merőleges egyeneseknek normálvektora lesz, ez alapján a keresett merőleges egyenes egy egyenlete (síkon vagyunk, ezért az egyenesnek egyenlete, nem pedig egyenletrendszere lesz) $7\cdot(x-a)+(-1)\cdot(y-b)=0$. A két egyenes (x,y) metszéspontjának meghatározásához tehát az ebből az egyenletből és az e egyenes egyenletéből álló rendszert kell megoldanunk. Ez nem okoz nehézséget, a megoldás $x=\frac{49a-7b}{50}$, $y=\frac{b-7a}{50}$, a keresett metszéspont így $(\frac{49a-7b}{50},\frac{b-7a}{50})$, ez lesz tehát (a,b) képe. A transzformáció mátrixáról tanultak szerint a keresett mátrix első oszlopa az $(1,0)$ vektor képe, második oszlopa pedig a $(0,1)$ vektor képe lesz, így a mátrix $\begin{pmatrix} \frac{49}{50} & -\frac{7}{50} \\ -\frac{7}{50} & \frac{1}{50} \end{pmatrix}$. A karakterisztikus polinom innen $\det\begin{pmatrix} \frac{49}{50}-x & -\frac{7}{50} \\ -\frac{7}{50} & \frac{1}{50}-x \end{pmatrix} = x^2-x$. A sajátértékek és sajátvektorok ebből a tanult módon megkaphatók, de valójában erre most sincs szükség: mivel most is egyenesre vetítünk merőlegesen, a kép és az eredeti vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha az eredeti vektor az egyenesen van vagy ha a kép a nullvektor (vagyis az origó). Ez alapján a sajátvektorok az e egyenes pontjai

(leszámítva az origót), a hozzájuk tartozó sajátérték az 1; illetve az e-re merőleges és origón átmenő $7x = y$ egyenes pontjai (leszámítva az origót), a hozzájuk tartozó sajátérték a 0.
Második megoldás. Már láttuk, hogy a sajátértékek és sajátvektorok felírásához nincs szükség a mátrixra és így számolásra sem. Valójában a mátrix is kiszámítható a fentinél (talán) gyorsabban: ha a szokásos helyett a $\{(7,-1),(1,7)\}$ bázisban írjuk fel a transzformáció mátrixát. A $(7,-1)$ képe saját maga, az $(1,7)$ képe az origó, így ebben a bázisban a mátrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Innen a szokásos bázisban vett A mátrix bázistranszformációval kapható meg: $M = B^{-1}AB$, ahol B a $\{(7,-1),(1,7)\}$ bázishoz tartozó $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ mátrix. A B mátrix inverze sorcsere és Gauss-elimináció után $\begin{pmatrix} \frac{7}{50} & -\frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} & \frac{7}{50} \end{pmatrix}$, ahonnan $A = BMB^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{49}{50} & -\frac{7}{50} \\ -\frac{7}{50} & \frac{1}{50} \end{pmatrix}$.

147. Eredmény: A keresett mátrix $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, a karakterisztikus polinom $(2-x)(x^2+4)$, sajátérték csak a 2, a sajátvektorok a z tengely vektorai (az origót leszámítva).

148. Nevezzük a lineáris transzformációt $\mathscr{A}$-nak. $\mathscr{A}(0;1) = \mathscr{A}(\frac{1}{2} \cdot (0;2)) = \frac{1}{2}(3;4) = (\frac{3}{2};2)$. $\mathscr{A}$ mátrixa tehát $A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. A karakterisztikus polinomja ez alapján

$$\det \begin{pmatrix} 4-x & \frac{3}{2} \\ 2 & 2-x \end{pmatrix} = (4-x)(2-x) - 3.$$

Ennek gyökei 1 és 5, ezek lesznek a mátrix sajátértékei. A sajátvektorok meghatározásához megoldjuk a $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert és a $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert. Az első esetben a $2x+y=0$ egyenesen lévő, origótól különböző vektorok adódnak sajátvektorként, ezek tartoznak az 1 sajátértékhez, a második esetben pedig a $2x-3y=0$ egyenesen lévő, origótól különböző vektorok, ezek tartoznak az 5 sajátértékhez.

149. A leképezés lineáris, tehát az $(1;0) = (2;1)-(1;1)$ vektorhoz az $(1;8) - (-1;7) = (2;1)$ vektort rendeli, a $(0;1) = (1;1)-(1;0)$ vektorhoz pedig a $(-1;7)-(2;1) = (-3;6)$ vektort. A leképezés mátrixa tehát

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

A karakterisztikus polinom ez alapján

$$\det\begin{pmatrix} 2-x & -3 \\ 1 & 6-x \end{pmatrix} = (2-x)(6-x)+3.$$

Ennek gyökei 3 és 5, ezek lesznek a mátrix sajátértékei. A sajátvektorok meghatározásához megoldjuk a

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert és a

$$\left(\begin{array}{rr|r} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert. Az első esetben az $x+3y=0$ egyenesen lévő, origótól különböző vektorok adódnak sajátvektorként, ezek tartoznak a 3 sajátértékhez, a második esetben pedig az $x+y=0$ egyenesen lévő, origótól különböző vektorok, ezek tartoznak az 5 sajátértékhez.

150. a) Tudjuk, hogy $\lambda=7$ pontosan akkor sajátérték, ha $\det(A-7I)=0$. Mivel $A-7I$ negyedik oszlopa a feladat szerint csupa nulla, ezért $\det(A-7I)=0$ teljesül, így $\lambda=7$ valóban sajátérték.

b) Mivel $\lambda=7$-ről tudjuk, hogy sajátérték, ezért kereshetünk ehhez tartozó $\underline{v}$ sajátvektort. Vagyis olyan $\underline{v}$-t keresünk, amelyre $\underline{v}\neq\underline{0}$ és $A\cdot\underline{v}=7\cdot\underline{v}$. Legyen $\underline{v}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$. Ekkor $A\cdot\underline{v}$ nem más, mint az A negyedik oszlopa, vagyis $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}^T$. Ezért $A\cdot\underline{v}=7\cdot\underline{v}$ teljesül, így $\underline{v}$ sajátvektor.

Megjegyzés.A b) feladat megoldásából az a) feladat állítása is következik: mivel a talált $\underline{v}\neq\underline{0}$ vektorra $A\cdot\underline{v}=7\cdot\underline{v}$ teljesül, ezért $\lambda=7$ definíció szerint sajátértéke A-nak.

151. a) Ismert, hogy $\lambda=3$ akkor és csak akkor sajátértéke A-nak, ha $A-3I$ determinánsa 0, azaz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 5 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ezt (például) az első sor szerinti kifejtéssel kiszámolva:
$1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + p\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 + p\cdot 1 = p+1$. Ezekből tehát $p+1=0$, vagyis $p=-1$.

b) Tudjuk, hogy $\lambda=3$ sajátérték, tehát kereshetünk egy ehhez tartozó sajátvektort. Vagyis olyan $\underline{v}\in\mathbb{R}^3$ vektort keresünk, melyre $A\cdot\underline{v}=3\cdot\underline{v}$. Legyen $\underline{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ekkor a mátrixszorzás definíciója szerint (és a $p = -1$ értéket figyelembe véve) a $4x - z = 3x$, $5x + 7y + 7z = 3y$, $x + y + 5z = 3z$ feltételek adódnak. Az első egyenletből $z = x$, ezt a másik két egyenletbe helyettesítve rendezés után mindkét esetben az $y = -3x$ egyenletet kapjuk. Így sajátvektor lesz a $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \\ x \end{pmatrix}$ vektor minden $x \neq 0$ értékre.

Megjegyzés. A fenti megoldásban csak a $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat határoztuk meg. További (kellemetlen, de nem nehéz) számolással megkapható a mátrix további két sajátértéke is: $\frac{13\pm\sqrt{17}}{2}$. Ezekhez is tartoznak sajátvektorok, így a b) feladatra más megoldások is adhatók, melyek meghatározása persze sokkal körülményesebb.

152. Megoldás: nem. (A sajátértékek a 3 és az 5.)

153. Az a) állítás nem igaz, ellenpélda (mondjuk) a síkon vett 60 fokos forgatás mátrixa. Ehhez nem tartozik sajátvektor, a köbe viszont a 180 fokos forgatás (vagyis a -1-gyel szorzás) mátrixa, aminek a nullvektor kivételével minden vektor a sajátvektora. A b) állítást könnyű belátni: ha v sajátvektora A-nak, akkor alkalmas λ-ra $Av = \lambda v$. $A^3v = A^2(\lambda v) = A(\lambda^2 v) = \lambda^3 v$, vagyis v sajátvektora A^3-nek (λ^3 sajátértékkel).

156. Legyenek az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ sajátvektorokhoz tartozó sajátértékek α, illetve β, ekkor $A\underline{u} = \alpha\underline{u}$ és $A\underline{v} = \beta\underline{v}$. Ekkor (a mátrixszorzás összeadás fölötti disztributivitása miatt) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v}$. Az $\underline{u} + \underline{v}$ vektor akkor és csak akkor lesz sajátvektora A-nak, ha $A(\underline{u} + \underline{v}) = \mu(\underline{u} + \underline{v})$ valamely alkalmas μ skalárra. Ha ez teljesülne, akkor $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} = \mu(\underline{u} + \underline{v})$, vagyis $(\alpha - \mu)\underline{u} = (\mu - \beta)\underline{v}$. Mivel $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egyike sem nullvektor, α nem lehet egyenlő μ-vel, hiszen ekkor μ is egyenlő lenne β-val, amiből $\alpha = \beta$ következne. Az egyenlőséget így oszthatjuk $(\alpha - \mu)$-vel és kiderül, hogy az $\underline{u}$ vektor a $\underline{v}$ vektor számszorosa, ami lehetetlen, hiszen ekkor azonos sajátértékhez tartozó sajátvektorok lennének.

158. Legyen a két négyzetszám n és m, kanonikus alakjuk pedig $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, illetve $m = q_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot q_r^{\beta_r}$. Az, hogy négyzetszámok, azt jelenti, hogy minden α_i és β_j páros. A legnagyobb közös osztó a közös prímtényezők azon hatványainak szorzata, ahol a kitevő a két szereplő kitevő minimuma. Mivel minden kitevő páros, e minimumok is azok. A legnagyobb közös osztó tehát szintén párosadik prímhatványok szorzata, azaz négyzetszám.

159. Az a és b egészek bármely közös osztója osztja az $a - kb$ számot is tetszőleges k egész esetén. Ez alapján a keresett lnko osztja a $(3n^2 - 2n + 1) - 3(n^2 - n) = n + 1$ számot. Ezt felhasználva, az előbbihez hasonlóan, az lnko osztja az $(n^2 - n) - (n - 2)(n + 1) = 2$ számot is, ahonnan az lnko vagy 1 vagy 2 (hiszen pozitív kell, hogy legyen). Mivel $n^2 - n$ mindig páros, az lnko pontosan akkor lesz 2, ha $3n^2 - 2n + 1$ páros, azaz ha n páratlan, minden más esetben pedig 1.

160. Jelöljük a és b legnagyobb közös osztóját (a,b)-vel. Ismert, hogy $(a,b) = (a,a-b)$, illetve innen $(a,b) = (a,a-kb)$ tetszőleges k egészre. Így $(n^3+n^2, n^2-n+2) = (n^3+n^2-n(n^2-n+2), n^2-n+2) = (2n^2-2n, n^2-n+2) = (2n^2-2n-2(n^2-n+2), n^2-n+2) = (-4, n^2-n+2)$. A kérdéses lnko tehát osztója -4-nek, azaz 1, 2 vagy 4 lehet. Mivel n^2-n+2 mindig páros, az 1 nem jön szóba, 4 pedig pontosan akkor lesz az lnko, ha n^2-n maradéka 2 lesz 4-gyel osztva, vagyis ha sem n, sem $n-1$ nem osztható 4-gyel (lévén ezek relatív prímek), azaz (mivel n páratlan) ha az n szám $4k+3$ alakú. A keresett lnko tehát 2 a $4k+1$ alakú számokra és 4 a $4k+3$ alakú számokra.
A feladat valamivel egyszerűbben is megoldható, ha észrevesszük, hogy n és $n^2 - n+2$ relatív prímek (mivel n páratlan), és így a keresett lnko n^2-n+2 és $n+1$ lnko-jával lesz azonos.

161. n és $n-1$ relatív prímek, hiszen a különbségük 1, azaz minden közös osztójuk osztja az 1-et is. Így n^3+3n^2+2n és $n-1$ közös osztói mind osztják (n^2+3n+2)-t is a számelmélet alaptétele miatt (hiszen $n^3+3n^2+2n = n(n^2+3n+2)$). n^2+3n+2 és $n-1$ lnko-ja osztja $(n^2+3n+2) - n(n-1) = (4n+2)$-t is, így $(4n+2) - 4(n-1) = 6$-ot is. A legnagyobb közös osztó tehát az 1,2,3,6 számok közül kerül ki. Ha $n \equiv 1 \pmod 6$, akkor $n-1$ és n^2+3n+2 is osztható 6-tal, a keresett lnko tehát 6. Ha $n \equiv 3 \pmod 6$ vagy $n \equiv 5 \pmod 6$, akkor az lnko 2. Ha $n \equiv 4 \pmod 6$, akkor az lnko 3, végül $n \equiv 0 \pmod 6$ vagy $n \equiv 2 \pmod 6$ esetén az lnko nyilván 1.

162. $n+1$ relatív prím $(3n+2)$-vel, hiszen $3(n+1) - (3n+2) = 1$, így $n+1$ és $3n+2$ minden közös osztója osztja az 1-et is. Hasonló gondolatmenettel látható, hogy n és $3n+2$ lnko-ja legfeljebb 2: mivel $3n+2-3n = 2$, így n és $3n+2$ minden közös osztója osztja a 2-t is. Mivel $n^2+n = n(n+1)$, a számelmélet alaptétele miatt n^2+n prímosztói n és $n+1$ prímosztói közül kerülnek ki, így $3n+2$ és n^2+n legnagyobb közös osztója legfeljebb 2 lehet. n^2+n mindig páros, $3n+2$ pedig pontosan akkor, ha n páros, a keresett lnko tehát páratlan n esetén 1, páros n esetén 2.

163. Jelöljük d-vel a kérdéses lnko-t. Ekkor nyilván $d \mid n^2(n^3-n^2+1) = n^5 - n^4 + n^2$, ahonnan $d \mid (n^5-n^4+n^2) - (n^5-n^4-n^2) = 2n^2$. Mivel n^3-n^2+1 páratlan (hiszen n^3 és n^2 azonos paritású), d is páratlan kell hogy legyen, ezért $d \mid n^2$ is teljesül. Így $d \mid (n^3-n^2+1) + n^2 = n^3+1$ és $d \mid n \cdot n^2 = n^3$, ahonnan $d \mid n^3+1-n^3 = 1$, azaz $d = 1$.

164. Legyen d a két szám lnko-ja. Ekkor $d \mid 3n^2-5n-1-3(n^2-2n) = n-1$ és így $d \mid n^2-2n-(n-1)^2 = 1$. Így d (mivel pozitív) csak 1 lehet.

166. Tegyük fel indirekten, hogy a kérdéses lkkt $3a+5b$. Ekkor $a|3a+5b$ (és $b|3a+5b$), ahonnan $a|5b$. Mivel $a|5b$ és $b|5b$, az $5b$ (pozitív) közös többszöröse a-nak és b-nek, ami ellentmondás, hiszen $5b < 3a+5b$ (mivel a pozitív).

168. $n^2 \equiv 1 \pmod p$ a kongruencia definíciója szerint ekvivalens azzal, hogy $p \mid n^2-1$, azaz $p \mid (n-1)(n+1)$. Mivel p prím, ebből következik, hogy $p \mid n-1$ vagy $p \mid n+1$ teljesül, ahonnan a kongruencia definícióját használva a feladat állítása adódik.

170. A feladat a $464x \equiv 8 \pmod{50}$ kongruencia mod 50 megoldásainak meghatározása. 464 és 50 lnko-ja 2, ez osztja 8-at, tehát lesz megoldás, éspedig 2 darab modulo 50. A kongruenciát 2-vel osztva és $225x$-et a bal oldalról elvéve az eredetivel ekvivalens

$$7x \equiv 4 \pmod{25}$$

kongruenciát kapjuk (a modulust osztani kellett 2 és 50 lnko-jával, azaz 2-vel). A jobb oldalról 25-öt elvéve a

$$7x \equiv -21 \pmod{25}$$

kongruencia adódik. Mivel 7 és 25 relatív prímek, 7-tel osztva az eredetivel ekvivalens

$$x \equiv -3 \equiv 22 \pmod{25}$$

kongruenciát nyerjük. Innen a megoldások 22 és $22+25=47$ modulo 50.

171. 93 és 129 lnko-ja 3, ez osztja 9-et, tehát lesz megoldás, éspedig 3 darab modulo 129. A kongruenciát 3-mal osztva az eredetivel ekvivalens

$$31x \equiv 3 \pmod{43}$$

kongruenciát kapjuk (a modulust osztani kellett 3 és 129 lnko-jával, azaz 3-mal). A bal oldalról $43x$-et elvéve

$$-12x \equiv 3 \pmod{43}.$$

Mivel -3 és 43 relatív prímek, -3-mal osztva az eredetivel ekvivalens

$$4x \equiv -1 \pmod{43}$$

kongruenciát kapjuk. A jobb oldalról 43-at elvéve

$$4x \equiv -44 \pmod{43}.$$

Mivel 4 és 43 relatív prímek, 4-gyel osztva az eredetivel ekvivalens

$$x \equiv -11 \pmod{43}$$

kongruencia adódik, ami már a megoldás, hiszen nem volt követelmény az eredmények mod 129 megadása.

172. A $36x \equiv 68 \pmod{82}$ kongruencia megoldásait kell megkeresnünk modulo 82. 36 és 82 lnko-ja 2, ez osztja 68-at, tehát lesz megoldás, éspedig 2 darab modulo 82. A kongruenciát 4-gyel osztva, az eredetivel ekvivalens

$$9x \equiv 17 \pmod{41}$$

kongruenciát kapjuk (a modulust osztani kellett 4 és 82 lnko-jával, azaz 2-vel). Mivel 5 és 41 relatív prímek, mindkét oldalt 5-tel szorozva az eredetivel ekvivalens

$$45x \equiv 85 \pmod{41}$$

kongruenciát kapjuk, ahonnan

$$4x \equiv 44 \pmod{41}$$

adódik. Ezt 4-gyel osztva az eredetivel ekvivalens

$$x \equiv 11 \pmod{41}$$

kongruencia adódik, hiszen 4 és 41 is relatív prímek. Innen a megoldások 11 és $11+41=52$ modulo 82.

173. Legyen a kérdéses szám n, ekkor

$$31n \equiv 10 \pmod{153}.$$

5-tel szorozva:

$$155n \equiv 50 \pmod{153},$$

vagyis

$$2n \equiv 50 \pmod{153}.$$

2-vel osztva:

$$n \equiv 25 \pmod{153},$$

ahol $(2,153)=1$ miatt az osztás a kongruencia modulusát nem változtatta meg. Mivel $(5,153)=1$ miatt az először végzett 5-tel való szorzás is ekvivalens átalakítás, ezért a keresett maradék 25.

174. 98 és 34 lnko-ja 2, ez osztja a 6-ot, így lesz megoldás. Osszuk le a kongruenciát 2-vel, ekkor az eredetivel ekvivalens

$$17x \equiv 3 \pmod{49}$$

kongruenciát kapjuk (a modulust osztani kellett 2 és 98 lnko-jával, azaz 2-vel). Ezt a lineáris kongruenciát Euklideszi algoritmussal oldjuk meg. Tudjuk, hogy $49x \equiv 0 \pmod{49}$. Innen

$$15x = 49x - 2 \cdot 17x \equiv 0 - 2 \cdot 3 = -6 \pmod{49}.$$

Így

$$2x = 17x - 15x \equiv 3 - (-6) = 9 \pmod{49},$$

ahonnan

$$x = 15x - 7 \cdot 2x \equiv -6 - 7 \cdot 9 \pmod{49},$$

azaz $x \equiv -69 \equiv 29 \pmod{49}$.

175. 53 és 89 lnko-ja 1, ez osztja a 3-at, így lesz megoldás. A kongruenciát Euklideszi algoritmussal oldjuk meg. Tudjuk, hogy $89x \equiv 0 \pmod{89}$. Innen

$$36x = 89x - 53x \equiv 0 - 3 = -3 \pmod{89}.$$

Így

$$17x = 53x - 36x \equiv 3 - (-3) = 6 \pmod{89},$$

ahonnan

$$2x = 36x - 2 \cdot 17x \equiv -3 - 2 \cdot 6 = -15 \pmod{89},$$

végül $x = 17x - 8 \cdot 2x \equiv 6 - 8 \cdot (-15) = 126 \equiv 37 \pmod{89}$.

176. A $45n \equiv 21 \pmod{78}$ lineáris kongruencia megoldásaira vagyunk kíváncsiak modulo 130. 45 és 78 lnko-ja 3, ez osztja a 21-et, így lesz megoldás (mégpedig 3 darab modulo 78). A kongruenciát 3-mal osztva az eredetivel ekvivalens

$$15n \equiv 7 \pmod{26}$$

kongruenciát kapjuk, mivel a modulust osztanunk kell 3 és 78 lnko-jával, azaz 3-mal. A jobboldalhoz 26-ot adva

$$15n \equiv 33 \pmod{26}.$$

Ezt oszthatjuk 3-mal, miközben a modulus nem változik, hiszen 3 és 26 relatív prímek:

$$5n \equiv 11 \pmod{26}.$$

A jobboldalból 26-ot elvéve

$$5n \equiv -15 \pmod{26}.$$

Ezt oszthatjuk 5-tel, miközben a modulus nem változik, hiszen 5 és 26 relatív prímek:

$$n \equiv -3 \pmod{26}.$$

Innen n lehetséges maradékai modulo 130: 23, 49, 75, 101, 127.

A $15n \equiv 7 \pmod{26}$ lineáris kongruencia persze másképp is megoldható, pl. a baloldalból $26n$-et elvéve és a jobboldalhoz 26-ot adva $-11n \equiv 33 \pmod{26}$. Ezt oszthatjuk -11-gyel, miközben a modulus nem változik, hiszen -11 és 26 relatív prímek: $n \equiv -3 \pmod{26}$.

177. A $14n \equiv 3 \pmod{51}$ lineáris kongruencia megoldásaira vagyunk kíváncsiak. 14 és 51 lnko-ja 1, ez osztja a 3-at, így lesz megoldás (mégpedig 1 darab modulo 51). Mindkét oldalt 4-gyel szorozva az eredetivel ekvivalens

$$56n \equiv 12 \pmod{51}$$

kongruenciát kapjuk, hiszen 4 és 51 relatív prímek. Innen

$$5n \equiv 12 \pmod{51}.$$

A jobboldalból 102-t elvéve

$$5n \equiv -90 \pmod{51}.$$

Ezt oszthatjuk 5-tel, miközben a modulus nem változik:

$$n \equiv -18 \pmod{51},$$

hiszen 5 és 51 relatív prímek. Innen $51 \mid n+18$, tehát $17 \mid n+18$, azaz

$$n \equiv -18 \equiv 16 \pmod{17}.$$

Mivel n lehet páros és páratlan is, n lehetséges maradékai modulo 34: 16 és 33.

178. 113 és 531 lnko-ja 1, ez osztja a 2-t, így lesz megoldás. A kongruenciát Euklideszi algoritmussal oldjuk meg. Tudjuk, hogy $531x \equiv 0 \pmod{531}$. Innen

$$79x = 531x - 4 \cdot 113x \equiv 0 - 4 \cdot 2 = -8 \pmod{531}.$$

Így

$$34x = 113x - 79x \equiv 2 - (-8) = 10 \pmod{531},$$

ahonnan

$$11x = 79x - 2 \cdot 34x \equiv -8 - 2 \cdot 10 = -28 \pmod{531},$$

végül

$$x = 34x - 3 \cdot 11x \equiv 10 - 3 \cdot (-28) = 94 \pmod{531}.$$

179. A feladat az $n \equiv 10 \pmod{19}$, $n \equiv 15 \pmod{37}$ kongruenciarendszer 2015-nél kisebb pozitív megoldásai számának meghatározása. Az első kongruencia szerint $n = 19k + 10$ alakú valamilyen k egészre. Ezt a második kongruenciába helyettesítve:

$$19k + 10 \equiv 15 \pmod{37}.$$

10-et mindkét oldalból levonva:

$$19k \equiv 5 \pmod{37}.$$

2-vel szorozva (ami ekvivalens átalakítás, hiszen 2 és 37 relatív prímek):

$$38k \equiv 10 \pmod{37},$$

vagyis $k \equiv 10 \pmod{37}$. Így $k = 37\ell + 10$ alakú valamely ℓ egészre. Ezt a fentibe helyettesítve:

$$n = 19k + 10 = 19(37\ell + 10) + 10 = 703\ell + 200.$$

A kongruenciarendszer megoldásai tehát az ilyen alakú (vagyis az $n \equiv 200 \pmod{703}$ kongruenciának eleget tevő) n egészek. Látható, hogy az $\ell = 0, 1, 2$ esetekben kapunk 2015-nél kisebb pozitív megoldásokat (ezek 200, 903 és 1606), így tehát három ilyen szám van.

180. $37n + 218m = 10$ esetén $37n \equiv 10 \pmod{218}$, ha pedig a kongruencia fennáll n-re, akkor nyilván lesz is hozzá megfelelő m szám (hiszen $\frac{10-37n}{218}$ ilyen). Azt kell tehát megkeresnünk, hogy a kongruenciának hány megoldása van 1 és 1000 között. A kongruenciát 6-tal szorozva

$$222n \equiv 60 \pmod{218},$$

vagyis

$$4n \equiv 60 \pmod{218}.$$

Ezt 4-gyel osztva

$$n \equiv 15 \pmod{109},$$

hiszen 218 és 4 legnagyobb közös osztója 2, amivel a modulust el kell osztani. Modulo 218 tehát két megoldást kapunk, melyek 15 és $15 + 109 = 124$. Mivel a 6-tal való szorzás nem ekvivalens átalakítás, az eredményeket vissza kell helyettesíteni az eredeti kongruenciába, hogy kiszűrjük a hamis gyököt: $37 \cdot 15 = 555$, ami nem kongruens 10-zel modulo 218, $37 \cdot 124 = 37 \cdot 4 \cdot 31 = 148 \cdot 31$, ami $-70 \cdot 31$-gyel, azaz -2170-nel kongruens modulo 218, erről pedig (2180-at hozzáadva) látható, hogy csakugyan kongruens 10-zel modulo 218, a megoldás tehát a 124 (mod 218). A két ellenőrzés közül az egyik kiváltható azzal a megállapítással, hogy mivel 37 és 218 relatív prímek, a kongruenciának pontosan egy megoldása lesz modulo 218. Az n számnak tehát $218k+124$ alakúnak kell lennie, ahol k egész. Ahhoz, hogy n 1 és 1000 között legyen, k-nak 0 és $\frac{1000-124}{218}$ közé kell esnie, azaz 5 ilyen egész n lesz.

181. Legyen n prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Tudjuk, hogy $\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \dots (p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r - 1})$. A szorzat tényezői mind pozitív egészek, így egyikük sem lehet nagyobb 2-nél, azaz n-nek nem lehet 3-nál nagyobb prímosztója, a 3 csak az első hatványon szerepelhet, a 2 pedig legfeljebb a második hatványon. Az n szám tehát osztója a 12-nek, a hat osztó közül pedig könnyen látható, hogy a 3, a 4 és a 6 tesznek eleget a feltételnek.

182. Ismert, hogy ha $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, akkor $\varphi(n) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1 - 1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2 - 1}) \dots (p_r^{a_r} - p_r^{a_r - 1})$. Mivel $\varphi(n) = 17$ prím, a fenti szorzat egyik tényezője 17. Ekkor valamely i-re $a_i \geq 1$ és $p_i^{a_i} - p_i^{a_i - 1} = p_i^{a_i - 1}(p_i - 1) = 17$, így $(p_i - 1) | 17$, ahonnan $p_i = 2$ vagy $p_i = 18$. Mivel $2^{a_i - 1}$ nem lehet 17, 18 pedig nem prím, p_i sem 2, sem 18 nem lehet, vagyis a feltételnek megfelelő n szám nem létezik.

183. Legyen n prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Ismert, hogy $\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \dots (p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r - 1})$. A szorzat tényezői mind pozitív egészek, így a szorzatuk csak akkor lehet a p prím, ha egyikük éppen p, a többi pedig 1. $p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1} \geq p_i - 1$, így $p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1} = 1$ csak akkor lehetséges, ha $p_i = 2$ és $\alpha_i = 1$. Ha $p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1} = p$, akkor $\alpha_i \geq 2$ esetén $\alpha_i = 2$, $p_i = p$ és $p_i - 1 = 1$, és n-nek más prímosztója (a korábbiak szerint) nem lehet, azaz $n = 4$. $\alpha_i = 1$ esetén $p_i - 1 = p$, ami csak $p = 2$, $p_i = 3$ esetén lehetséges. Így tehát megoldás még a 3 és a 6, más megoldás pedig (a korábban látottakat is felhasználva) nincs.

184. A φ-függvény képletét a kanonikus alak segítségével felírva látható, hogy n-nek nem lehet olyan p prímosztója, ami 5-nél nagyobb, hiszen ekkor $\varphi(n) \geq p - 1 \geq 6$ lenne. Hasonlóan látható, hogy az 5 és a 3 közül csak az egyik szerepelhet az n kanonikus alakjában és az is legfeljebb az első hatványon, a 2 pedig legfeljebb a harmadik hatványon szerepelhet. Ha az 5 szerepel, akkor a 2 legfeljebb az első hatványon szerepelhet, ha a 3, akkor a 2 pontosan a második hatványon szerepel, ha egyikük sem, akkor 2 a harmadik hatványon szerepel, a megoldások tehát $5, 2 \cdot 5 = 10, 4 \cdot 3 = 12, 8$.

185. Eredmény: a 11 és a 22 a megoldások (és más megoldás nincs).

186. Használjuk a $\varphi(n) = n \cdot \Pi_{i=1}^{k}(1 - 1/p_i)$ formulát, ahol $p_i, (i = 1, \dots, k)$ az n prímtényezői. Eszerint a $\varphi(m)\varphi(n)$ szorzatban a közös p_i prímtényezők $(1 - 1/p_i)^2$ tényezőket eredményeznek, míg $\varphi(mn)$-nek a formula szerinti felírásában e tagok is első hatványon vannak jelen. Tehát $\frac{\varphi(m)\varphi(n)}{\varphi(mn)}$ felírható néhány (esetleg 0) $(1 - 1/p_i)$ tényező szorzataként. Mivel ez sosem nagyobb 1-nél, ezzel az állítást beláttuk. Persze sokkal elegánsabb képlet használata nélkül, csak a definíció alapján belátni az állítást, de ez (most épp) jóval nehezebb is, ld. a 187. feladatot.

188. Mivel $\varphi(n)$ egész, n-nek párosnak kell lennie, ezért a nála kisebb páros számokhoz nem relatív prím, tehát $\varphi(n)$ legfeljebb $\frac{n}{2}$ lehet, így az egyenlőség egyetlen számra sem teljesül.

189. Az n szám pozitív osztói 1 és n közé esnek, de ezek közül azok, amik relatív prímek n-nel, az 1 kivételével nem lehetnek n osztói, így $\mathrm{d}(n) \leq n - \varphi(n) + 1$ és kész is vagyunk.

190. Az n szám pozitív osztói 1 és n közé esnek, de ezek közül azok, amik relatív prímek n-nel, az 1 kivételével nem lehetnek n osztói, így $\mathrm{d}(n) \leq n - \varphi(n) + 1$ és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az n-nél kisebb, n-hez nem relatív prím pozitív számok mind n osztói. Ez prím n esetén igaz, így a pozitív prímszámokra teljesül a feladatbeli egyenlőség. Ha n nem prím, akkor legyen p a legkisebb prímosztója, erre nyilván teljesül, hogy $p \leq \sqrt{n}$. Az n és $n-p$ számok nem relatív prímek, tehát teljesülnie kellene rájuk, hogy $(n-p) \mid n$. Ha $n-p > n/2$, akkor ez lehetetlen, így az egyenlőség ebben az esetben csak akkor teljesülhet, ha $n-p \leq n/2$, azaz $n/2 \leq p \leq \sqrt{n}$, ahonnan $n \leq 4$, tehát már csak a 4-et kell megvizsgálnunk, ez pedig szintén kielégíti az egyenlőséget, így tehát a megoldások a pozitív prímek és a 4.

191. Az n szám pozitív osztói 1 és n közé esnek, de ezek közül azok, amik relatív prímek n-nel, az 1 kivételével nem lehetnek n osztói, így $\mathrm{d}(n) \leq n - \varphi(n) + 1$, azaz $\mathrm{d}(n) + \varphi(n) \leq n + 1$. Mivel $\mathrm{d}(n) \geq 2$,

$$\frac{\mathrm{d}(n)}{2} + \varphi(n) \leq \mathrm{d}(n) + \varphi(n) - 1 \leq n$$

és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $\mathrm{d}(n) = 2$, azaz ha n prím. Ha n prím, akkor $\varphi(n) = n - 1$, így az egyenlőség ilyenkor valóban teljesül, a keresett n egészek tehát a pozitív prímek.

192. Legyen a szám n, a prímtényezős felbontása $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Ekkor n osztóinak száma $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_r+1)$, ennek kell egyenlőnek lennie 100-zal. 100 prímtényezős felbontása $2^2 \cdot 5^2$, így r nem lehet 5 vagy nagyobb, hiszen ha 100 előállna 5 vagy több, 1-nél nagyobb szám szorzataként, akkor lenne a 2-től és az 5-től különböző prímosztója (mivel a 2 és az 5 is legfeljebb a második hatványon szerepelhet a szorzatban). Ezek szerint n-nek legfeljebb 4 különböző prímosztója lehet, azon osztóinak száma, melyek összetettek tehát legalább $100 - 4 - 1$ (az 1 se nem prím, se nem összetett), azaz 95.

193. A definíció szerint $\varphi(n)$ az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma, így a feltétel szerint az n-nél kisebb, n-hez nem relatív prím pozitív egészek száma pontosan 2. Ha n-nek lenne két különböző prímosztója, p és q (feltehető, hogy $p < q$), akkor p és q nem relatív prímek n-hez, sőt $2p$ sem, így a feltétel nem teljesülhet, hiszen ezek a számok mind különbözők és kisebbek n-nél. n tehát prímhatvány, legyen $n = p^\alpha$. Ekkor $n-3 = \varphi(n) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, ahonnan $p^{\alpha-1} = 3$. Innen $p = 3$, $\alpha = 2$, vagyis $n = 9$. Erre valóban teljesül az egyenlőség és a fentiek szerint más ilyen n szám nincs.

194. A definíció szerint $\varphi(n)$ az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma, így a feltétel szerint az n-nél kisebb, n-hez nem relatív prím pozitív egészek száma pontosan 3. Ha n nem prímhatvány, akkor előáll két egynél nagyobb relatív prím szám, a és b szorzataként (feltehető, hogy $a < b$), ekkor a és b nem relatív prímek n-hez, sőt $2a$ sem, így a feltétel csak akkor teljesülhet, ha ezzel felsoroltuk az összes n-nél kisebb, n-hez nem relatív prím pozitív egész számot, hiszen az említett számok csakugyan mind különbözők és kisebbek n-nél. Innen $a \leq 2$ és $b \leq 3$, azaz $n = 6$, mivel a többi 6-nál kisebb számnak nincs két különböző osztója, $\varphi(6)$ pedig valóban $6-4 = 2$. Ha $n = p^\alpha$, a $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha - 4$ egyenlőségből $p^{\alpha-1} = 4$ következik, azaz $n = 8$, ami csakugyan megoldás, hiszen $\varphi(8)$ valóban 8-4=4. A fentiek szerint tehát két számra teljesül az egyenlőség, a 6-ra és a 8-ra.

195. Az utolsó két számjegy meghatározásához a számot mod 100 kell vizsgálnunk. Mivel 107 és 100 relatív prímek (107 helyett persze érdemesebb a vele kongruens 7-tel dolgozni), alkalmazhatjuk az Euler-Fermat-tételt. $\varphi(100) = 40$, így

$$107^{40} \equiv 1 \pmod{100},$$

ezért 123^{145} 40-nel való osztási maradékára vagyunk kíváncsiak. Mivel 123 és 40 relatív prímek, (123 helyett 3-mal is dolgozhatunk), ismét alkalmazhatjuk az Euler-Fermat-tételt. $\varphi(40) = 16$, így

$$123^{16} \equiv 1 \pmod{40},$$

vagyis ezúttal 145 16-tal való osztási maradékára vagyunk kíváncsiak, ami 1. Így

$$123^{145} = 123^{9\cdot 16+1} \equiv 123 \equiv 3 \pmod{40},$$

azaz $123^{145} = 40k+3$ valamely alkalmas k pozitív egészre. Innen pedig

$$107^{123^{145}} = 107^{40k+3} \equiv 107^{40k}107^3 \equiv 107^3 \equiv 7^3 = 343 \equiv 43 \pmod{100}.$$

Az utolsó két számjegy tehát 43.

196. A feladat megoldásához $23^{25^{24}}$ 216-tal vett osztási maradékát kell meghatározni. Mivel 23 és 216 relatív prímek, az Euler-Fermat tétel szerint

$$23^{\varphi(216)} \equiv 1 \mod 216.$$

$216 = 2^3 3^3$, így $\varphi(216) = 4 \cdot 18 = 72$. Most tehát a 25^{24} szám 72-vel vett osztási maradékára vagyunk kíváncsiak. Mivel 25 és 72 is relatív prímek, az Euler-Fermat tétel szerint

$$25^{\varphi(72)} \equiv 1 \mod 72.$$

$72 = 2^3 3^2$, így $\varphi(72) = 4 \cdot 6 = 24$, tehát 25^{24} 72-vel osztva 1 maradékot ad. Így $23^{25^{24}} \equiv 23^{72k+1} \mod 216$ valamely k egészre. Mivel $23^{72k} \equiv 1 \mod 216$, a $23^{25^{24}}$ szám 216-tal vett osztási maradéka 23. 23 a hatos számrendszerben felírva 35, tehát az utolsó három számjegy 035 lesz.

197. Egy szám kettes számrendszerbeli alakjának utolsó öt számjegyét a szám 32-vel vett osztási maradéka határozza meg, így először ezt számoljuk ki. Mivel $43 \equiv 11 \pmod{32}$, elég 11^{98} 32-vel vett osztási maradékát meghatározni. Mivel 11 és 32 relatív prímek, az Euler-Fermat tétel szerint

$$11^{\varphi(32)} \equiv 1 \pmod{32}.$$

$\varphi(32) = 2^5 - 2^4 = 16$, ahonnan

$$11^{98} = 11^{96+2} = 11^{96} 11^2 = (11^{16})^6 11^2 \equiv 11^2 = 121 \pmod{32}.$$

A keresett maradék innen 25, aminek kettes számrendszerbeli alakja 11001, ez lesz tehát 43^{98} kettes számrendszerbeli alakjának utolsó öt számjegye.

198. Mivel 46 és 25 relatív prímek, az Euler-Fermat tétel szerint

$$46^{\varphi(25)} \equiv 1 \pmod{25}.$$

$\varphi(25) = 25 - 5 = 20$, most tehát a 47^{48} szám 20-szal vett osztási maradékára vagyunk kíváncsiak. Mivel 47 és 20 is relatív prímek, az Euler-Fermat tétel szerint

$$47^{\varphi(20)} \equiv 1 \pmod{20}.$$

$20 = 2^2 \cdot 5$, így $\varphi(20) = (4-2) \cdot 4 = 8$, tehát $47^{48} = \left(47^8\right)^6$ 20-szal osztva 1 maradékot ad. Így

$$46^{47^{48}} \equiv 46^{20k+1} \pmod{25}$$

valamely k egészre. Mivel $46^{20k} \equiv 1 \pmod{25}$, a $46^{47^{48}}$ szám 25-tel vett osztási maradéka kongruens 46-tal modulo 25, azaz a keresett maradék 21.

199. Az utolsó négy jegy meghatározásához n 16-os osztási maradékát kell megtalálni. Ha k-val jelöljük n 16-os osztási maradékát, akkor nyilván $k^n \equiv n^n \pmod{16}$. Esetünkben n kettes számrendszerbeli alakjából $k = 11$, tehát 11^n 16-os osztási maradékára vagyunk kíváncsiak. Mivel 11 és 16 relatív prímek, az Euler-Fermat tétel szerint

$$11^{\varphi(16)} \equiv 1 \pmod{16}.$$

$16 = 2^4$, így $\varphi(16) = 8$, tehát az n szám 8-cal vett osztási maradékát kell megkeresni. A kettes számrendszerbeli alak szerint (vagy a 16-os maradékból) ez 3, így

$$11^n \equiv 11^{8m+3} \pmod{16}$$

valamely m egészre. Mivel

$$11^{8m} \equiv 1 \pmod{16},$$

a 11^n szám 16-tal vett osztási maradéka kongruens 11^3-nal modulo 16. $11^2 = 121$ 9 maradékot ad 16-tal osztva, így

$$11^3 \equiv 11 \cdot 9 = 99 \equiv 3 \pmod{16},$$

a keresett maradék tehát 3, az utolsó négy számjegy pedig így 0011.

200. Egy szám négyes számrendszerbeli alakjának utolsó három számjegyét a szám 64-gyel vett osztási maradéka határozza meg, így először ezt számoljuk ki. Mivel 023 a 11 négyes számrendszerbeli alakja,

$$n^{3n+1} \equiv 11^{3n+1} \pmod{64},$$

hiszen n utolsó három számjegye 023. Mivel 11 és 64 relatív prímek, az Euler-Fermat tétel szerint

$$11^{\varphi(64)} \equiv 1 \pmod{64}.$$

$\varphi(64) = 2^6 - 2^5 = 32$, így most $3n+1$ 32-vel vett osztási maradékát kéne meghatároznunk. Mivel $n \equiv 11 \pmod{64}$, így $n \equiv 11 \pmod{32}$ is teljesül, ahonnan

$$3n+1 \equiv 34 \equiv 2 \pmod{32},$$

tehát $3n+1 = 32k+2$ valamely k egészre. Innen

$$11^{3n+1} = 11^{32k+2} = (11^{32})^k 11^2 \equiv 11^2 \equiv 121 \equiv 57 \pmod{64}.$$

A keresett utolsó három számjegy tehát 321 (mivel ez 57 négyes számrendszerbeli alakja).

201. Egy szám hármas számrendszerbeli alakjának utolsó három számjegyét a szám 27-tel vett osztási maradéka határozza meg, így először ezt számoljuk ki. Mivel 202 a 20 hármas számrendszerbeli alakja,

$$n^n \equiv 20^n \pmod{27},$$

hiszen n utolsó három számjegye 202. Mivel 20 és 27 relatív prímek, az Euler-Fermat tétel szerint

$$20^{\varphi(27)} \equiv 1 \pmod{27}.$$

$\varphi(27) = 3^3 - 3^2 = 18$, így most n 18-cal vett osztási maradékát kéne meghatároznunk. Ez a hármas számrendszerbeli alakból könnyen leolvasható: az utolsó két jegy 02, így a 9-cel vett osztási maradék 2, a 18-cal vett maradék tehát 2 vagy 11. Hogy a kettő közül melyik, azt az n paritása dönti el: ha n páros, akkor 2, ha páratlan, akkor 11. Az n hármas számrendszerbeli alakjában páros sok páratlan szám (1-es) fordul elő, így n páros, tehát $n = 18k+2$ valamely k egészre. Innen

$$20^n = 20^{18k+2} = (20^{18})^k 20^2 \equiv 20^2 \equiv (-7)^2 \equiv 22 \pmod{27}.$$

A keresett utolsó három számjegy tehát 211, mivel ez 22 hármas számrendszerbeli alakja.

202. Eredmény: 303.

203. A feladat 125^{125} 49-cel vett osztási maradékának meghatározása és az eredmény felírása hetes számrendszerben. Mivel 125 és 49 relatív prímek (persze 125 helyett lehet 27-tel számolni, hiszen kongruensek modulo 49), az Euler-Fermat tétel szerint

$$125^{\varphi(49)} \equiv 1 \pmod{49}.$$

$\varphi(49) = 42$, így 125^{41} 49-cel való osztási maradékát kéne kiszámolnunk. Legyen

$$x \equiv 125^{41} \pmod{49},$$

ekkor

$$125x \equiv 125^{42} \equiv 1 \pmod{49}.$$

A jobboldalhoz 49-et adva a

$$125x \equiv 50 \pmod{49}$$

kongruenciát kapjuk, ahonnan 25-tel osztás után

$$5x \equiv 2 \pmod{49},$$

hiszen 25 és 49 relatív prímek. A jobboldalhoz 98-at adva most az

$$5x \equiv 100 \pmod{49}$$

kongruenciát kapjuk, ahonnan 5-tel osztás után

$$x \equiv 20 \pmod{49},$$

mivel 5 és 49 relatív prímek. 20 a hetes számrendszerben felírva 26, az utolsó két számjegy tehát (sorrendben) 2 és 6.

204. A baloldal egyes tagjainak maradékát külön-külön kiszámoljuk, majd összeadjuk. 33^{22} osztható 11-gyel, ezért a $2 \cdot 11 = 22$-vel való maradéka csak 0 vagy 11 lehet. Mivel páratlan, nem osztható 22-vel, ez a maradék tehát 11. 3 relatív prím 22-höz, ezért az Euler-Fermat tétel szerint $3^{\varphi(22)} \equiv 1 \pmod{22}$. $\varphi(22) = (2-1)(11-1) = 10$, így

$$3^{22} = 3^{2\varphi(22)} \cdot 3^2 \equiv 9 \pmod{22}.$$

Mivel $3 \equiv 333 \pmod{22}$, $333^{22} \equiv 9 \pmod{22}$. Tehát a kérdéses maradék $11 + 9 + 9 = 29$ maradékával egyenlő, vagyis 7.

205. $n^7 - n = n(n^6 - 1)$, így ha n vagy $n^6 - 1$ osztható 9-cel, akkor $n^7 - n$ is. Így jó lesz minden olyan n egész, mely osztható 9-cel, és jó lesz minden olyan n, ami relatív prím 9-cel (azaz nem osztható 3-mal), hiszen ezekre az Euler-Fermat tétel szerint teljesül, hogy $n^6 \equiv 1 \pmod 9$, mivel $\varphi(9) = 6$. Hátra van azon számok vizsgálata, melyek oszthatók 3-mal, de nem oszthatók 9-cel. Mivel ilyenkor $n^6 - 1$ nem osztható 3-mal, az $n(n^6 - 1) = n^7 - n$ szorzat nem lesz osztható 9-cel. A feltételnek megfelelő n számok tehát pontosan a 3-mal nem osztható számok és a 9-cel osztható számok.

206. Mivel 16 és 5^{73} relatív prímek, használhatjuk az Euler-Fermat tételt:

$$16^{\varphi(5^{73})} \equiv 1 \pmod{5^{73}}.$$

$\varphi(5^{73}) = 5^{73} - 5^{72}$, így

$$16^{5^{73}-5^{72}} \equiv 1 \pmod{5^{73}},$$

azaz

$$16^{5^{73}} \equiv 16^{5^{72}} \pmod{5^{73}}.$$

Mivel $16 = 2^4$ és $5^{73} - 5^{72} = 4 \cdot 5^{72}$,

$$16^{5^{72}} = 2^{4 \cdot 5^{72}} \equiv 2^{\varphi(5^{73})} \pmod{5^{73}}.$$

Ismét az Euler-Fermat tételt alkalmazva (2 és 5^{73} relatív prímek)

$$2^{\varphi(5^{73})} \equiv 1 \pmod{5^{73}}.$$

A kérdéses maradék tehát 1.

207. Egy ilyen n számot könnyű találni: $5^3 - 21 = 125 - 21 = 104 = 2 \cdot 52$, tehát a 3 jó lesz. Mivel 52 és 5 relatív prímek, az Euler-Fermat tétel szerint

$$5^{\varphi(52)} \equiv 1 \pmod{52}.$$

Így tetszőleges k pozitív egészre

$$5^{k\varphi(52)} \equiv 1 \pmod{52}.$$

Mivel $5^3 \equiv 21 \pmod{52}$,

$$5^{k\varphi(52)+3} \equiv 21 \pmod{52},$$

azaz $52 \mid 5^{k\varphi(52)+3} - 21$, amiből az állítás következik.

209. Mivel $2p+1$ prím, ezért $(p-1, 2p+1) = 1$, és $\varphi(2p+1) = 2p$. Így az Euler-Fermat tételt alkalmazva:

$$(p-1)^{2p} \equiv 1 \pmod{2p+1}.$$

Ezt tetszőleges $k \geq 0$ egészre k-adik hatványra emelve, majd $(p-1)$-gyel szorozva:

$$(p-1)^{k\cdot 2p+1} \equiv p-1 \pmod{2p+1}.$$

Ezért a feladat megoldásához elegendő lesz megmutatni, hogy $(p-2)^{p-1} = k \cdot 2p+1$ teljesül valamilyen alkalmas k-ra, vagyis hogy

$$(p-2)^{p-1} \equiv 1 \pmod{2p}.$$

Mivel p prím, ezért $2p$ valódi osztói csak 2 és p, ezek pedig $(p-2)$-nek nyilván nem osztói. Így $(p-2, 2p) = 1$. A φ kiszámítására tanult képletből $\varphi(2p) = (2-1)(p-1) = p-1$ következik, így az Euler-Fermat tételt $(p-2)$-re és $2p$-re alkalmazva éppen a kívánt

$$(p-2)^{p-1} \equiv 1 \pmod{2p}$$

állítást kapjuk, ezzel a feladat állítását bizonyítva.

210. Legyen a prímtényezős felbontása $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Ekkor a osztóinak száma $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_r+1)$, ennek kell egyenlőnek lennie p^2-tel. Mivel p prím, p^2 csak $p \cdot p$ és $p^2 \cdot 1$ alakban áll elő két pozitív egész szorzataként, azaz vagy $r = 1$ és ekkor $\alpha_1 = p^2 - 1$ vagy $r = 2$ és ekkor $\alpha_1 = \alpha_2 = p-1$. Azt kellene tehát belátnunk, hogy $p_1^{p^2-1}$ és $p_1^{p-1} p_2^{p-1}$ is 1 maradékot ad p-vel osztva. Mivel a nem osztható p-vel, sem p_1, sem p_2 nem osztható p-vel, így mindkét esetben alkalmazhatjuk az Euler-Fermat tételt, eszerint

$$p_1^{p^2-1} = (p_1^{p+1})^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

és

$$p_1^{p-1} p_2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

amivel az állítást beláttuk.

Zárthelyi dolgozatok, 2014. ősz

1. zh., 2014. október 20.

1. A p paraméter milyen értékére esnek egy síkba az $A(2;3;3)$, $B(3;4;1)$, $C(4;6;2)$ és $D(p;2;5)$ pontok?

2. Megadható-e $\mathbb{R}^4$-ben négy darab vektor úgy, hogy közülük bármely kettő lineárisan független legyen, de semelyik három ne legyen lineárisan független?

3. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a páros sorszámú és a páratlan sorszámú koordináták összege is 0. Határozzuk meg $\dim W$ értékét és adjunk meg W-ben egy olyan bázist, ami tartalmazza a jobbra látható két vektort. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + p \cdot x_3 + (p^2 + p + 12) \cdot x_4 &= -6 \end{aligned}$$

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

6. Az $(n \times n)$-es A mátrixra teljesül, hogy ha az A mátrix főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adunk (de a többi elemét nem változtatjuk), akkor nulla determinánsú mátrixot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor az A^3 főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adva is nulla determinánsú mátrixot kapunk. (A^3 azt a háromtényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.)

2. zh., 2014. november 27.

1. Pótolhatók-e az alábbi A és B mátrixok hiányzó elemei úgy, hogy $B = A^{-1}$ teljesüljön? (Ha igen, az összes megoldást adjuk meg. A $\square$ jelek nem feltétlen azonos értékeket jelölnek.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \square & -3 \\ -1 & 3 & \square \\ \square & -4 & \square \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \square \\ 3 & \square & \square \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}$$

2. A 6×6-os A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan B és C mátrixok, amelyekre $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(C) = 2$ és $A = B + C$.

3. Legyen $f : \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{10}$ lineáris leképezés, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{20}\}$ bázis $\mathbb{R}^{20}$-ban és $\underline{v} \in \mathbb{R}^{10}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ rögzített vektor. Adjuk meg $\dim \mathrm{Ker} f$ értékét, ha tudjuk, hogy f a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{20}$ vektorok mindegyikéhez $\underline{v}$-t rendeli.

4. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációra és az $\mathbb{R}^3$-beli $B = \{\underline{b}_1 = (1;0;0), \underline{b}_2 = (2;1;0), \underline{b}_3 = (2;2;1)\}$ bázisra teljesül, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2) = \underline{b}_3$ és $f(\underline{b}_3) = \underline{b}_1$. Adjuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat.

5. Sajátértéke-e a 3 az alábbi A mátrixnak? Ha igen, adjuk meg az A egy 3-hoz tartozó sajátvektorát.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Az n pozitív egész számra $43n - 1$ utolsó két számjegye megegyezik $2n + 2$ utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy?

1. pótzh., 2014. december 15.

1. Az e egyenes egyenletrendszere $\frac{2x-3}{4} = \frac{3y+4}{6} = \frac{z}{2}$, az f egyenesé $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{3z-5}{6}$. Párhuzamos-e e és f? Ha igen, akkor határozzuk meg az őket tartalmazó sík egyenletét.

2. Megadható-e $\mathbb{R}^5$-ben öt darab vektor úgy, hogy közülük bármely három által alkotott rendszer lineárisan független legyen, de semelyik négy által alkotott rendszer ne legyen az?

3. Az $\mathbb{R}^4$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyeknek a harmadik koordinátája egyenlő a fölötte álló kettő, a negyedik koordinátája pedig a fölötte álló három koordináta összegével. (Így például a jobbra látható vektor is W-beli.) Határozzuk meg $\dim W$ értékét. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

4. Döntsük el hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 10x_5 &= 5 \\ 5x_1 - 2x_2 + 19x_3 + 14x_4 + x_5 &= 17 \\ 2x_1 + 6x_3 + p \cdot x_4 + (3p-27) \cdot x_5 &= p+2 \end{aligned}$$

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint*. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

6. A 4×5-ös A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem minden $1 \le i \le 4$ és $1 \le j \le 5$ esetén legyen $(-1)^d$, ahol d az $i^{20} + j^{30}$ szám (10-es számrendszerbeli alakjának) első számjegye. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ mátrix főátlójában álló elemek összegét.

2. pótzh., 2014. december 15.

1. A p paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak és ha igen, akkor számítsuk is ki azt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & p \end{pmatrix}$$

2. Igaz-e, hogy minden 4 rangú, 6×6-os mátrixban található két olyan elem, amelyek alkalmas megváltoztatásával elérhető, hogy a kapott mátrix rangja 6 legyen?

3. Legyen $f : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^{10}$-ben megadható 7 lineárisan független vektor úgy, hogy f ezek mindegyikéhez azonos értéket rendel.

b) Igaz-e ez az állítás 7 helyett 8-cal?

4. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint az alábbi mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_2$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_3) = (10; 20; 30)$.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

5. a) Sajátvektora-e az alábbi $\underline{v}$ vektor az alábbi A mátrixnak?

b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét és az összes, ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

6. Egy egész szám 109-cel vett osztási maradéka 5-tel kisebb, mint a szám 18-szorosának a 109-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 109-cel osztva?

Zárthelyi javítókulcsok, 2014. ősz

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. zh., pontozási útmutató, 2014. október 20.

1. A p paraméter milyen értékére esnek egy síkba az $A(2;3;3)$, $B(3;4;1)$, $C(4;6;2)$ és $D(p;2;5)$ pontok?

$*\quad *\quad *\quad *\quad *$

A kérdés megválaszolásához felírjuk az A, B és C által meghatározott S sík egyenletét, majd ebbe D koordinátáit behelyettesítve eldöntjük, hogy $D \in S$ p milyen értékére teljesül. (1 pont)

$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (1;1;-2)$ és $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a} = (2;3;-1)$ (ahol $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorokat jelölik). (2 pont)

Mivel $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ párhuzamosak S-sel (de egymással nem), ezért S-nek normálvektora lesz az $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektor. (1 pont)

Ezt a tanult képlettel meghatározva:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(1 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2))\underline{i} - (1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2))\underline{j} + (1 \cdot 3 - 1 \cdot 2)\underline{k} = (5;-3;1).$$

(2 pont)

A kapott normálvektor és A, B vagy C bármelyikének segítségével S egyenlete már a tanult képlettel felírható: $5x - 3y + z = 4$. (2 pont)

Ebbe D koordinátáit behelyettesítve: $5p - 3 \cdot 2 + 5 = 4$. Így a négy pont akkor és csak akkor esik egy síkba, ha $p = 1$. (2 pont)

Megjegyezzük, hogy a normálvektor meghatározásához nem szükséges a vektoriális szorzat fogalma: kicsit több számolással az $\overrightarrow{AB} \cdot \underline{n} = \underline{0}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \underline{n} = \underline{0}$ összefüggésekből is megkapható egy alkalmas $\underline{n}$.

2. Megadható-e $\mathbb{R}^4$-ben négy darab vektor úgy, hogy közülük bármely kettő lineárisan független legyen, de semelyik három ne legyen lineárisan független?

* * * * *

Igen, megadhatók ilyen vektorok.

Legyen például $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pont)

Ekkor a négy felsorolt vektor közül bármely kettő lineárisan független, hiszen egyik sem skalárszorosa egy másiknak. (3 pont)

Továbbá semelyik három nem lineárisan független. Valóban: válasszunk a felsorolt vektorok közül hármat és töröljük az utolsó két koordinátájukat. A kapott $\mathbb{R}^2$-beli vektorok lineárisan összefüggők, hiszen $\mathbb{R}^2$-ben bármely három vektor lineárisan összefüggő (mert két nem párhuzamos vektorból már a sík bármely vektora kifejezhető). (2 pont)

Így a három $\mathbb{R}^2$-beli vektornak van $\underline{0}$-t adó nemtriviális lineáris kombinációja, de ekkor az eredeti, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok azonos együtthatókkal képzett lineáris kombinációja is nyilván $\underline{0}$-t ad. (3 pont)

Az utolsó 5 pont megszerzéséért érvelhetünk úgy is, hogy a megadott vektorok elemei annak a $W \leq \mathbb{R}^4$ altérnek, amely azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból áll, amelyeknek az utolsó két koordinátája 0. Mivel W-ben generátorrendszert (sőt: bázist) alkot például a standard bázis első két vektora, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt W-ben semelyik három vektor nem lehet lineárisan független. (Természetesen a fent megadott példa csak egy a végtelen sok jó példa közül: bármely négy olyan $\mathbb{R}^4$-beli vektor megfelel, amelyek benne vannak $\mathbb{R}^4$-nek egy 2 dimenziós alterében, de egyikük sem skalárszorosa egy másiknak.)

3. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a páros sorszámú és a páratlan sorszámú koordináták összege is 0. Határozzuk meg $\dim W$ értékét és adjunk meg W-ben egy olyan bázist, ami tartalmazza a jobbra látható két vektort. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. Legyen (például) $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ és $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$. Vegyük ezeknek egy tetszőleges lineáris kombinációját:

$$\alpha\underline{b}_1 + \beta\underline{b}_2 + \gamma\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ -\beta \\ -\alpha-\gamma \end{pmatrix}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha $\alpha\underline{b}_1 + \beta\underline{b}_2 + \gamma\underline{b}_3 = \underline{0}$, akkor ebből $\alpha = \beta = \gamma = 0$ rögtön következik (mert a lineáris kombináció eredményeként kapott vektor első három koordinátája is 0). Így $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ lineárisan független. (2 pont)

Egy tetszőleges $\underline{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in W$ vektorra W definíciója miatt $x_4 = -x_2$ és $x_5 = -x_1 - x_3$ kell teljesüljön, így $\alpha = x_1$, $\beta = x_2$ és $\gamma = x_3$ választással a fenti lineáris kombináció épp $\underline{w}$-t adja. Így $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ generátorrendszer is W-ben. (2 pont)

Megmutattuk, hogy a $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ rendszer lineárisan független és generátorrendszer, így bázis W-ben. Ezért $\dim W = 3$. (1 pont)

A megadott két vektort (jelölje ezeket $\underline{u}$ és $\underline{v}$) tartalmazó W-beli bázis készítéséhez

egy $\underline{w} \notin \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ vektort keresünk. Látható, hogy $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egy tetszőleges $\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}$ lineáris kombinációjaként előálló vektor első két koordinátája $\lambda + 2\mu$, ezért biztosan nem tartozik az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált altérhez például a fenti $\underline{b}_1 \in W$ vektor (mert az első két koordinátája nem egyenlő). (1 pont)
Ekkor az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1$ rendszer lineárisan független (ez következik az újonnan érkező vektor lemmájából, vagy a tetszőleges lineárisan független rendszer bázissá kiegészítésére tanult eljárásból). (1 pont)
Mivel $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1$ a W dimenziójával megegyező méretű lineárisan független rendszer, ezért a tanult tétel értelmében bázis is W-ben. (2 pont)

Második megoldás. Jelölje a két megadott vektort $\underline{u}$ és $\underline{v}$. A tanult eljárást követve egy $\underline{w} \notin \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ vektort keresünk. Látható, hogy $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egy tetszőleges $\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}$ lineáris kombinációjaként előálló vektor első két koordinátája $\lambda + 2\mu$, ezért biztosan nem tartozik az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált altérhez például az első megoldásban megadott $\underline{b}_1 \in W$ vektor (mert az első két koordinátája nem egyenlő). Így az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1$ rendszer lineárisan független (a tanult eljárás működéséből következően). (2 pont)
Folytatva az eljárást, most az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle$ generált alteret kell meghatároznunk. Vegyük ezeknek egy tetszőleges lineáris kombinációját:

$$\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \gamma \\ \alpha + 2\beta \\ -2\alpha + 7\beta \\ -\alpha - 2\beta \\ \alpha - 9\beta - \gamma \end{pmatrix}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Legyen $\underline{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in W$ tetszőleges. A $\underline{w} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle$ állítás azt jelenti, hogy $\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{b}_1 = \underline{w}$ valamilyen α, β, γ skalárokra; más szóval, hogy megoldható az $\alpha + 2\beta + \gamma = x_1$, $\alpha + 2\beta = x_2$, $-2\alpha + 7\beta = x_3$, $-\alpha - 2\beta = x_4$, $\alpha - 9\beta - \gamma = x_5$ lineáris egyenletrendszer (ahol most $x_1, \ldots, x_5$ paraméterek, a változók pedig α, β és γ). (2 pont)
Az első két egyenlet különbségéből $\gamma = x_1 - x_2$, a második és a harmadik egyenletekből $\alpha = \frac{7x_2 - 2x_3}{11}$, $\beta = \frac{2x_2 + x_3}{11}$ adódik. (1 pont)
Ezeket az utolsó két egyenletbe helyettesítve az $x_4 = -x_2$, $x_5 = -x_1 - x_3$ feltételeket kapjuk. Mivel ezek W definíciója szerint minden $\underline{w} \in W$ vektorra fennállnak, ezért $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle = W$. (2 pont)
Tehát $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}_1$ generátorrendszer W-ben és lineárisan független is, így bázis. Ezért $\dim W = 3$. (1 pont)
Megjegyezzük, hogy mindkét megoldás hallgatólagosan épített arra a tényre, hogy a feladatban megadott két vektor lineárisan független. Ez nyilván igaz (hiszen nem

skalárszorosai egymásnak), de mivel a feladat szövegéből implicite következik, hogy létezik ezt a két vektort tartalmazó bázis, ezért ennek a külön kimondására és megindoklására nincs szükség egy teljes értékű megoldáshoz.

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + p \cdot x_3 + (p^2 + p + 12) \cdot x_4 &= -6 \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & -3 & p & p^2+p+12 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & p & p^2+p & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p & p^2+p & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p^2+p & -p \end{array}\right).$$

(Az utolsó lépésben a harmadik sor p-szeresét vontuk ki a negyedikből.) (2 pont)
Ha $p = -1$, akkor az utolsó sor $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Ez „tilos sor”, így ilyenkor az egyenletrendszernek nincs megoldása. (2 pont)
Ha $p = 0$, akkor az utolsó sor csupa 0, így elhagyható. Ekkor a Gauss-elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk (két további, vezéregyes fölötti elem „kinullázásával”):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(1 pont)
Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$ „szabad paraméter”, $x_1 = -3 - 6\alpha$, $x_2 = -1 - 2\alpha$, $x_3 = 1$. (2 pont)
Ha viszont $p \neq -1$ és $p \neq 0$, akkor az utolsó sort $(p^2 + p)$-vel osztva kapjuk a lépcsős alakot, majd ebből (négy vezéregyes fölötti elem „kinullázásával”) a

redukált lépcsős alakot:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{p+1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3+\frac{6}{p+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1+\frac{2}{p+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{p+1} \end{array}\right).$$

(1 pont)

Így a $p \neq -1, 0$ esetben a megoldás egyértelmű: $x_1 = -3 + \frac{6}{p+1}$, $x_2 = -1 + \frac{2}{p+1}$, $x_3 = 1$, $x_4 = \frac{-1}{p+1}$. (2 pont)

A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörők, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A determinánst a Gauss-elimináció determinánsra vonatkozó változatával számítjuk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 2 = 8$$

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Arányos részpontszám jár minden, a determináns kiszámításának irányába mutató, hasznos lépésért. A kifejtési tétel puszta alkalmazása (egyéb átalakítások nélkül) legföljebb 2 pontot érhet, mert egyedül ezzel a determináns meghatározása nem válik könnyebbé az eredeti feladatnál.

6. Az $(n\times n)$-es A mátrixra teljesül, hogy ha az A mátrix főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adunk (de a többi elemét nem változtatjuk), akkor nulla determinánsú mátrixot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor az A^3 főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adva is nulla determinánsú mátrixot kapunk. (A^3 azt a háromtényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.)

* * * * *

A feladatbeli feltétel azt mondja, hogy $\det(A+E)=0$ (ahol E az $n\times n$-es egységmátrixot jelöli). Ebből pedig azt kell megmutatni, hogy $\det(A^3+E)=0$. (2 pont)
A számokra vonatkozó $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ azonosság mintájára az $n\times n$-es mátrixokra is igaz az $A^3+E=(A+E)(A^2-A+E)$ azonosság. Ezt a számokra vonatkozó változattal analóg módon lehet belátni, kihasználva a mátrixokra vonatkozó tanult műveleti tulajdonságokat:

$(A+E)(A^2-A+E)=A\cdot(A^2-A+E)+E(A^2-A+E)=A^3-A^2+A+A^2-A+E=A^3+E$ (4 pont)

Alkalmazva erre a determinánsok szorzástételét:

$$\det(A^3+E)=\det(A+E)\cdot\det(A^2-A+E).$$

(3 pont)

Így $\det(A+E)=0$-ból $\det(A^3+E)=0$ valóban következik. (1 pont)

Megjegyzés. A feladatbeli feltétel azzal ekvivalens, hogy a -1 sajátértéke A-nak, ahonnan egy egyszerűbb és rövidebb megoldás már könnyen adódik, a sajátérték fogalma azonban az első zárthelyi írásakor még nem állt a hallgatók rendelkezésére.

2. zh., pontozási útmutató, 2014. november 27.

1. Pótolhatók-e az alábbi A és B mátrixok hiányzó elemei úgy, hogy $B = A^{-1}$ teljesüljön? (Ha igen, az összes megoldást adjuk meg. A $\square$ jelek nem feltétlen azonos értékeket jelölnek.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \square & -3 \\ -1 & 3 & \square \\ \square & -4 & \square \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \square \\ 3 & \square & \square \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Jelölje C az $A \cdot B$ szorzatmátrixot és $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, illetve $c_{i,j}$ a megfelelő mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet.
Mivel $B = A^{-1}$ miatt $A \cdot B = E$, ezért $c_{2,2} = 1$. Így $-1 \cdot 2 + 3 \cdot b_{2,2} + a_{2,3} \cdot 0 = 1$ adódik a mátrixszorzás definíciójából, amiből $b_{2,2} = 1$. (1 pont)
Hasonlóan adódnak (az eleve adott és közben kiszámolt elemek felhasználásával) az $a_{1,2} = -2$, $a_{3,1} = 2$, $b_{3,1} = -2$, $a_{2,3} = 4$ és $a_{3,3} = -5$ értékek (sorban a $c_{1,2} = 0$, $c_{3,2} = 0$, $c_{1,1} = 1$, $c_{2,1} = 0$ és $c_{3,1} = 0$ elemek felhasználásával). (3 pont)
Ezzel már a teljes A ismert, így B megkapható A^{-1} kiszámításával. De mivel B-ből is ismert már az első két oszlop, a hiányzó harmadikat (jelölje ezt $\underline{x}$) egyszerűbben megkaphatjuk csak az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_3$ lineáris egyenletrendszer megoldásával (ahol $\underline{e}_3$ az egységmátrix harmadik oszlopát jelöli). (2 pont)
A fenti egyenletrendszert Gauss-eliminációval megoldva:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

(3 pont)

Így tehát végül is $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ az egyetlen helyes megoldás. (1 pont)
A megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hibák darabonként 1 pont levonást jelentenek. (Természetesen nem hiba, csak fölösleges a megoldás második felében az A^{-1} kiszámítására vonatkozó teljes Gauss-eliminációt elvégezni.)

2. A 6×6-os A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan B és C mátrixok, amelyekre $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(C) = 2$ és $A = B + C$.

* * * * *

Jelölje A oszlopait $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_6$. Mivel $\mathrm{r}(A) = 4$, ezek közül kiválasztható 4 lineárisan független; legyenek ezek például $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_4$ (az oszlopok számozása a megoldást nem befolyásolja). (2 pont)

Mivel $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_4, \underline{a}_5$ lineárisan összefüggő (hiszen $\mathrm{r}(A) = 4$), ezért az „újonnan érkező vektor lemmája” szerint $\underline{a}_5 \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_4 \rangle$, vagyis létezik az $\underline{a}_5 = \alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_4 \underline{a}_4$ lineáris kombináció. Hasonló okokból létezik az $\underline{a}_6 = \beta_1 \underline{a}_1 + \dots + \beta_4 \underline{a}_4$ lineáris kombináció is. (2 pont)

Elkészítjük a kívánt B és C mátrixokat: B oszlopai legyenek sorban $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{0}$, $\underline{0}$, $\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2$ és $\beta_1 \underline{a}_1 + \beta_2 \underline{a}_2$; hasonlóan, C oszlopai legyenek sorban $\underline{0}$, $\underline{0}$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$, $\alpha_3 \underline{a}_3 + \alpha_4 \underline{a}_4$ és $\beta_3 \underline{a}_3 + \beta_4 \underline{a}_4$. (2 pont)

Azonnal látszik, hogy $A = B + C$ igaz (hiszen B és C azonos sorszámú oszlopainak összege mindig A megfelelő oszlopát adja). (1 pont)

Megmutatjuk, hogy $\mathrm{r}(B) = 2$; az $\mathrm{r}(C) = 2$ állítás indoklása ezzel analóg. B oszlopai közül kiválasztható 2 lineárisan független: $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$. Mivel B minden oszlopa benne van az $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle$ generált altérben (vagyis kifejezhető $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ lineáris kombinációjaként) és az FG-egyenlőtlenség szerint $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle$-ben nem létezhet 3 lineárisan független vektor, ezért B oszlopai közül sem választható 3 lineárisan független. Így $\mathrm{r}(B) = 2$ (és $\mathrm{r}(C) = 2$) valóban igaz, amivel az állítást beláttuk. (3 pont)

3. Legyen $f : \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{10}$ lineáris leképezés, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{20}\}$ bázis $\mathbb{R}^{20}$-ban és $\underline{v} \in \mathbb{R}^{10}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ rögzített vektor. Adjuk meg $\dim \mathrm{Ker} f$ értékét, ha tudjuk, hogy f a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{20}$ vektorok mindegyikéhez $\underline{v}$-t rendeli.

* * * * *

Állítjuk, hogy $\mathrm{Im} f = \langle \underline{v} \rangle$.

Mivel $\underline{v} \in \mathrm{Im} f$ (hiszen $\underline{v} = f(\underline{b}_i)$) és $\mathrm{Im} f$ altér, ezért $\lambda \cdot \underline{v} \in \mathrm{Im} f$ valóban igaz minden λ-ra (de indokolhatjuk ezt azzal is, hogy $f(\lambda \underline{b}_i) = \lambda \underline{v}$). (1 pont)

Legyen most $\underline{w} \in \mathrm{Im} f$ tetszőleges, vagyis $\underline{w} = f(\underline{x})$ valamilyen $\underline{x} \in \mathbb{R}^{20}$ vektorra. Mivel $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{20}$ bázis $\mathbb{R}^{20}$-ban, ezért $\underline{x}$ kifejezhető belőlük lineáris kombinációval: $\underline{x} = \beta_1 \underline{b}_1 + \dots + \beta_{20} \underline{b}_{20}$. (2 pont)

Felhasználva az f lineáris leképezés tanult tulajdonságait:

$$\begin{aligned} \underline{w} &= f(\underline{x}) = f(\beta_1 \underline{b}_1 + \dots + \beta_{20} \underline{b}_{20}) = f(\beta_1 \underline{b}_1) + \dots + f(\beta_{20} \underline{b}_{20}) = \\ &= \beta_1 f(\underline{b}_1) + \dots + \beta_{20} f(\underline{b}_{20}) = \beta_1 \underline{v} + \dots + \beta_{20} \underline{v} = (\beta_1 + \dots + \beta_{20}) \underline{v}. \end{aligned}$$

Így $\underline{w} \in \langle \underline{v} \rangle$, amivel $\mathrm{Im} f = \langle \underline{v} \rangle$-t beláttuk. (3 pont)

Vagyis $\underline{v}$ 1 elemű bázis $\mathrm{Im} f$-ben (hiszen $\underline{v} \neq \underline{0}$ miatt lineárisan független is), így $\dim \mathrm{Im} f$=1. (2 pont)

Ezért a dimenziótétel szerint $\dim \mathrm{Ker} f = 20 - 1 = 19$. (2 pont)

4. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációra és az $\mathbb{R}^3$-beli $B = \{\underline{b}_1 = (1;0;0), \underline{b}_2 = (2;1;0), \underline{b}_3 = (2;2;1)\}$ bázisra teljesül, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2) = \underline{b}_3$ és $f(\underline{b}_3) = \underline{b}_1$. Adjuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A tanultak szerint az $[f]_B$ első oszlopa $[f(\underline{b}_1)]_B$. Mivel $f(\underline{b}_1) = 0 \cdot \underline{b}_1 + 1 \cdot \underline{b}_2 + 0 \cdot \underline{b}_3$, ezért az $[f]_B$ első oszlopa: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hasonlóan adódik $[f]_B$ másik két oszlopa is: $[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 pont)

Ebből $[f]$-et a tanult $[f]_B = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$ összefüggés segítségével határozzuk meg. Ezt balról B-vel, jobbról B^{-1}-zel szorozva: $B \cdot [f]_B \cdot B^{-1} = [f]$. (2 pont)

Itt B a megadott bázis mátrix megfelelője: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ebből B^{-1}-et Gauss-eliminációval számítjuk ki:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(2 pont)

Mindebből

$$[f] = B[f]_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(3 pont)

5. Sajátértéke-e a 3 az alábbi A mátrixnak? Ha igen, adjuk meg az A egy 3-hoz tartozó sajátvektorát.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Definíció szerint a 3 akkor sajátérték, ha az $A \cdot \underline{x} = 3 \cdot \underline{x}$ egyenletnek van egy $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldása. Más szóval: a $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3x_1$, $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3x_2$, $x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 3x_3$ lineáris egyenletrendszernek van nem csupa nulla megoldása. (3 pont)
Átrendezés után: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$, $x_1 + 8x_2 + x_3 = 0$ (ez az $(A-3E)\underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszer). (1 pont)
Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13/5 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \end{array}\right).$$

(2 pont)

Így az egyenletrendszer megoldásai: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_1 = -\frac{13}{5}\alpha$, $x_2 = \frac{1}{5}\alpha$. (1 pont)
Például az $\alpha = -5$ választással az $x_1 = 13$, $x_2 = -1$, $x_3 = -5$ értékeket kapjuk.
Így a 3 sajátérték és az $\underline{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ a 3-hoz tartozó sajátvektor. (3 pont)

A megoldást lehet azzal is kezdeni, hogy kiszámítjuk $\det(A-3E)$ értékét és miután ez 0, a tanult tétel szerint megállapíthatjuk, hogy a 3 sajátérték. De mivel ezután a sajátvektor meghatározásához úgyis a fenti megoldásban írtak vezetnek, erre külön nincs szükség. Ha egy megoldó a $\det(A-3E) = 0$ kiszámításával csak azt állapítja meg, hogy a 3 sajátérték, de hozzá tartozó sajátvektort nem talál, az ezért 3 pontot kaphat; ehhez azonban a sajátvektor keresésére vonatkozó hasznos próbálkozásokból legföljebb 2 további pont adható részpontszámként. Ha egy megoldó a $\det(A-3E)$ kiszámításakor számolási hiba miatt 0-tól különböző eredményt kap és ezért (ebből helyesen) azt állapítja meg, hogy a 3 nem sajátérték, az mindezért összesen legföljebb 3 pontot kaphat – de ezt is csak abban az esetben, ha a determináns számítása közben vétett hiba jelentéktelen, nem elvi jellegű.

6. Az n pozitív egész számra $43n - 1$ utolsó két számjegye megegyezik $2n + 2$ utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy?

* * * * *

A feladat szövege szerint $43n - 1 \equiv 2n + 2 \pmod{100}$. Átrendezést követően a $41n \equiv 3 \pmod{100}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
3-mal szorozva: $123n \equiv 9 \pmod{100}$, vagyis $23n \equiv 9 \pmod{100}$. (1 pont)
4-gyel szorozva: $92n \equiv 36 \pmod{100}$, vagyis $-8n \equiv 36 \pmod{100}$. (1 pont)
-4-gyel osztva: $2n \equiv -9 \pmod{25}$, ahol a modulust $(-4, 100) = 4$ miatt osztottuk 4-gyel. (1 pont)

Ebből $2n \equiv 16 \pmod{25}$, amit 2-vel osztva: $n \equiv 8 \pmod{25}$, ahol $(25,2) = 1$ miatt a modulus most nem változott. (1 pont)

Ebből $n \equiv 8 \pmod{100}$, $n \equiv 33 \pmod{100}$, $n \equiv 58 \pmod{100}$ vagy $n \equiv 83 \pmod{100}$. (1 pont)

Ellenőrzéssel kiderül, hogy a fentiek közül csak az $n \equiv 83 \pmod{100}$ a helyes, a többi hamis gyök. (Ezek a 4-gyel szorzás miatt jöttek be, ami $(100,4) > 1$ miatt nem ekvivalens lépés.) Így a megoldás: $n \equiv 83 \pmod{100}$. (3 pont)

Ebből $2n+2 \equiv 168 \equiv 68 \pmod{100}$ vagyis a keresett két utolsó számjegy: 68. (1 pont)

A hamis gyökök kiszűrésekor felhasználhatjuk, hogy $(41,100) = 1$ miatt a tanult tétel szerint egyetlen megoldás van modulo 100; így ha $n \equiv 83 \pmod{100}$ megoldás, akkor a többi három nem az. A lineáris kongruencia természetesen nagyon sokféleképp megoldható jól (akár hamis gyököt behozó lépés nélkül is). Aki a fenti megoldást, vagy más, hamis gyököt behozó megoldást ad, de nem foglalkozik a hamis gyök kiszűrésével, az értelemszerűen 3 pontot veszítsen. Ha valaki csak azt ellenőrzi, hogy $(41,100)|3$, így a lineáris kongruenciának van megoldása, de azt kiszámolni nem tudja, az (az átrendezéssel együtt) összesen 3 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb.

1. pótzh., pontozási útmutató, 2014. december 15.

1. Az e egyenes egyenletrendszere $\frac{2x-3}{4} = \frac{3y+4}{6} = \frac{z}{2}$, az f egyenesé $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{3z-5}{6}$. Párhuzamos-e e és f? Ha igen, akkor határozzuk meg az őket tartalmazó sík egyenletét.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az e egyenletrendszere $\frac{x-\frac{3}{2}}{2} = \frac{y+\frac{4}{3}}{2} = \frac{z}{2}$ alakú, így irányvektora a $\underline{v} = (2;2;2)$ vektor (hiszen a $P(\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, 0)$ ponton át a $\underline{v}$ irányvektorral egyenest állítva a tanultak szerint épp ezt az egyenletrendszert kapjuk). Hasonlóan, az f egyenletrendszere $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-\frac{5}{3}}{2}$, így a $\underline{v} = (2;2;2)$ ennek is irányvektora. (2 pont)

Mivel e és f irányvektorai párhuzamosak, ezért e és f is azok. (1 pont)

Mivel e-n rajta van a $P(\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, 0)$ pont és f-en a $Q(-1,4,\frac{5}{3})$, ezért $\overrightarrow{PQ}$ párhuzamos az e-t és f-et tartalmazó S síkkal. (1 pont)

$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = (-\frac{5}{2}, \frac{16}{3}, \frac{5}{3})$, ahol $\underline{q}$ és $\underline{p}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorok. (1 pont)

Párhuzamos még S-sel az egyenesek közös $\underline{v}$ irányvektora is (de $\overrightarrow{PQ}$-val nem), ezért S-nek normálvektora lesz az $\underline{n} = \underline{v} \times \overrightarrow{PQ}$ vektor. (1 pont)

Ezt a tanult képlettel határozzuk meg, de az egyszerűség kedvéért $\underline{v}$ helyett $\frac{1}{2}\underline{v}$-vel,

$\overrightarrow{PQ}$ helyett pedig $-6 \cdot \overrightarrow{PQ}$-val számolunk (ami érdemi különbséget nem jelent):

$$\underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 15 & -32 & -10 \end{vmatrix} = 22\underline{i} + 25\underline{j} - 47\underline{k} = (22; 25; -47). \qquad \text{(2 pont)}$$

A kapott $\underline{n}$ normálvektor és P vagy Q segítségével S egyenlete már a tanult képlettel felírható: $22x + 25y - 47z = -\frac{1}{3}$. (2 pont)
Ha egy megoldó az egyenesek irányvektorait hibásan olvassa ki és ezért arra a következtetésre jut (a hibás irányvektorokból helyesen), hogy e és f nem párhuzamosak, akkor ezért a fenti pontozás szerint járó 1 pontot megkaphatja.

2. Megadható-e $\mathbb{R}^5$-ben öt darab vektor úgy, hogy közülük bármely három által alkotott rendszer lineárisan független legyen, de semelyik négy által alkotott rendszer ne legyen az?

* * * * *

Igen, megadhatók ilyen vektorok.
Ehhez célunk lesz keresni 5 darab $\mathbb{R}^3$-beli vektort úgy, hogy közülük bármely három lineárisan független legyen. Ugyanis ha találunk ilyeneket, akkor ezeket két további 0 koordinátával kiegészítve (utolsó két koordinátaként) a feladat feltételeinek megfelelő $\mathbb{R}^5$-beli vektorokat kapunk. (1 pont)
Valóban, egyrészt a nullákkal való kiegészítés a vektorhármasok lineáris függetlenségét nem befolyásolja: ha egy ilyen hármas egyik tagja a másik kettőből lineáris kombinációval kifejezhető volna, akkor ugyanez elmondható volna a mindhármuk utolsó két 0 koordinátájának törlése után kapott $\mathbb{R}^3$-beli vektorokra is, amelyeket pedig lineárisan függetlennek választottunk. (2 pont)
Másrészt a megadott vektorok elemei lesznek annak a $W \leq \mathbb{R}^5$ altérnek, amely azokból az $\mathbb{R}^5$-beli vektorokból áll, amelyeknek az utolsó két koordinátája 0. Mivel W-ben generátorrendszert (sőt: bázist) alkot például az $\mathbb{R}^5$-beli standard bázis első három vektora, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt W-ben semelyik négy vektor nem lehet lineárisan független. (2 pont)
A kérdés tehát az, hogyan találhatunk 5 olyan $\mathbb{R}^3$-beli vektort, hogy közülük bármely három lineárisan független legyen.
Tudjuk, hogy három $\mathbb{R}^3$-beli vektor akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem esnek közös origón átmenő síkba. (2 pont)
Vegyünk fel ezért egy tetszőleges, de az origón át nem menő S síkot és válasszunk ezen 5 tetszőleges olyan pontot, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre (például egy konvex ötszög csúcsait). Majd tekintsük az origóból ezekbe a pontokba mutató helyvektorokat. Ezek közül semelyik három nem eshet egy origón átmenő S' síkba (mert különben a három szóban forgó helyvektor végpontja az S és az S' síkok metszésvonalán volna, vagyis egy S-beli egyenesre esnének). (3 pont)

A fenti, geometriai gondolatmenet alapján 5 ilyen térvektor (és ezekből a feladatnak megfelelő $\mathbb{R}^5$-beli vektorok) akár konkrétan is megadható, de erre a feladat teljes értékű megoldásához nincs szükség.

3. Az $\mathbb{R}^4$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyeknek a harmadik koordinátája egyenlő a fölötte álló kettő, a negyedik koordinátája pedig a fölötte álló három koordináta összegével. (Így például a jobbra látható vektor is W-beli.) Határozzuk meg $\dim W$ értékét. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Ha egy $\underline{w} \in W$ vektor első két koordinátája α, illetve β, akkor a harmadik $\alpha+\beta$, a negyedik pedig $2\alpha+2\beta$. Ezért $\underline{w} \in W$ felírható így:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \\ 2\alpha+2\beta \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ez tehát azt jelenti, hogy a fenti egyenlet jobb oldalán álló két $\mathbb{R}^4$-beli vektor – jelölje ezeket $\underline{a}$, illetve $\underline{b}$ – generátorrendszert alkot W-ben. (2 pont)
Másrészt $\underline{a}, \underline{b}$ lineárisan független rendszer, mert egyik vektor sem skalárszorosa a másiknak. (2 pont)
Így $\underline{a}, \underline{b}$ bázis W-ben, (2 pont)
vagyis $\dim W = 2$. (2 pont)

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 10x_5 &= 5 \\ 5x_1 - 2x_2 + 19x_3 + 14x_4 + x_5 &= 17 \\ 2x_1 + 6x_3 + p \cdot x_4 + (3p-27) \cdot x_5 &= p+2 \end{aligned}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 10 & 5 & 10 & 5 \\ 5 & -2 & 19 & 14 & 1 & 17 \\ 2 & 0 & 6 & p & 3p-27 & p+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 9 & -9 & 12 \\ 0 & 2 & -4 & p-2 & 3p-31 & p \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & p-8 & 3p-25 & p-8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-9 & 0 \end{array}\right) \sim$$

(Az utolsó lépésben a 3-mal osztott harmadik sor $(p-8)$-szorosát vontuk ki a negyedikből.) (2 pont)

Ha $p=9$, akkor az utolsó sor csupa 0, így elhagyható. Ekkor a Gauss-elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk (három további, vezéregyes fölötti elem „kinullázásával"):

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

(1 pont)

Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_3=\alpha\in\mathbb{R}$ és $x_5=\beta\in\mathbb{R}$ „szabad paraméterek", $x_1=1-3\alpha+9\beta$, $x_2=1+2\alpha+9\beta$, $x_4=1-2\beta$. (2 pont)

Ha viszont $p\neq 9$, akkor az utolsó sort $(p-9)$-cel osztva kapjuk a lépcsős alakot, majd ebből ismét a vezéregyesek fölötti elemek „kinullázásával" a redukált lépcsős alakot:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

(3 pont)

Így a $p\neq 9$ esetben is végtelen sok megoldás van: $x_3=\alpha\in\mathbb{R}$ „szabad paraméter", $x_1=1-3\alpha$, $x_2=1+2\alpha$, $x_4=1$, $x_5=0$. (2 pont)

A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörők, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint*. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A definícióban összeadandóként szereplő szorzatok közül csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem tartalmaznak 0 tényezőt, mert a többi nem befolyásolja a determináns értékét. (1 pont)
Egy ilyen szorzatban tehát az utolsó sorból csak az 1-es választható. Ezért az első sorból csak a 2-es választható (mert a negyedik oszlopból már választottunk elemet). Hasonlóan folytatva, a negyedik sorból csak a -1-es, a másodikból a 3-as, a harmadikból a -2-es választható. Így egyetlen nemnulla szorzat keletkezik: $2 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 = 12$. (3 pont)
Az ehhez a szorzathoz tartozó π permutáció $2,5,3,1,4$ (mert az első sorból a második elemet vettük ki, a másodikból az ötödiket, stb). (2 pont)
π inverziószáma $I(\pi) = 5$ (az inverzióban álló elempárok $(2,1)$, $(5,3)$, $(5,1)$, $(5,4)$ és $(3,1)$). (2 pont)
Mivel $I(\pi)$ páratlan, a fenti szorzat negatív előjelet kap. Így a determináns értéke -12. (2 pont)

6. A 4×5-ös A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem minden $1 \le i \le 4$ és $1 \le j \le 5$ esetén legyen $(-1)^d$, ahol d az $i^{20} + j^{30}$ szám (10-es számrendszerbeli alakjának) első számjegye. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ mátrix főátlójában álló elemek összegét.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

$A \cdot A^T$ főátlójának i-edik eleme az A i-edik sorában álló elemek négyzetösszege. Valóban, a mátrixszorzás definíciója szerint az A i-edik sorának elemeit szorozzuk az A^T i-edik oszlopának elemeivel (és a kapott kéttényezős szorzatokat adjuk össze), de az utóbbiak elemről elemre megegyeznek az előbbiekkel. (4 pont)
Mivel A minden eleme 1 vagy -1 és egy sorban 5 ilyen elem van, ezért $A \cdot A^T$ főátlójának minden eleme $(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 = 5$. (4 pont)
Mivel az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix 4×4-es, ezért a főátlójában álló elemek összege $5 \cdot 4 = 20$. (2 pont)

2. pótzh., pontozási útmutató, 2014. december 15.

1. A p paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak és ha igen, akkor számítsuk is ki azt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & p \end{pmatrix}$$

* * * * *

A harmadik oszlop szerinti kifejtéssel kapjuk, hogy

$$\det A = p \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = p \cdot 1 = p.$$

(1 pont)

Így a tanult tétel szerint A-nak akkor és csak akkor létezik inverze, ha $p \neq 0$.

(2 pont)

A $p \neq 0$ értékekre A^{-1}-et a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & p & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & p & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p & 5 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/p & -4/p & 1/p \end{array}\right)$$

(6 pont)

Így A^{-1} a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (1 pont)

Megjegyezzük, hogy az inverz létezésének kérdéséhez nem feltétlen szükséges előre kiszámítani $\det A$-t, az a Gauss-eliminációból is kiolvasható: a harmadik lépésben kapott alakból látszik, hogy $\det A = p$ (és előtte csak a determináns értékét meg nem változtató lépéseket végeztünk a vonaltól balra álló mátrixon). Minden, a megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. Ha csak annyi látszik, hogy a megoldó a módszert elvileg ismeri, de nem tudja kivitelezni, az legföljebb 2 pontot érhet (de az inverz létezésének kérdéséért járó 3 pont ettől függetlenül megadható).

2. Igaz-e, hogy minden 4 rangú, 6×6-os mátrixban található két olyan elem, amelyek alkalmas megváltoztatásával elérhető, hogy a kapott mátrix rangja 6 legyen?

* * * * *

Az állítás igaz.
Legyen A 4 rangú, 6×6-os mátrix. Ekkor a determinánsrang definíciója szerint A-nak van 4×4-es, nemnulla determinánsú részmátrixa. A megoldás leírásának egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy ez épp a bal felső sarokban álló 4×4-es részmátrix (ez a megoldás menetét érdemben nem befolyásolja). (2 pont)
Jelölje a bal felső sarokban álló 5×5-ös részmátrixot M. Célunk $a_{5,5} = m_{5,5}$ értékét alkalmasan megváltoztatni úgy, hogy $\det M \neq 0$ legyen. Ehhez a kifejtési tételt használjuk M ötödik sorára: $\det M = m_{5,1} \cdot M_{5,1} + m_{5,2} \cdot M_{5,2} + \ldots + m_{5,5} \cdot M_{5,5}$ (ahol $M_{i,j}$ a megfelelő előjeles aldetermináns értéke). Itt $M_{5,5} \neq 0$, mert ez épp az A bal felső sarkában álló 4×4-es részmátrix determinánsa. (2 pont)
Ezért $m_{5,5} = a_{5,5}$ értékének alkalmas megváltoztatásával $\det M$-et tetszőleges értékre beállíthatjuk: például $\det M = 1$ az $m_{5,5} = \frac{1}{M_{5,5}} \cdot (1 - m_{5,1} \cdot M_{5,1} - \ldots - m_{5,4} \cdot M_{5,4})$ választással biztosítható. (2 pont)
Most a fenti gondolatmenetet megismételhetjük a teljes A mátrixra: mivel $\det M \neq 0$, ezért a kifejtési tételből következően $a_{6,6}$ alkalmas megváltoztatásával $\det A$ tetszőleges értékre, így 0-tól különbözőre is beállítható. (2 pont)
Mivel az $a_{5,5}$ és $a_{6,6}$ megváltoztatásával kapott A' mátrixra $\det A' \neq 0$, ezért A' rangja (a determinánsrang definíciójából közvetlenül adódóan) valóban 6.(2 pont)

Második megoldás. A sorrangja 4, így létezik négy független sora, de bármely öt sora már összefüggő. Nyilván feltehetjük, hogy az első négy sor független. (2 pont)
Mivel ez a négy vektor négy dimenziós alteret generál, lesz olyan egységvektor $\mathbb{R}^6$-ban, mely nem áll elő a kérdéses sorok lineáris kombinációjaként. (2 pont)
Ha ezt az egységvektort az ötödik sorhoz adjuk, akkor csak egy elemet változtatunk meg. (1 pont)
Állítjuk, hogy az ezzel a változással kapott mátrix rangja már 5 lesz. (1 pont)
Valóban, bár a hatodik sor továbbra is előáll az első négy lineáris kombinációjaként, az ötödik már nem, hiszen az eredeti ötödik sor előállt így, ezért ha az új is előállna, akkor ez a különbségükre is igaz lenne, ami lehetetlen, így (az újonnan érkező vektor lemmája szerint) az első 5 sor független rendszert alkot. (2 pont)
Hasonlóan állíthatunk elő 6 rangú mátrixot a kapott 5 rangúból egy újabb elem megváltoztatásával (ezúttal a hatodik sorban). (2 pont)

3. Legyen $f : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^{10}$-ben megadható 7 lineárisan független vektor úgy, hogy f ezek mindegyikéhez azonos értéket rendel.

b) Igaz-e ez az állítás 7 helyett 8 lineárisan független vektorral?

* * * * *

Mivel $\operatorname{Im} f \leq \mathbb{R}^3$, ezért $\dim \operatorname{Im} f \leq 3$, (1 pont)

így a dimenziótételből $\dim \operatorname{Ker} f \geq 7$ adódik. (1 pont)
Ezért $\operatorname{Ker} f$ tetszőleges bázisát véve legalább 7 lineárisan független vektort kapunk, amelyeknek a képe $\underline{0}$. Ez tehát az a) pont állítását bizonyítja. (1 pont)
Az állítás 7 helyett 8 lineárisan független vektorral is igaz.
Ha $\dim \operatorname{Ker} f \geq 8$, akkor ez a fenti gondolatmenetből rögtön következik, ezért feltehetjük, hogy $\dim \operatorname{Ker} f = 7$. Így választhatunk egy $\underline{v} \notin \operatorname{Ker} f$ vektort és egy $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_7$ bázist $\operatorname{Ker} f$-ben. (1 pont)
Állítjuk, hogy a $\underline{v}, \underline{v}+\underline{b}_1, \underline{v}+\underline{b}_2, \ldots, \underline{v}+\underline{b}_7$ vektorok megfelelnek a feladat feltételeinek.
Mivel $f(\underline{v}+\underline{b}_i) = f(\underline{v}) + f(\underline{b}_i)$ a lineáris leképezés tanult tulajdonsága miatt és $\underline{b}_i \in \operatorname{Ker} f$ miatt $f(\underline{b}_i) = \underline{0}$, ezért $f(\underline{v}+\underline{b}_i) = f(\underline{v})$. Így f a felsorolt nyolc vektorhoz valóban azonos értéket rendel. (1 pont)
Meg kell még mutatnuk, hogy a felsorolt vektorok lineárisan függetlenek. Ehhez vegyük egy tetszőleges, $\underline{0}$-t adó lineáris kombinációjukat:

$$\lambda_0 \cdot \underline{v} + \lambda_1 \cdot (\underline{v}+\underline{b}_1) + \ldots + \lambda_7 \cdot (\underline{v}+\underline{b}_7) = \underline{0}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Átrendezve:

$$(\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_7) \cdot \underline{v} + \lambda_1 \cdot \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_7 \cdot \underline{b}_7 = \underline{0}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Legyen $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_7$. Ha $\Lambda \neq 0$, akkor átrendezés után $\underline{v} = -\frac{\lambda_1}{\Lambda} \cdot \underline{b}_1 - \ldots - \frac{\lambda_7}{\Lambda} \cdot \underline{b}_7$ adódik. Ebből viszont $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f$ következne, ellentmondás. (1 pont)
Így $\Lambda = 0$, amiből $\lambda_1 \cdot \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_7 \cdot \underline{b}_7 = \underline{0}$ adódik. Mivel $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_7$ lineárisan függetlenek (hiszen bázist alkotnak $\operatorname{Ker} f$-ben), ezért ebből $\lambda_1 = \ldots = \lambda_7 = 0$ következik. (1 pont)
Ebből $\Lambda = 0$ miatt $\lambda_0 = 0$ is adódik, így $\underline{v}, \underline{v}+\underline{b}_1, \underline{v}+\underline{b}_2, \ldots, \underline{v}+\underline{b}_7$ valóban lineárisan függetlenek. (1 pont)

4. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint az alábbi mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_2$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_3) = (10;20;30)$.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Legyen $\underline{v} = \underline{b}_1 + \underline{b}_3$. Ekkor $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (hiszen $\underline{v} = 1 \cdot \underline{b}_1 + 0 \cdot \underline{b}_2 + 1 \cdot \underline{b}_3$).(2 pont)
$[f]_B$ definíciójából $[f(\underline{v})]_B = [f]_B \cdot [\underline{v}]_B$ következik. (2 pont)
Elvégezve a mátrixszorzást:

$$[f(\underline{v})]_B = [f]_B \cdot [\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2 pont)

Ebből tehát $f(\underline{v}) = 0 \cdot \underline{b}_1 + 2 \cdot \underline{b}_2 + 0 \cdot \underline{b}_3 = 2 \cdot \underline{b}_2$ következik. (2 pont)

Mivel a feladat feltétele szerint $f(\underline{v}) = (10;20;30)$, ebből $\underline{b}_2 = (5;10;15)$ adódik. (2 pont)

5. a) Sajátvektora-e az alábbi $\underline{v}$ vektor az alábbi A mátrixnak?

b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét és az összes, ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Elvégezve az $A \cdot \underline{v}$ szorzást:

$$A \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(1 pont)

Látszik, hogy $A \cdot \underline{v} = 3 \cdot \underline{v}$, így $\underline{v}$ sajátvektora A-nak (1 pont)

és $\lambda = 3$ sajátértéke A-nak. (1 pont)

A $\lambda = 3$-hoz tartozó sajátvektorok definíció szerint az $A \cdot \underline{x} = 3 \cdot \underline{x}$ egyenlet $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldásai. Más szóval: a $4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3x_1$, $-2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3x_2$, $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3x_3$ lineáris egyenletrendszer csupa nullától különböző megoldásait keressük. (3 pont)

Átrendezés után: $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$, $-2x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 0$, $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$ (ez az $(A - 3E)\underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszer). (1 pont)

Látszik, hogy az első egyenletnek a második -2-szerese, a harmadik pedig azonos vele, így az utolsó két egyenlet elhagyható. (1 pont)

Így a 3-hoz tartozó sajátvektorok azok az $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorok, amelyek koordinátáira $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$ teljesül. (2 pont)

Ha egy megoldó a 3-hoz tartozó sajátvektorok keresésekor csak annyit állapít meg, hogy a megadott $\underline{v}$ minden nemnulla skalárszorosa sajátvektor, az (az első 3 pont mellett) ezért további 1 pontot kaphat. Megjegyezzük, hogy A-nak sajátértéke még a 3 mellett a $\lambda = -7$ is, az ehhez tartozó sajátvektorok az $(1;-2;1)^T$ vektor nemnulla többszörösei. Így elvileg ezek megadása is a feladat teljes értékű megoldását jelentené, de a -7 sajátérték megtalálásához a harmadfokú karakterisztikus polinom gyökeit, vagyis a $\lambda^3 + \lambda^2 - 33\lambda + 63 = 0$ egyenlet megoldásait kellene megtalálni, ami nyilván jóval kellemetlenebb feladat.

6. Egy egész szám 109-cel vett osztási maradéka 5-tel kisebb, mint a szám 18-szorosának a 109-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 109-cel osztva?

* * * * *

A keresett számot n-nel jelölve a feladat szövege szerint $18n-5 \equiv n \pmod{109}$, amit átrendezve a $17n \equiv 5 \pmod{109}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
Mivel 7 és 109 relatív prímek, 7-tel szorozva az eredetivel ekvivalens kongruenciát kapunk: (1 pont)
$119n \equiv 35 \pmod{109}$, vagyis $10n \equiv 35 \pmod{109}$. (2 pont)
Mivel 5 és 109 is relatív prímek, 5-tel osztva a modulus nem változik és az előzővel ekvivalens kongruenciát kapunk: (1 pont)
$2n \equiv 7 \pmod{109}$. (2 pont)
A jobboldalhoz 109-et adva $2n \equiv 116 \pmod{109}$. (1 pont)
2 és 109 is relatív prímek, így 2-vel osztva a modulus nem változik és az előzővel ekvivalens kongruenciát kapunk: (1 pont)
$n \equiv 58 \pmod{109}$. (1 pont)
Így a keresett szám 58 maradékot ad 109-cel osztva. A lépések ekvivalenciája helyett hivatkozhatunk arra is, hogy $(17, 109) = 1$ miatt egyetlen megoldás kell legyen modulo 109, vagy ellenőrizhetjük is a kapott eredményt. (Viszont a három érv közül valamelyikre szükség van annak kizárásához, hogy a lineáris kongruenciának nincs megoldása.) Ha egy megoldó csak azt ellenőrzi, hogy $(17, 109)|5$, így a lineáris kongruenciának van megoldása, de azt kiszámolni nem tudja, az (az átrendezéssel együtt) összesen 3 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb.