

Gráfelméleti alapfogalmak, szomszédossági mátrix, éllista
ALGORITMUSOK ÉS GRÁFOK

8. gyakorlat
2025.

1. Összefüggő-e az a G gráf, amelynek szomszédossági mátrixa az alábbi?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Az egyszerű, irányítatlan, G gráf minden csúcsának a fokszáma 3. A gráf szomszédossági mátrixának bizonyos elemei kitörlődtek, csupán az alábbi maradt meg.

- (a) Rajzoljuk le a G gráfot.
(b) Adjuk meg a gráf éllistáját.

$$\begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & 1 & . & 1 & 0 & . \\ . & . & 1 & 0 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & 1 & . \end{pmatrix}$$

3. Legyen G egy n -csúcsú, egyszerű, irányítatlan vagy irányított gráf. Adjunk hatékony algoritmust a következő problémákra, ha a gráf a szomszédossági mátrixával, illetve ha éllistával adott.

- (a) Vezet-e az i -edik és a j -edik csúcs között él, avagy irányított esetben az i -edik csúcsból a j -edik csúcsba él (ahol $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ a bemenet része)?
(b) Mennyi az i -edik csúcs fokszáma, avagy irányított esetben a ki-, illetve a befoka?
(c) Hány éle van a gráfnak?

4. Szomszédossági mátrixával adott egy n -csúcsú, egyszerű, irányítatlan gráf. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust annak eldöntésére, hogy

- (a) van-e másodfokú csúcs a gráfban;
(b) mennyi a legnagyobb foksám a gráfban.

5. Szomszédossági mátrixával adott egy n -csúcsú, egyszerű, irányított gráf. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust annak eldöntésére, hogy van-e olyan csúcs, melynek a be és kifoka megegyezik.

6. Szomszédossági mátrixával adott egy n -csúcsú, egyszerű, irányítatlan gráf. Adott továbbá egy $S[0 : n - 1]$ tömbben minden csúcshoz egy szín a piros, kék és zöld színek közül. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust annak eldöntésére, hogy igaz-e, hogy az azonos színű csúcsok között nem fut él a gráfban.
7. Szomszédossági mátrixával adott egy n -csúcsú, egyszerű, irányított G gráf. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami előállítja a G gráf irányítatlan változatának a szomszédossági mátrixát (azaz azét a G' irányítatlan gráfét, melyben két csúcs között pontosan akkor van él, ha G -ben valamelyik irányban vezetett közöttük irányított él).
8. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka
 - (a) 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7;
 - (b) 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4.
9. A 6-csúcsú G egyszerű gráfból irányított gráfot készítettünk úgy, hogy G minden élét véletlenszerűen az egyik vagy a másik irányba irányítottuk, majd azt vettük észre, hogy a kapott irányított gráfban bármely két csúcs kifoka különböző. Rajzoljuk le a kapott irányított gráfot.
10. Legfeljebb hány éle lehet egy olyan 6-csúcsú egyszerű gráfnak, amiben van 6-hosszú kör, de nincsen 3-hosszú kör?