Algoritmuselmélet Vizsga 1.

2019. június 3.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. Minden megoldást indokoljon!
Minden feladat egységesen 10 pontot ér.
Az elégséges megszerzéséhez minimum 24 pontot kell elérni.

1. Tudjuk, hogy az $f(n), g(n), h(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényekre igaz, hogy $f(n) \in O(g(n))$ és $f(n) \in \Omega(h(n))$. Következik-e ebből, hogy $g(n) + h(n) \in \Omega(f(n))$?

2. Adjon meg környezetfüggetlen nyelvtant az $\{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d},\mathtt{e}\}$ abc feletti

$$\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m\mathtt{c}^m\mathtt{d}^n\mathtt{e}^k \mid k \geq 2; n \geq 1; m \geq 0\}$$

nyelvre!

3. Álljon az L nyelv az olyan $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ nemnegatív egészekből álló számhalmazokból, amelyek kettéoszthatóak egy X és egy Y halmazra a következőképp:

   - Minden i-re teljesüljön, hogy a_i és b_i közül pontosan az egyik van az X-ben és a másik Y-ban, és
   - $\sum_{x\in X} x = \sum_{y\in Y} y$.

   Bizonyítsa be, hogy az L nyelv NP-teljes nyelv!

4. Az $a_1,a_2,...,a_n$ sorozat nemnegatív egészekből áll. Szeretnénk meghatározni a legnagyobb összeget az olyan részsorozatok körében, amelyek nem tartalmaznak szomszédos elemet (pl. ha a kiválasztott részsorozatnak eleme a_3, akkor a_2 és a_4 nem lehet eleme). Adjon $O(n)$ futásidejű algoritmust erre a feladatra!

5. Rendezze a következő dátumokat időrend szerint radix rendezéssel:

$$2012.03.07, 2015.06.04, 2012.06.07, 2015.03.04,$$

$$2015.06.07, 2012.03.04, 2015.03.07, 2012.06.04$$

   Adja meg az aktuális sorrendet minden komponens (év, hónap, nap) rendezése után!

6. Adott egy n elemet tartalmazó F piros-fekete fa és két kulcs X és Y. Az X kulcs az x csúcsban, az Y pedig az y csúcsban van. Adjon hatékony algoritmust, amely megadja az x-et és az y-t összekötő F-beli úton a minimális kulcsértéket! Az algoritmus lépésszáma legyen $O(\log n)$!

7. Legyen L_1 az $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ abc feletti palindromok nyelve (azaz minden olyan szó, ami balról és jobbról olvasva is ugyanaz), L_2 pedig az L_1 komplementer nyelve. Bizonyítsa be, hogy a két nyelv konkatenáltja, azaz $L_1 \circ L_2$ reguláris!

Algoritmuselmélet Vizsga 2.

2019. június 13.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. Minden megoldást indokoljon!
Minden feladat egységesen 10 pontot ér.
Az elégséges megszerzéséhez minimum 24 pontot kell elérni.

1. Legyen n pozitív, egész szám. A P_n nyelv álljon azokból a szavakból, amelyek az n osztóinak bináris alakjai. Például $P_6 = \{1, 10, 11, 110\}$. Bizonyítsa be, hogy P_n minden n esetén reguláris nyelv!

2. Legyen $\Sigma = \{\mathtt{0},\mathtt{1},\#\}$. Jelölje egy $w = a_1a_2\dots a_n$ ($a_i \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$) szó megfordítását $w^R = a_na_{n-1}\dots a_1$. Tervezzen veremautomatát, ami a következő nyelvet ismeri fel:

$$L_2 = \{w\#x \mid w, x \in (\mathtt{0}+\mathtt{1})^* \text{ és } w^R \text{ részszava } x\text{-nek}\}$$

(Ennél a feladatnál se feledkezzen meg az indoklásról!)

3. Legyen SC azon egyszerű gráfokat leíró szavak nyelve, melyekben a **legrövidebb** kör hossza 10. Bizonyítsa be, hogy SC$\in$ NP!

4. Indiana Jones be akar jutni egy titkos barlangba. A bejáratnál $s_1, s_2, \dots, s_m$ súlyú kövek vannak (ezek pozitív egészek). Az ajtó akkor nyílik ki, ha sikerül felrakni az összes követ az ajtó két oldalán levő egy-egy tálcára úgy, hogy a végén a két kőkupac súlyának különbsége a lehető legkisebb. Jelölje W az összes kő súlyának összegét. Adjon $O(mW)$ futásidejű algoritmust, ami megoldja a feladatot! *(Ha Indiana Jonesnak nem sikerül időben megoldani a feladatot, akkor ráesik egy nagy szikla. ☹)*

5. Az xy-koordináta-rendszerben adottak az $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ pontok. Adjon $O(n)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza a legkisebb területű olyan téglalapot, melynek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel és az összes megadott pontot tartalmazza! Az algoritmus kimenete ennek a téglalapnak a bal alsó és a jobb felső csúcsának koordináta-párja legyen. *(Úgy tekintjük, hogy egy téglalap tartalmazza az oldalain levő pontokat is.)*

6. Szúrja be a $0, 1, 4, 10, 44, 43, 55, 53$ elemeket (ebben a sorrendben) egy $M = 11$ méretű hash táblába a $h(x) = x \pmod M$ hash függvényt és kvadratikus próbát használva! *Minden elem beszúrásakor indokolja meg, hogy miért oda került az új elem!*

7. Egy $X[1..n]$ tömbben különböző pozitív egész számok vannak és tudjuk, hogy az n db $X[1] < X[2], X[2] < X[3], \dots, X[n-1] < X[n], X[n] < X[1]$ egyenlőtlenség közül pontosan egy **nem** teljesül (de nem tudjuk, hogy melyik). Adjon $O(\log n)$ összehasonlítást használó algoritmust, ami megoldja az ilyen tulajdonságú tömbökben a *keresési* feladatot! *(Keresési feladat: egy adott y szerepel-e a tömbben és ha igen, akkor a tömb melyik eleme y.)*

Algoritmuselmélet Vizsga 3.

2019. június 17.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. Minden megoldást indokoljon! Minden feladat egységesen 10 pontot ér. Az elégséges megszerzéséhez minimum 24 pontot kell elérni.

1. Bizonyítsa be, hogy $\sqrt[n]{n!} \in O(\log(n^n))$ teljesül!

2. Adjon reguláris kifejezést a következő $\Sigma = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$ abc feletti CF nyelvtan által generált nyelvre: $S \to AB$; $A \to A\texttt{0} \mid \varepsilon$; $B \to \texttt{1}B \mid \texttt{1}$
(Ennél a feladatnál se feledkezzen meg az indoklásról!)

3. A G irányítatlan gráf csúcsainak 3 színnel való színezése majdnem-jó-3-színezés, ha legfeljebb egy éle van G-nek aminek a végpontjai azonos színűek. Legyen L azon G gráfok nyelve, amelyeknek van majdnem-jó-3-színezése. Mutassa meg, hogy az L nyelv NP-teljes!

4. A VIK egy nagyszabású kutatási projekten dolgozik, melynek $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ alprojektjei vannak. A kar minden K_i kutatójáról adott, hogy az alprojektek melyik $S_i \subseteq Q$ részhalmazában tud dolgozni. Egy alprojektet akkor lehet eredményesen elvégezni, ha legalább 3 kutató dolgozik rajta. Minden kutató a kar 10 tanszékének egyikén dolgozik, és fontos, hogy a projektben minden tanszék részt vegyen. Viszont szeretnénk a feladatot minél kevesebb kutató részvételével megoldani. Melyik kutatókat vonjuk be a projektbe, hogy minden alprojekten dolgozzon legalább 3 ember, minden tanszékről legyen valaki, és a kutatók száma minimális legyen. Írja fel a feladatot egészértékű programozási feladatként! *(A felírt feladatot megoldani nem kell!)*

5. Rendezze a következő tömb elemeit gyorsrendezéssel: $12, 11, 6, 7, 13, 3, 20, 17, 8, 2$.
Nem elég a végeredményt megadni, mutassa meg az egyes lépéseket is!

6. Egy T piros-fekete fában minden csúcsban az ott tárolt elem mellett tárolunk egy másik számot is: Hány elemet tárol az a részfa, melynek ez a csúcs a gyökere (beleszámolva magát a csúcsot is). Tudjuk, hogy a fában n elemet tárolunk, ami páratlan szám. Adjon $O(\log n)$ lépésszámú algoritmust, mely megadja a fában tárolt elemek mediánját. Az algoritmus során minden alapműveletet és összehasonlítást egy-egy lépésnek számolunk.

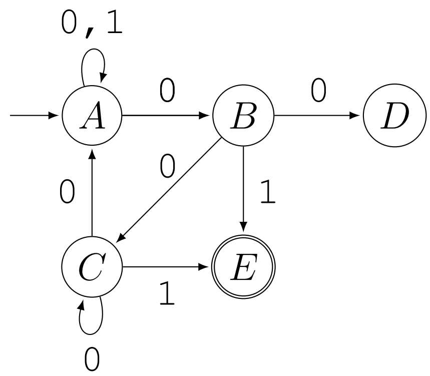
7. Egy vizsgadolgozatban n feladatot kell megoldani, az i-edik feladatra p_i pontot lehet kapni. A feladatokat az adott sorrendben kell megoldani, de ki lehet hagyni közülük bármennyit. Ráadásul, ha a hallgató megoldja az i-edik feladatot (és így megkapja a p_i pontot), akkor annyira elfárad, hogy ki kell hagyja a következő f_i darab feladatot. (De többet is kihagyhat. A feladatsor első néhány feladatát is kihagyhatja.) Adjon $O(n)$ futásidejű dinamikus programozást használó algoritmust, ami a p_i,f_i egész számok ismeretében meghatározza az elérhető összpontszám maximumát!

Algoritmuselmélet Vizsga 4.

2019. június 24.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. Minden megoldást indokoljon!
Minden feladat egységesen 10 pontot ér.
Az elégséges megszerzéséhez minimum 24 pontot kell elérni.

1. Adjon a jobb oldali NVA-val ekvivalens DVA-t az órán tanult eljárás segítségével! *A DVA-ban nem kell felrajzolni azokat az állapotokat, amik nem elérhetőek a DVA kezdőállapotából.*



2. Bizonyítsa be, hogy a következő nyelvtan a $\Sigma = \{\texttt{a},\texttt{b},\texttt{x},\texttt{y}\}$ abc felett nem egyértelmű:

$$S \to \texttt{x}T \mid \texttt{a} \mid \texttt{b}\;; \qquad T \to S \mid S\texttt{y}S$$

3. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk ami 1 lépésben tetszőleges $\phi(x_1,\ldots,x_m)$ Boole formuláról eldönti, hogy kielégíthető-e. Adjon polinomiális algoritmust, ami egy tetszőleges kielégíthető formulára megad egy kielégítést, azaz a változók olyan értékadását, amire a formula értéke igaz!

4. Adottak az $a_1,\ldots,a_m; b$ pozitív egész számok. Minden i-re teljesül, hogy $b \geq a_i > b/3$. Feladatunk minél kevesebb b méretű ládába belepakolni az $a_1,\ldots,a_m$ méretű tárgyakat úgy, hogy miden ládában az összméret legfeljebb b legyen. Legyen a T algoritmus ennek közelítő megoldására az, ami minden tárgyat egy-egy külön ládába tesz. Bizonyítsa be, hogy T egy 2-közelítő algoritmus! (*Létezik ugyan T-nél lényegesen jobban teljesítő algoritmus is erre a feladatra, de itt most kifejezetten T teljesítményére vagyunk kíváncsiak.*)

5. Rendezze a következő tömb elemeit gyorsrendezéssel: $12, 11, 6, 7, 13, 3, 20, 17, 8, 2$.
Nem elég a végeredményt megadni, mutassa meg az egyes lépéseket is!

6. Bizonyítsa be, hogy **nem létezik** olyan adatstruktúra, amelyben tetszőleges egész számok egy halmaza tárolható, felépíthető $O(n)$ lépésben (n a tárolt elemek száma), és a minimális elem megkeresése és törlése megvalósítható $O(1)$ (azaz konstans) lépésben! (Az adatstruktúra a tárolt elemekkel csak összehasonlításokat tud végezni.)

7. Tegyük fel, hogy létezik olyan L nyelv, amire az L és az $\overline{L}$ nyelv is NP-teljes. Bizonyítsa be, hogy ekkor minden olyan L' nyelvre, ami NP-teljes, teljesül, hogy az $\overline{L'}$ nyelv is NP-teljes! ($\overline{L}$ *az* L *nyelv komplementerét jelöli.*)