Algoritmuselmélet Vizsga 1.

2018. május 31.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. Minden megoldást indokoljon!
Minden feladat egységesen 10 pontot ér.
Az elégséges megszerzéséhez minimum 24 pontot kell elérni.

1. Készítsen determinisztikus véges automatát, ami azokat a $(\mathtt{0}+\mathtt{1})^*$-beli szavakat fogadja el, amiben pontosan egyszer szerepel a $\mathtt{010}$ részszó. (Pl. $\mathtt{001}, \mathtt{010010}$ és $\mathtt{01010}$ nem eleme ennek a nyelvnek, de $\mathtt{0100110}$ igen.)
2. Egyértelmű-e a következő CF-nyelvtan? $S \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}S\mathtt{b}S \mid \mathtt{c}$
3. Igazolja, hogy létezik az ÖSSZEFÜGGŐ $\prec$ 3SAT Karp-redukció! (ÖSSZEFÜGGŐ az összefüggő gráfok nyelve)
4. A LÁDAPAKOLÁS problémában adottak az $s_1, \ldots, s_n$ méretű tárgyak, melyeket minél kevesebb 1 méretű ládába szeretnénk elpakolni úgy, hogy minden ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1. Adjon polinom idejű algoritmust, ami meghatározza a szükséges ládák minimális számát, ha csak $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{4}$ méretű tárgyak vannak!
5. Az $a_1, \ldots, a_n$ természetes számokról tudjuk, hogy 10 darab kivételével teljesül, hogy $10 \leq a_i \leq 10n$. A kivételes 10 természetes szám bármekkora lehet. Adjon $O(n)$ futásidejű algoritmust, ami növekvően rendezi az összes számot!
6. Egy piros-fekete fában az x csúcs gyermekei y_1 és y_2, az y_2 gyermekei z_1, z_2. Tudjuk még, hogy y_1 levél. Mi mondható x, y_1, y_2, z_1, z_2 színéről?
7. Adott egy $x_1x_2 \ldots x_n$ szó a $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, z\}$ abc felett. Adjon olyan $O(n^2)$ futásidejű algoritmust, ami meghatározza a szóban található leghosszabb olyan részszó hosszát, ami palindroma (azaz jobbról és balról olvasva ugyanaz)!

Algoritmuselmélet Vizsga 2.

2018. június 7.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. Minden megoldást indokoljon! Minden feladat egységesen 10 pontot ér. Az elégséges megszerzéséhez minimum 24 pontot kell elérni.

1. Adjon reguláris kifejezést a $\Sigma = \{\texttt{a},\texttt{b},\texttt{c}\}$ abc feletti azon szavak nyelvére, amelyek tartalmazzák részszóként az `aa` és az `ab` szavakat.

2. Adjon olyan determinisztikus Turing-gépet, ami a következő $\Sigma = \{\texttt{a},\texttt{b}\}$ abc feletti nyelvet ismeri fel?

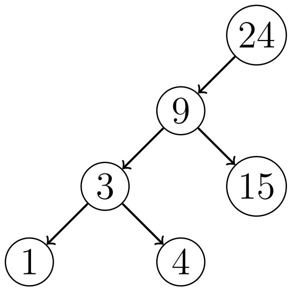
$$\texttt{ab(a+b)}^*$$

3. Adjon egy 4SZÍN $\prec$ 5SZÍN Karp-redukciót!
(A 4SZÍN ill. 5SZÍN a 4 ill. 5 színnel színezhető gráfok nyelvét jelöli.)

4. Egy f fokú létrán bizonyos fokok annyira rozogák, hogy ha rálépünk, leszakadnak. Szerencsére tudjuk, hogy melyik fokok ilyenek, hova nem szabad lépnünk. Egy lépéssel legfeljebb 3 fokot tudunk lépni. Adjon $O(n)$ lépésszámú algoritmust ami meghatározza, hogy a létra aljától hányféleképpen tudunk feljutni a létra legfelső fokára!
(Feltehető, hogy a legfelső fokra rá szabad lépni.)

5. Adott egy különböző egész számokból álló $A[1:n]$ tömb illetve egy szintén (nem feltétlenül különböző) egész számokból álló $B[1:m]$ tömb. Minden $B[i]$ elemről el akarjuk dönteni, hogy szerepel-e az A tömbben. Ez megtehetjük úgy is, hogy minden B-beli elemre végrehajtunk egy lineáris keresést, vagy pedig úgy is, hogy először rendezzük az A elemeit, majd ebben keresünk binárisan.
(a) Melyik módszer összideje lesz kevesebb, ha $m = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$?
(b) És ha $m = \lfloor\sqrt{\log n}\rfloor$?

6. Az ábrán egy bináris keresőfa látható, melyet naiv beszúrásokkal építettünk. Milyen sorrendben végezhettük a beszúrásokat? Hányféle lehetséges sorrend van?



7. A 3KLASZTER nyelv azon (G,k) $(k \geq 0)$ párokból áll, ahol G egy teljes gráf, melynek minden éléhez egy $d(e)$ súly van rendelve és G csúcsai particionálhatóak 3 osztályba úgy, hogy egy osztályon belül belül bármely él súlya legfeljebb k. (Különböző osztálybeli pontok között bármilyen súlyú él futhat.) Bizonyítsa be, hogy a 3KLASZTER nyelv NP-teljes!

Algoritmuselmélet Vizsga 3.

2018. június 14.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. Minden megoldást indokoljon! Minden feladat egységesen 10 pontot ér. Az elégséges megszerzéséhez minimum 24 pontot kell elérni.

1. Bizonyítsa be, hogy $\sqrt{2n^2+3n+15} \in O(n)$ teljesül!

2. Adjon veremautomatát, ami a következő nyelvet ismeri fel:

$$L = \{(ab)^n (a+b)^{2n} \mid n \geq 0\}.$$

   Vázolja az automata működését és adja meg az átmeneti szabályokat vagy rajzoljon diagramot!

3. Legyen G egy egyszerű, összefüggő, irányított gráf, melyben az e él hosszát $l(e)$, a költségét $c(e)$ jelöli. Minden élre mindkét érték nemnegatív. Tekintsük azon (G, s, t, h, k) alakú szavak L nyelvét, melyekben $s, t \in V(G)$ és van olyan út s és t között, melynek összhossza legfeljebb h, valamint összköltsége legfeljebb k. Bizonyítsa be, hogy $L \in \mathrm{NP}$.

4. Egy $n \times n$ méretű táblázat mezőin lépkedünk a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba úgy, hogy egy lépésben a táblázatban vagy felfelé vagy jobbra egyet lépünk, de van néhány ,,tiltott" mező, ahova nem léphetünk. Adjon egy dinamikus programozást használó eljárást, ami meghatározza, hogy hányféleképpen érhetünk célba! Mi az algoritmus lépésszáma?

5. Az $A[1:n]$ egy természetes természetes számokból álló tömb. Szeretnénk ellenőrizni, hogy az elemek rendezetten vannak-e tömbben. Olyan algoritmust adjon, ami minimális számú összehasonlítást használ. Hány összehasonlítást használ egy ilyen algoritmus? (Azt is be kell látni, hogy nincs ennél kevesebb összehasonlítást használó algoritmus. Azt nem kell eldöntenie az algoritmusnak, hogy növekvő, vagy csökkenő sorrendben vannak-e rendezve.)

6. Egy 7 méretű hash táblába a $h(x) = x \pmod 7$ hash függvénnyel szúrunk be elemeket. Az ütközéseket kettős hasheléssel oldjuk fel a $h'(x) = 5 - (x \pmod 5)$ másodlagos hash függvény segítségével. A táblába a $19, 26, 38, 33, 31$ elemeket szúrjuk be, ebben a sorrendben. Adja meg a hash tábla állapotát minden beszúrás után!

7. Adott egy -10^{10} és 10^{10} közötti egész számokból álló $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozat. Adjon olyan $O(n)$ futásidejű algoritmust, ami eldönti, hogy van-e olyan $i < j$ indexpár, melyre $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j = 0$ teljesül!

Algoritmuselmélet Vizsga 4.

2018. június 21.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. Minden megoldást indokoljon! Minden feladat egységesen 10 pontot ér. Az elégséges megszerzéséhez minimum 24 pontot kell elérni.

1. Legyenek $f(n)$ és $g(n)$ pozitív egészekről pozitív egészekre képező függvények. Bizonyítsa be, hogy ha $f(n) \in O(g(n))$ fennáll, akkor $g(n) \in \Omega(f(n))$ is teljesül.

2. Adjon CF-nyelvtant ami következő nyelvet generálja:
$$\{\mathtt{0}^i\mathtt{1}^j\mathtt{0}^k \mid i,j,k \geq 0; j > i + k\}$$

3. A MOD-RH nyelv a következő problémából szokásos módon származtatott nyelv:

   Bemenet: $s_1, s_2, \ldots, s_n$ természetes számok
   Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i$ osztható 3-mal?

   Vagy azt bizonyítsa be, hogy MOD-RH P-beli, vagy azt, hogy NP-teljes.

4. Legyen $s_1s_2\ldots s_n$ és $t_1t_2\ldots t_m$ egy n és egy m hosszú karaktersorozat. Azt szeretnénk, hogy az $n \times m$ méretű A mátrix $A[i, j]$ eleme tartalmazza azt a legnagyobb k számot, melyre az $s_1s_2\ldots s_i$ és a $t_1t_2\ldots t_j$ sorozatok utolsó k karaktere megegyezik. Adjon eljárást, ami az A tömböt $O(nm)$ lépésben kitölti.

5. Egy tányérra n különböző átmérőjű, kör alakú palacsinta van felhalmozva véletlenszerű sorrendben. Szeretnénk a palacsintákat alulról felfelé növekvő sorrendbe rendezni. Ehhez egyféle műveletet használhatunk: egy lapáttal benyúlunk bármely palacsinta alá és a felette levő kupacot fejjel lefelé fordítva visszatesszük a kupacra. Adjon olyan algoritmust, ami minden esetben legfeljebb $2n - 3$ művelettel elvégzi a feladatot!

6. A vödrös hash-elésnél az egyes vödrök tartalmát lapok egy-egy láncolt listájában tároljuk. Legyen a vödörkatalógus mérete M és a hash táblában tárolt lapok összes száma L.
   (a) Legrosszabb esetben nagyságrendileg hány lépést kell tennünk egy keresés során?
   (b) Legrosszabb esetben nagyságrendileg hány lépést kell tennünk egy beszúrás során?
   Most tároljuk az egyes vödrök tartalmát láncolt lista helyett egy-egy 2-3-fában.
   (c) Legrosszabb esetben nagyságrendileg hány lépést kell tennünk egy keresés során?
   (d) Legrosszabb esetben nagyságrendileg hány lépést kell tennünk egy beszúrás során?

7. Egy irányított gráf maximális aciklikus részgráfja egy olyan részgráf, amiben nincs irányított kör és a lehető legtöbb élet tartalmazza. Adjon polinomiális futásidejű 2-közelítő algoritmust egy ilyen részgráf megtalálására (vagyis az algoritmus által talált aciklikus részgráf élszámának legfeljebb 2-szerese az elérhető maximum)!