

1. Futtassa le a DFS-MAIN(G)-t az alábbi (szomszédossági listával adott) irányított gráfban úgy, hogy a csúcsok és a szomszédok vizsgálatakor az éllistában adott sorrendet követi! Adja meg a csúcsok mélységi és befejezési számát is! **1:** 3, 4, 5; **2:** 1, 5, 7, 6; **3:** 2, 4, 6; **4:** 5; **5:** 3, 1; **6:** –; **7:** 5 (*Eddig a múlt gyakorlaton már megcsináltuk.*)
Mely élek lesznek faélek? Mely élek lesznek előreélek, visszaélek és keresztélek?
 2. Éllistájukkal adottak az alábbi G_1 és G_2 irányított gráfok.
 G_1 : **a:**b(3),c(8); **b:**d(-7); **c:**d(5); **d:**e(2); **e:**a(-10);
 G_2 : **a:**g(2),f(10); **b:**a(-2),g(1); **c:**–; **d:**–; **e:**c(5),d(6); **f:**e(7); **g:**f(1), e(8);
(a) Döntsük el mélységi bejárás segítségével erről a két gráfról, hogy DAG-e.
(b) Amelyik gráf DAG, abban adjunk meg egy topologikus sorrendet és határozzuk meg az a jelű csúcsból a többi csúcsba vezető legrövidebb utak hosszát.
 3. Egy éllistával adott irányított G gráfban néhány csúcs piros, néhány csúcs kék, a többi csúcs pedig szintelen. (A színezés egy, a csúcsokkal indexelt C tömbben adott). Melyik tanult algoritmus egyszeri futásával lehet $O(n + m)$ lépésben megoldani az alábbi feladatokat és hogyan?
(a) El akarjuk dönteni, hogy az egyik adott p_1 piros csúcsból mik az elérhető kék csúcsok.
(b) Egy adott piros p_1 csúcsból meg akarjuk keresni a legközelebbi kék csúcsot(ka)t.
-
4. Egy hat pontú irányított gráf csúcsait egy mélységi bejárás a, c, f, e, d, b sorrendben járja be, a befejezési számok pedig ezek: a : 6; b : 5; c : 4; d : 3; e : 2; f : 1.
Lehetséges-e, hogy a gráfban van él (a) f -ből e -be? (b) d -ből e -be?
 5. Éllistájával adott egy G irányított gráf, amiben nincsen irányított kör. Adott továbbá a gráf egy s csúcsa és szeretnénk meghatározni a gráf összes v csúcsa esetén az s -ből v -be vezető utak számát. Adjon erre a feladatra $O(n + m)$ lépésszámú algoritmust.
 6. A 3. feladat folytatása:
(c) El akarjuk dönteni, hogy mindegyik kék csúcs elérhető-e legalább egy pirosból (azaz igaz-e, hogy minden kék csúcsra van olyan piros csúcs ahonnan ő elérhető).
(d) Meg akarjuk keresni a legrövidebb olyan utat a gráfban, ami piros csúcsból kék csúcsba vezet.
 7. Cirkuszi akrobaták egymás vállára állva minél nagyobb tornyot szeretnének létrehozni (a toronyban minden szinten csak egy akrobata lesz). Esztétikai és gyakorlati szempontok miatt egy ember vállára csak olyan állhat, aki nála alacsonyabb és könnyebb is. A cirkuszban n akrobata van, adott mindegyikük magassága és súlya.
(a) Adjon algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legtöbb emberből álló torony összeállítását.
(b) Adjon algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legmagasabb torony (hány centiméter magas) összeállítását.
-
8. Egy irányított G gráfban hagyjuk el a forrásokat ($d_{be}(v) = 0$) és a nyelőket ($d_{ki}(v) = 0$). A maradék gráfban ismét hagyjuk el a forrásokat és a nyelőket, ezt ismételjük, amíg lehet. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor kapunk üres gráfot, ha G -ben nincs irányított kör!
 9. Legyen adott egy $n \times n$ pixelből álló fekete-fehér kép. Szeretnénk a képen a bal felső saroktól a jobb alsó sarokig egy jobbra-lefele haladó határvonalat húzni úgy, hogy a vonaltól jobbra-felfele eső fekete, valamint a vonaltól balra-lefele eső fehér pixelek számának az összege a lehető legkisebb legyen. Oldjuk meg ezt a feladatot $O(n^2)$ időben!
 10. Egy városban 1000 ember lakik, mindenki minden nap elmondja az ismerőseinek az összes előző nap megtudott hírt (Az ismeretségek kölcsönösek.) Tudjuk, hogy olyan az ismeretségek hálózata, hogy előbb-utóbb mindenki megtud mindent. Bizonyítsuk be, hogy van 90 olyan ember, hogy ha ők egyszerre megtudnak valamit, akkor legkésőbb 10 nap múlva mindenki megtudja!

11. A 10. feladat megoldására a ChatGPT a következő választ adta. Vizsgáld meg, hogy jó-e ez a megoldás!

ChatGPT: Tekintsük a várost egy **gráfként**, ahol a csúcsok az embereket, az élek pedig az ismeretségeket reprezentálják. Mivel mindenki minden nap elmondja az összes eddig megtudott hírt az ismerőseinek, a hírterjedés egy **diszkrét dinamikus folyamat** a gráfon. Az adott feltétel szerint a gráf **erősen kapcsolt**, azaz előbb-utóbb mindenkihez eljut minden hír.

A hírterjedés sebessége

Egy ember egy nap alatt az összes ismerősének továbbadja a hírt. Ez azt jelenti, hogy ha egy adott napon egy csúcshalmaz birtokában van egy hírnek, akkor a következő napra a szomszédai is megkapják azt. A terjedés egy **hullámszerű folyamat**, amely naponta egy-egy lépésben halad előre a gráfban.

A terjedési idő becslése

A hírterjedés maximális idejét a gráf **átmérője** becsüli meg. Az átmérő, jelölve mint D , a **leg-hosszabb legrövidebb út** a gráf bármely két csúcsa között:

$$D = \max_{u,v \in V} d(u,v), \quad (1)$$

ahol $d(u,v)$ az u és v közötti legrövidebb út hossza. Kisvilág-hálózatok esetében, mint az emberi kapcsolatok hálózata, az átmérő tipikusan kicsi, azaz $O(\log n)$. Mivel $n = 1000$, az átmérő jellemzően 6 és 10 között van.

Létezik 90 fős kezdőcsoport 10 lépéses lefedéssel

A célunk az, hogy találjunk **90 olyan embert**, akik egy hír megtudásakor **legfeljebb 10 nap alatt mindenkihez eljuttatják azt**.

Mivel a gráf átmérője legfeljebb 10, minden ember legfeljebb 10 lépésre van a hálózat többi tagjától. Ha tehát egy adott pillanatban egy jól elosztott S méretű halmaz, ahol $|S| = 90$, egyszerre birtokolja a hírt, akkor a hír az átmérőnyi idő alatt az egész hálózatban elterjed.

Mivel a 90 fős csoportot úgy választhatjuk meg, hogy megfelelő lefedést adjon a hálózatban, biztosítható, hogy az információ legfeljebb 10 lépés alatt elér mindenkit.

Következtetés

Mivel a gráf átmérője legfeljebb 10, és létezik egy olyan 90 fős kezdőcsoport, amely hatékonyan lefedi a hálózatot, következik, hogy ha ez a 90 ember egy adott napon megtud egy hírt, akkor **legfeljebb 10 nap múlva mindenkihez eljut**. Ez bizonyítja az állítást.