1. Igazolja, hogy léteznek az alábbi Karp-redukciók! (a) RH $\prec$ HAM (b) ÖSSZEFÜGGŐ $\prec$ 3SAT (c) ÖSSZEFÜGGŐ $\prec$ PÁROS

   (ÖSSZEFÜGGŐ az összefüggő gráfok nyelve, PÁROS meg a páros gráfoké)

   Megoldás: (a) RH $\in$ NP (sőt, NP-teljes), HAM NP-teljes, tehát a Karp-redukció az NP-teljesség definíciója miatt létezik.

   (b) ÖSSZEFÜGGŐ $\in$ P $\subseteq$ NP és 3SAT NP-teljes, tehát a Karp-redukció az NP-teljesség definíciója miatt létezik.

   (c) ÖSSZEFÜGGŐ $\in$ P és PÁROS $\in$ P is teljesül. Legyen a Karp-redukció a következő: ha az x bemenet nem gráf, akkor $f(x) = x$, különben pedig ellenőrizzük, hogy a megadott gráf összefüggő. Ha igen, akkor legyen $f(x)$ egy él, különben meg egy háromszög. Mivel az összefüggőség polinom időben eldönthető, ezért ez az f polinom időben számolható. Ha a gráf összefüggő, akkor a képe (egyetlen él) páros gráf, ha meg nem összefüggő, akkor a képe K_3, ami nem páros gráf.

2. Igazolja, hogy ha co NP $\neq$ NP, akkor MAXKLIKK $\notin$ P.

   Megoldás: Indirekt tegyük fel, hogy MAXKLIKK $\in$ P. Mivel tudjuk, hogy MAXKLIKK NP-teljes, ezért minden $L' \in$ NP nyelvre teljesül, hogy $L' \prec$ MAXKLIKK, amiért $L' \in$ P is igaz. Tehát NP $\subseteq$ P, amiből persze következik NP = P is.

   Ha NP = P, akkor co NP = co P is igaz. De mivel co P = P, ezért co NP = NP is teljesül, ami viszont ellentmondás.

3. Mutassa meg, hogy az alábbi nyelvek NP-teljesek!

   (a) az olyan G gráfokból álló nyelv, amelyek kiszínezhetőek 3 színnel úgy, hogy mindegyik színt ugyanannyiszor használjuk.

   (b) az olyan (G, a, b, k) négyesekből álló nyelv, ahol G egy irányítatlan gráf, $a, b \in V(G)$, $k > 0$ egész szám és G-ben van olyan út a és b között, aminek a hossza legalább k.

   (c) az olyan (G, a, b) hármasokból álló nyelv, ahol G egy irányítatlan gráf, $a, b > 0$ egész számok és a G gráfnak van a $K_{a,b}$ teljes páros gráffal izomorf feszített részgráfja.

   (d) az olyan G irányítatlan gráfokból álló nyelv, amelyekre G-ben van olyan C kör, hogy minden $v \notin C$ csúcs össze van kötve éllel a C valamely csúcsával.

   (e) az olyan G irányítatlan gráfokból álló nyelv, amelyekre G-ben van olyan C kör aminek hossza legalább G csúcsszámának fele.

   (f) az olyan Boole-formulákból álló nyelv, amelyek két különböző értékadással is kielégíthetőek.

   Megoldás: (a) Könnyen látszik, hogy ez az L nyelv NP-beli, tanú egy megfelelő színezés. Az NP-nehézség bizonyításához megadunk egy 3SZÍN $\prec L$ Karp-redukciót. Ha G egy v pontú gráf, akkor $G' = f(G)$ legyen az a gráf, amit G-ből $2v$ db izolált pont hozzávételével kapunk. Ez nyilván kiszámítható polinom időben. Ha G színezhető 3 színnel úgy, hogy az i-edik színt k_i-szer használjuk, akkor G' kiszínezhető 3 színnel a feltételeknek megfelelően a következő módon: G pontjait ugyanúgy színezzük, az izolált pontok közül pedig $v - k_i$-t színezünk az i-edik színnel. Ebben a színezésben egyrészt minden pontot kiszíneztünk, hiszen $v - k_1 + v - k_2 + v - k_3 = 3v - (k_1 + k_2 + k_3) = 2v$. Másrészt minden színt épp v-szer használtunk.

   Ha viszont G' kiszínezhető 3 színnel a feltételeknek megfelelően, akkor ez megad egy jó színezést G pontjain.

   (Formálisan a függvénynek azon szavakhoz is kell rendelni valamit, amik azért nincsenek benne a 3SZÍN *nyelvben, mert nem írnak le gráfot. Ha az ilyen x szavakra $f(x) = x$, az minden esetben megfelelő, hiszen $x \notin L$ is teljesülni fog. Ezért erre nem szükséges mindig külön kitérni.)*

   (b) *Vázlatosan:* NP-beli, mert tanú egy ilyen út. NP-nehéz: Adunk egy HAMÚT $\prec L$ Karp-redukciót: G-hez adjunk 2 új pontot, ezek legyenek a és b, kössük össze őket G minden csúcsával és legyen $k = V(G) + 1$. Belátható, hogy ez teljesíti a feltételeket.

(c) Az, hogy ez az L nyelv NP-ben van egyszerűen látható a tanú tétel alapján: tanú lehet a megfelelő részgráf pontjainak felsorolása. Ez nyilván polinom hosszú, és polinom időben ellenőrizhető is, hogy a megadott pontok egy páros gráfot feszítenek.

Az NP-teljesség bizonyításához egy ismert NP-teljes nyelvet kell visszavezetni L-re. Itt mutatunk egy MAXFTL $\prec L$ Karp-redukciót. A MAXFTL bemenetei (G, k) alakúak, ahol G egy gráf, k pozitív egész. Készítsük el belőle a $(G', k, 2)$ bemenetet, ahol G' úgy keletkezik a G-ből, hogy hozzáveszünk 2 csúcsot, melyeket összekötünk G csúcsaival (de egymással nem). Ez polinom időben megoldható.

Vegyük észre, hogy ha G-ben van k független pont, akkor ezek és a két új pont egy feszített $K_{k,2}$ gráfot adnak G'-ben, azaz ha $(G, k) \in$ MAXFTL, akkor $(G', k, 2) \in L$. Másrészt, ha G'-ben van feszített $K_{k,2}$ és $k \geq 2$, akkor ennek a k oldala biztos, hogy az eredeti G-ben helyezkedik el, azaz van G-ben k független pont. (A $k = 1$ eset triviálisan eldönthető polinom időben, ilyenkor feleltessünk meg neki egy triviálisan L-ben levő bemenetet.)

(2 pont helyett elég 1 pontot hozzávenni, akkor a $K_{k,1}$ páros gráf létezése a kérdés.)

(d) Az, hogy ez a nyelv NP-ben van világos, hiszen a nyelvbe tartozásra tanú egy megfelelő C kör csúcsainak a kör szerinti sorrendben való felsorolása. Ez polinom hosszú, és annak ellenőrzése, hogy a megadott pontok az adott sorrendben kört alkotnak, illetve, hogy minden további csúcs össze van kötve a kör egy pontjával ellenőrizhető $O(c + v^2) = O(v^2)$ lépésben (itt c a kör hossza, v a gráf csúcsainak száma).

Az NP-teljességhez mutatunk egy HAM $\prec L$ Karp-redukciót. Egy tetszőleges G gráfból készítsük el azt a G' gráfot, amiben G-t úgy egészítjük ki, hogy minden v_i csúcsához felveszünk egy új w_i csúcsot, amit összekötünk v_i-vel (és mással nem). Ezzel a csúcsok számát megdupláztuk, az új gráf szomszédossági mátrixa polinom időben előállítható. (Hogy néz ki az új mátrix?)

Ha a G gráfban van Hamilton-kör, akkor ez a kör olyan, amilyennek G'-ben lenni kell, tehát ha $G \in$ HAM, akkor $G' \in L$. Másrészt ha $G' \in L$, akkor a feltételnek megfelelő C kör nem tartalmazhat egyet sem a w_i pontokból, mert ezek fokszáma 1, ahhoz meg, hogy ezek mindegyike össze legyen kötve a körrel, a C-nek az összes v_i-t tartalmaznia kell, azaz C egy Hamilton-kör G-ben, tehát ha $G' \in L$, akkor $G \in$ HAM teljesül.

(e) Az, hogy ez a nyelv NP-ben van világos, hiszen a nyelvbe tartozásra tanú egy megfelelő C kör csúcsainak a kör szerinti sorrendben való felsorolása. Ez polinom hosszú, és annak ellenőrzése, hogy a megadott pontok az adott sorrendben kört alkotnak, illetve a hossza megfelelő, nyilván elvégezhető polinom időben.

Az NP-teljességhez mutatunk egy HAM $\prec L$ Karp-redukciót. Egy tetszőleges G gráfból készítsük el azt a G' gráfot, amiben G-hez hozzáveszünk $|V(G)|$ darab izolát pontot, így $|V(G')| = 2|V(G)|$. Ha G-ben van Hamilton-kör, akkor ez G' pontjainak épp felét tartalmazza. Ha G'-ben van olyan kör, ami pontjainak legalább felét tartalmazza, akkor ez kör G minden pontját tartlamazza, hiszen az iolált pontokon nem mehet át kör. Így viszont G-ben ez egy Hamilton-kör lesz.

Megjegyzés: Az is jó, ha G'-t úgy konstruáljuk, hogy két komponensből álljon, mindekettő G-vel izomorf.

(f) A nyelv NP-ben van, hiszen megfelelő tanú 2 különböző értékadás. Ezek megfelelő voltát nyilván lehet ellenőrizni polinom időben.

Az NP-teljességhez mutatunk egy SAT $\prec L$ Karp-redukciót. Ha ϕ egy tetszőleges Boole-formula, akkor legyen $\phi' = \phi \wedge (y \vee \overline{y})$, ahol y egy olyan változó, ami nem szerepel ϕ-ben. Ha ϕ kielégíthető, akkor ϕ'-nek lesz két különböző kielégítése, hiszen y értékét választhatjuk igaznak és hamisnak is. Ha ϕ'-nek kielégíthető, akár már egyféleképpen is, akkor nyilván ϕ is.

4. Tegyük fel, hogy P $\neq$ NP és $L_1 \in$ P. Lehetséges-e, hogy
   (a) egy NP-teljes L_2 nyelvre L_1 Karp-redukálható?
   (b) egy NP-teljes L_2 nyelv Karp-redukálható L_1-re?
   (c) az L_1 nyelv NP-beli?

Megoldás: (a) $L_1 \in \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, tehát az NP-teljesség definíciója miatt biztos, hogy $L_1 \prec L_2$.

(b) Ha $L_2 \prec L_1$ és L_2 NP-teljes, akkor L_1 is az, mivel $L_1 \in \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$. Ebből $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ következne, tehát a feltevés miatt ez nem lehetséges.

(c) Mivel $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, ezért $L_1 \in \mathrm{NP}$ biztosan igaz.

5. Tekintsük azt a problémát, hogy egy adott G irányítatlan súlyozott gráfban mekkora a maximális súlyú út súlya! Adja meg, mi lesz az ehhez tartozó nyelv, és lássa be, hogy az NP-teljes!

Megoldás: Egy eldöntési problémává kell átalakítani. Maximum-keresési feladatoknál ezt úgy jó csinálni, hogy azt kérdezzük, van-e elég nagy megoldás. Tehát az L nyelv az olyan (G, k) párokból álljon, ahol G egy irányítatlan súlyozott gráf, k egy szám és G-ben van olyan út, melynek súlya legalább k.

$L \in \mathrm{NP}$, mert tanú lehet egy jó út, pontosabban a pontjainak az út szerinti sorrendben való felsorolása. Ez polinom hosszú. Amit ellenőrizni kell, hogy valóban egy utat határoznak meg és hogy ennek összsúlya legalább k, ami megy polinom időben.

Az NP-teljességhez visszavezetünk rá egy NP-teljes nyelvet: HAMÚT $\prec L$. Egy tetszőleges G gráfból úgy kapjuk a G' súlyozott gráfot, hogy minden él súlya legyen 1. Legyen $f(G) = (G', k)$, ahol $k = n - 1$ és n a G csúcsainak száma. Ez Karp-redukció, mert polinom időben számolható (a gráf mátrixán nem is kell változtatni, elég a k értékét kiszámolni). Továbbá világos, hogy pontosan akkor van Hamilton-út a gráfban ha van legalább $n - 1$ súlyú út G'-ben (igazából pontosan $n - 1$ súlyú lesz az út, mert ennél több élből nem állhat).

6. S-T-HAMÚT jelöli az olyan (G, s, t) hármasokból álló nyelvet, ahol a G irányítatlan gráf s és t csúcsa között van Hamilton-út. Igazolja, hogy az alábbi nyelvekre az S-T-HAMÚT nyelvről van Karp-redukció!
   (a) HAMÚT: a Hamilton-úttal rendelkező gráfok nyelve
   (b) HAM: a Hamilton-körrel rendelkező gráfok nyelve

Megoldás: Vegyük észre, hogy a feladat nem kéri, hogy adjunk meg Karp-redukciót, elegendő a létezését megmutatni!

HAMÚT és HAM is NP-teljes, az NP-teljesség definíciója miatt elegendő belátni, hogy S-T-HAMÚT $\in$ NP. Ez azért teljesül, mert jó tanú egy s-ből t-be vezető út csúcsainak felsorolása az út szerinti sorrendben. Egy ilyen tanú hossza $O(n \log n) \subset O(n^2)$, ami polinomiális ($n$ a gráf csúcsainak száma). Az ellenőrzése meg abból áll, hogy valóban a gráf különböző csúcsait soroltuk fel, melyek közül az első az s, az utolsó a t, és a felsorolásban szomszédos csúcsok között van él, ami a felsorolás hosszában lineáris, azaz a bemenet hosszában polinomiális lépésben megoldható.

7. Bizonyítsa be, hogy a S-T-HAMÚT nyelv NP-teljes!

Megoldás: Már láttuk az előző feladatban, hogy NP-beli. Most megadunk egy HAM $\prec$ S-T-HAMÚT Karp-reduckciót.

Egy tetszőleges $G(V, E)$ gráfhoz készítsük el a (G', s, t) hármast a következőképpen: Válasszuk ki egy csúcsát G-nek, ez lesz s. A G' csúcshalmazát egészítsük ki egy új elemmel, $V' = V \cup \{t\}$. A G'-ben megtartjuk a G éleit, az új t csúcs szomszédai egyezzenek meg az s szomszédaival, $E' = E \cup \{\, \{t, v\} \mid \{s, v\} \in E\}$. Ez a konstrukció polinom időben elvégezhető (a mátrixhoz egy új sort és oszlopot kell hozzávenni, amelyek megegyeznek s sorával, oszlopával).

Még azt kell megmutatni, hogy $G \in \mathrm{HAM} \Leftrightarrow (G', s, t) \in$ S-T-HAMÚT. Ha $G \in$ HAM, akkor ha G'-ben elkezdjük ezt a Hamilton-kört s-ből követni, de az utolsó éllel nem s-ben bezárjuk, hanem a megfelelő új éllel t-be lépünk, akkor a G' egy s-ből t-be vivő Hamilton-útját kapjuk. Visszafelé pedig, a G' egy s és t pontot összekötő Hamilton-útjából úgy kaphatjuk G egy Hamilton-körét, ha az út utolsó éle helyett a neki megfelelő éllel az s-be lépünk G-ben.

8. Az alábbi problémák mindegyikében a bemenet egy $G(V,E)$ irányítatlan gráf és a gráf pontjainak egy $S \subseteq V$ részhalmaza. Határozza meg, melyik esetben kapunk P-beli, mikor NP-teljes problémát!

   (a) **Kérdés:** Van-e olyan feszítőfa G-ben, melyben S minden eleme levél?

   (b) **Kérdés:** Van-e olyan feszítőfa G-ben, melynek levelei pontosan az S-beli pontok?

   (c) **Kérdés:** Van-e olyan feszítőfa G-ben, melynek levelei az S-beli pontok közül valók?

   Megoldás: Csak vázlatosan:

   (a) Pontosan akkor lehet S minden eleme levél, ha S pontjait elhagyva van feszítőfa és ehhez az S-beli csúcsok egyenként csatlakoznak, azaz $G - S$ összefüggő és minden S-beli csúcsból van él egy nem S-belibe. Ez a tulajdonság ellenőrizhető polinom időben, tehát $L \in$ P.

   (b) Ez NP-teljes, hiszen ha $S = \{s,t\}$, akkor az a kérdés, van-e olyan feszítőfa, aminek csak két levele van s és t, azaz, hogy van-e s és t közötti Hamilton-út, ami egy NP-teljes probléma.

   (c) Itt tehát nem kell, hogy S minden eleme levél legyen. Ez viszont nem segít az előző esetben, amikor $S = \{s,t\}$, hiszen legalább két levele biztos van a fának. Tehát ez is NP-teljes.