1. Bizonyítsa be, hogy ha f_1,f_2,g_1,g_2 pozitív függvények és $f_1(n) \in O(g_1(n))$ és $f_2(n) \in O(g_2(n))$, akkor
   (a) $f_1(n) + f_2(n) \in O(\max(g_1(n),g_2(n)))$,
   (b) $f_1(n)f_2(n) \in O(g_1(n)g_2(n))$.

2. Az alábbi függvények közül melyikre igaz, hogy $O(n^2)$?
   $f_1(n) = 11n^2 + 100000$ $\quad f_2(n) = 8n^2 \log_2 n$ $\quad f_3(n) = 1{,}5n + 3\sqrt{n}$

3. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n méretű bemeneteken $L(n)$. Tegyük fel, hogy az algoritmus szerkezetéből következik, hogy $L(n) \le 2\,L(\frac{n}{2}) + n$ ha $n \ge 2$ és $L(1) = 1$. (Tegyük fel, hogy $n = 2^k$, azaz n 2-hatvány.)

   Lássa be, hogy ekkor $L(n) \in O(n \log n)$. Igaz-e, hogy $L(n) \in O(n^2)$?

4. Az alábbi függvényeket rendezze nagyságrend szerint nem csökkenő sorozatba: ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) \in O(f_j(n))$ teljesüljön!
   $f_1(n) = 8n^3$ $\quad f_2(n) = 5\sqrt{n} + 1000n$ $\quad f_3(n) = 2^{(\log_2 n)^2}$ $\quad f_4(n) = 1514n^2 \log_2 n$

5. Az alábbi pszeudokódban egy $*$ kiírása számít lépésnek. Mutassa meg, hogy a kód lépésszáma $O(n^3)$.

```
for i = 0 to n-1:
    for j = i+1 to n:
        print  j  darab *
```

6. Adjon O becslést a következő függvényekre:
   $(n^2 + 8)(n + 1)$ $\quad (n \log n + n^2)(n^3 + 2)$ $\quad (n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2 + 1))$ $\quad (2^n + n^2)(n^3 + 3^n)$

7. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n méretű bemeneteken $L(n)$. Adjunk felső becslést az $L(n)$ nagyságrendjére, ha tudjuk, hogy $L(1) = 2$ és $n > 1$ esetén
   (a) $L(n) = L(n-1) + 3$
   (b) $L(n) = L(n-1) + 5$
   (c) $L(n) = L(n-1) + 3n$
   (d) $L(n) = 2L(n-1) + 3$
   (e) $L(n) = L(\lceil n/2 \rceil) + 3$
   (f) $L(n) = L(\lceil n/2 \rceil) + n^k$
   (g) $L(n) = 2L(\lceil n/2 \rceil) + 3$
   (h) $L(n) = 4L(\lceil n/2 \rceil) + 3$

   Az (e)-(h) esetben elegendő 2 hatványra meggondolni.

   Mi változik, ha egyenlőség helyett $\le$ vagy $\ge$ áll?

8. Mely $a, b > 1$ egész számokra teljesülnek az alábbiak?
   $n^a \in O(n^b)$ $\quad 2^{an} \in O(2^{bn})$ $\quad \log_a n \in O(\log_b n)$

9. Tekintsük az $f_1(n) = 1{,}5\,n!$ és $f_2(n) = 200\,(n-1)!$ függvényeket. Melyik igaz és melyik nem az alábbiak közül?
   $f_1 \in O(f_2)$ $\quad f_2 \in O(f_1)$ $\quad f_1 \in \Omega(f_2)$ $\quad f_2 \in \Omega(f_1)$ $\quad f_1 \in \Theta(f_2)$ $\quad f_2 \in \Theta(f_1)$

10. Az egyszerű algoritmussal, illetve a gyorskereséssel állapítsa meg, hogy az $S = ABBABACABCBAC$ szövegben az $M = ABABC$ minta hányszor fordul elő! Hány összehasonlítást használtak az algoritmusok?

11. Az $n > 2$ hosszú csupa 0-ból álló szöveghez adjon meg olyan m hosszú mintát, melyen az egyszerű algoritmus m-től függetlenül $O(n)$ összehasonlítást használ!

12. Igazolja, hogy az egyszerű algoritmus várható futási ideje $O(n)$, ha a szöveg és a minta is véletlen 0/1 sorozat (a bitek egymástól függetlenek, mindegyik $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel 0 vagy 1).
    Mi a helyzet, ha csak a minta véletlen?