

1. Rendezze a 3, 12, 1, 34, 4, 6, 0 számsorozatot beszűrásos rendezéssel! Hány összehasonlításra volt szükség?

Megoldás: A beszűrásos rendezésnek két fajtája van: amikor lineárisan és amikor binárisan keresünk. A beszűrásoként kapott sorozatok ugyanazok, de az összehasonlítások száma eltérhet.

Az eljárás az, hogy az i -edik elemet szűrjük be a már rendezett első $i - 1$ elem közé, tehát a sorozat az egyes lépésekben így alakul: $(3, \mathbf{12}, 1, 34, 4, 6, 0) \rightarrow (3, 12, \mathbf{1}, 34, 4, 6, 0) \rightarrow (1, 3, 12, \mathbf{34}, 4, 6, 0) \rightarrow (1, 3, 12, 34, \mathbf{4}, 6, 0) \rightarrow (1, 3, 4, 12, 34, \mathbf{6}, 0) \rightarrow (1, 3, 4, 6, 12, 34, \mathbf{0}) \rightarrow (0, 1, 3, 4, 6, 12, 34)$.

Az összehasonlítások száma lineáris keresésnél (úgy hangzott el, hogy hátulról keresünk): $1 + 2 + 1 + 3 + 3 + 6 = 16$, bináris keresésnél: $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$.

2. Rendezze a 7, 3, 15, 1, 5, 4, 8, 2 sorozatot gyorsrendezéssel úgy, hogy mindig a tömb első elemét választja particionáló elemnek!

Megoldás: $(\mathbf{7}, 3, 15, 1, 5, 4, 8, 2) \rightarrow (\mathbf{3}, 1, 5, 4, 2, | 7 | \mathbf{15}, 8) \rightarrow (1, 2 | 3 | \mathbf{5}, 4, | 7 | 8 | 15) \rightarrow (1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 15)$

3. Adjon egy $O(n)$ időigényű algoritmust n olyan egész számból álló sorozat rendezésére, melynek elemei az

- (a) $\{1, \dots, 3n\}$ halmazból vannak!
- (b) $\{1, \dots, n^3 - 1\}$ halmazból vannak!

Megoldás: (a) Használjunk ládarendezést $3n$ ládával! Ekkor a lépésszám $O(n + 3n) = O(n)$.

(b) Az egyszerű ládarendezés itt nem elég, használjuk a radix rendezést! Képzeljük el a számokat az n alapú számrendszerben felírva. Ekkor mindegyik (legfeljebb) 3 jegyű. Ha ebben az alakban használjuk a radix rendezést, akkor 3 ládarendezés kell, mindegyiknél n láda, tehát az egész valóban $O(n)$ lépést használ.

Megjegyzés: Az n alapú számrendszerbe való átírás is megoldható $O(n)$ aritmetikai művelettel, hiszen minden számot maradékosan el kell osztani n -nel, a maradék adja az utolsó jegyet, a hányadost újra elosztjuk n -nel, az itteni maradék adja a következő számjegyet, a hányados meg az elsőt.

4. Az $A[1 : n]$ tömbben számokat tárolunk. Határozza meg $O(n \log n)$ lépésben

- (a) azokat az értékeket, amelyek egynél többször fordulnak elő;
- (b) a leggyakoribb értékeket (vagyis azokat, amelyeknél többször semelyik másik szám sem fordul elő a tömbben)!

Megoldás: (a) Ha a tömb rendezve van, akkor egyszerűbb a feladat, hiszen akkor az egyforma értékek egymás mellett vannak. Ezért először rendezzük a tömböt, például az összefésüléses rendezéssel, aminek lépésszáma $O(n \log n)$. Majd végigmegyünk a tömbön, és ha ugyanaz az érték több egymás utáni elemnél is előfordul, kiírjuk. Az algoritmusnak ez a része $O(n)$ lépés, tehát összesen $O(n \log n)$ lépést végzünk.

(b) Rendezzük a tömböt, mint előbb. Most azt kell meghatározni, hogy a rendezett tömbben melyik elem alkotja a leghosszabb blokkot. Ez egy számlálóval egyszerűen megoldható: nyilvántartjuk, hogy mennyi az eddigi legnagyobb blokk hossza, ott milyen érték volt, és számoljuk az aktuális blokk hosszát.

A rendezésen kívül itt is lineárisan sok lépés történik, ezért a lépésszám $O(n \log n)$.

5. Igazolja, hogy nincs olyan összehasonlításokkal rendező algoritmus, amelynél akármi is a bemenet, minden elem legfeljebb 2022 összehasonlításban szerepel!

Megoldás: Ha minden elem legfeljebb 2022 összehasonlításban szerepel, akkor az algoritmus az n elemmel összesen $2022n/2$ összehasonlítást végez. De tudjuk, hogy minden algoritmusnak kell legalább $\log n! = \Omega(n \log n)$ összehasonlítás, és $2022n/2 \notin \Omega(n \log n)$, tehát valóban nincs ilyen algoritmus.

6. Legyen adott egy egészekből álló $A[1 : n]$ tömb valamint egy b egész szám. Egy olyan $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexpárt keresünk, melyre $A[i] + A[j] = b$. Hogyan lehet ezt $O(n \log n)$ időben megoldani?

Megoldás: Vegyük észre, hogy ha minden lehetséges indexpárt ki akarunk próbálni, akkor $\binom{n}{2} \in \Theta(n^2)$ lehetőség van, ami több, mint a kívánt lépésszám.

Itt is sokat segít a rendezettség, ezért rendezzük a tömböt $O(n \log n)$ lépésben, pl. összefésüléssel.

Ez után az $i = 1, 2, \dots, n$ indexekre keressük a tömbben a $b - A[i]$ értéket. Ha ezt bináris kereséssel tesszük, akkor mindegyik keresés $\Theta(\log n)$ lépésszámú, tehát a lépésszám összesen $O(n \log n)$.

Megjegyzés: a rendezés utáni rész lineárisan is megoldható. Kiindulunk az $i = 1, j = n$ indexekből és általában, ha $A[i] + A[j] < b$, akkor az i értékét növeljük eggyel, ha pedig $A[i] + A[j] > b$ akkor a j értékét csökkentjük eggyel. Akkor hagyjuk abba, ha $A[i] + A[j] = b$ vagy ha $i > j$ lenne – ez utóbbi esetben nincs megoldás. (Miért?)

7. Az eredetileg növekvő a_1, \dots, a_n sorozatban egy elem értéke megváltozott, de nem tudjuk melyik. Hogyan lehet $O(n)$ lépésben újra növekvő sorrendbe rendezni az elemeket?

Megoldás: Vegyük észre, hogy ha a változtatás után is $a_i < a_{i+1}$ minden i -re, akkor bár nem tudjuk megállapítani, melyik változott, de erre nincs is szükség, a sorozat továbbra is rendezett.

Ha viszont van olyan i , melyre $a_i > a_{i+1}$, akkor ez úgy keletkezett, hogy a_i és a_{i+1} valamelyike változott, a_i nőtt vagy a_{i+1} csökkent. A legegyszerűbb (nem feltétlenül leggyorsabb) módszer, ha ezt a két problémás elemet beszúrjuk a többi elem által alkotott növekvő sorozatba. Ezt végezhetjük lineáris kereséssel, amikor $O(n)$ lépést végzünk. (Bináris keresésnél az összehasonlítások száma logaritmikus, de a mozgásokra akkor is elmehet lineárisan sok lépés.)

Megjegyzés: Egyetlen beszúrással is megoldható, hogyan?

8. Adjon minél kevesebb összehasonlítást használó algoritmust, ami n elem közül megtalálja a két legkisebbet!

Megoldás: Előbb a legkisebb, majd a többiből megint a legkisebb meghatározása $n - 1 + n - 2 = 2n - 3$ összehasonlítás. Ennél jobbat is kaphatunk. Gondoljunk egy kieséses bajnokságra. A győztes legyen a legkisebb. A második nyilván csak olyan lehet, akit a későbbi győztes vert ki (a többiekénél van legalább kettő nagyobb). Tehát a másodikra körönként egyetlen jelölt van. A bajnokság lebonyolítható $\log n$ körben, ennyi közül kell kiválasztani a másodikat, tehát a feladat összesen $n + \log n - 2$ lépésben megoldható.

9. Tudjuk, hogy az a_1, \dots, a_n sorozat olyan, hogy egy darabig növekszik, utána csökken. Adjon $O(n)$ összehasonlítást használó algoritmust, ami növekvő sorrendbe rendezi az elemeit!

Megoldás: Ötlet: a legnagyobb elemnél kettévágjuk a sorozatot. A kapott két rész mindegyike rendezett, ezeket össze tudjuk fésülni egyetlen rendezett sorozattá.

Megvalósítás: sorban az $a_i - a_{i+1}$ szomszédokat összehasonlítva megtalálhatjuk a legnagyobb elemet, legyen ez a_x . Eddig $n - 1$ összehasonlítást használunk. Az a_1, \dots, a_x és az $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{x+1}$ növekvő sorozatokat a tanult módon legfeljebb $n - 1$ összehasonlítással összefésüljük, és így legfeljebb $2n - 2 \in O(n)$ összehasonlítással készen vagyunk. (Az algoritmus mozgatja is az elemeket, de összesen ez is $O(n)$ lépés.)

Megoldhatjuk az a_x előzetes megkeresése nélkül is. Elég azt képzelni, hogy két sorozatunk van, az egyik első eleme a_1 , a másiké a_n (és kezdetben nem tudjuk, hol érnek véget). Legyen $i = 1$ és a $j = n$, és hasonlítsuk össze az a_i és az a_j elemet. A kisebb a készülő rendezett lista következő eleme, és ha $a_i < a_j$, akkor az i értékét növeljük, különben a j értékét csökkentjük. A továbbiakban is így, az összefésüléshez hasonlóan folytatjuk. Akkor lesz vége, ha $i = j$ (és akkor ez a legnagyobb elem). Ez az eljárás legfeljebb $n - 1 \in O(n)$ összehasonlítást használ.

Megjegyzés: mindkét eljárás helyesen működik abban az esetben is, amikor a legnagyobb elem az a_1 vagy az a_n , akkor eredetileg is egy rendezett sorozatunk van (növekvő vagy csökkenő).

10. A $G = (V, E)$ többszörös élel nem tartalmazó irányított gráf csúcshalmaza legyen $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Tegyük fel, hogy a gráf olyan éllistával adott, amelyben minden csúcsnál a szomszédok tetszőleges sorrendben vannak felsorolva. Adjon algoritmust, ami $O(|V| + |E|)$ lépésben olyan éllistát hoz létre, amiben a szomszédok minden csúcsnál növekvő sorrendben vannak!

Megoldás: Adódna a ládarendezés, de ha minden csúcsra külön végrehajtjuk ($|V|$ ládával), akkor egy d -fokú csúcsnál $O(d + |V|)$, összesen $O(|E| + |V|^2)$ lesz a lépésszám, ami túl sok lehet.

Ezért inkább az éllista alapján soroljuk fel az éleket (i, j) alakban. Ha ezeken egy radix rendezést hajtunk végre, akkor pont a kívánt sorrendben lesznek az élek, amiből a rendezett éllista már egyszerűen felírható. A lépésszám így: az élek felsorolása, illetve az új éllistába beírásuk $O(|V| + |E|)$, a rendezés, mindkétyszer $|V|$ ládát használva, $O(|E| + 2|V|)$, tehát összesen is $O(|E| + |V|)$.

2. megoldás: Rendezés helyett fordítsuk meg kétszer a gráfot. A megfordítás úgy történjen, hogy az éllistán végigmenve, amikor épp az i csúcs j szomszédjánál tartunk, akkor egy új éllistában a j csúcshoz írjuk be az i -t, mint szomszédot. Világos, hogy ezzel a fordított gráf éllistáját már rendezetten kapjuk, és ezért a második megfordítás után, amikor visszakapjuk az eredeti gráf éleit, annak az éllistája is rendezett lesz.

A megfordítás során csak kiolvassuk és beírjuk az éleket, tehát ennek lépésszáma arányos az éllista méretével, tehát $O(|E| + |V|)$.

11. Egy tömbön gyorsrendezést futtatva az első particionálás után az eredmény: 4, 2, 3, 1, 6, 8, 11. Mi lehetett a particionáló elem?

Megoldás: Olyan elemet kell keresni, hogy az előtte levők a nála kisebbek, az utána levők a nála nagyobbak. Tehát a 6, a 8 és a 11 is jó.

12. Az n méretű (nem feltétlenül rendezett) A tömb elemei különböző pozitív számok. Adjon algoritmust, amely meghatároz egy $1 \leq k \leq n$ számot és kiválaszt k különböző elemet az A tömbből úgy, hogy a kiválasztott elemek összege nem több mint k^3 . Ha nincs ilyen k , akkor az algoritmus jelezze ezt a tényt. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n \log n)$.

Megoldás: Vegyük észre, hogy egy rögzített k esetén, ha van megoldás, akkor a tömb legkisebb k eleme is megoldás. Ha ezek nem jók, akkor pedig nincs megoldás. Tehát azt kell vizsgálni, hogy van-e olyan k , hogy a legkisebb k elem összege legfeljebb k^3 .

Ehhez rendezzük a tömböt $O(n \log n)$ lépésben, például összefésüléses rendezéssel. Legyen $k = 1$ és $T = A[1]$. Ha $T \leq k^3$, akkor készen vagyunk, különben növeljük k -t és adjuk T -hez az $A[k]$ számot. Ha egyik $k \leq n$ sem jó, akkor nincs megoldás.

A rendezés utáni rész n összehasonlítást és $O(n)$ összeadást használ, ezért összesen a lépésszám $O(n \log n)$.

13. Adott a síkon n pont, melyek koordinátái $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$. Olyan $P = (x, y)$ pontot keresünk a síkon, amire a $\sum_{i=1}^n (|a_i - x| + |b_i - y|)$ összeg minimális. Adjon algoritmust, amely $O(n \log n)$ lépésben meghatároz egy ilyen P pontot!

Megoldás: A felírt összeget minimalizálhatjuk úgy, hogy külön meghatározzuk az x koordinátában és külön az y koordinátában a minimumot. Tehát például olyan x kell, amire a $\sum_{i=1}^n |a_i - x|$ összeg minimális. Ehhez képzeljük el az a_i pontokat a számegyenesen. Ha x kisebb, mint a legkisebb a_i , akkor x -et jobbra mozgatva az összeg csökken. Amíg kevesebb a_i van előtte, mint mögötte, addig jobbra mozgatva x -et az összeg tovább csökken. Akkortól nő, amikor már több a_i van előtte, mint mögötte. Tehát az optimális x a rendezés szerinti középső a_i , ha n páratlan. Páros esetben mindegy, hogy hol van a középső intervallumon belül, például az $x = a_{n/2}$ választás jó.

Ezek után az algoritmus: rendezzük az a_i értékeket, és legyen x a rendezés szerinti $\lceil n/2 \rceil$ szám. Ugyanezt megcsináljuk y -ra: rendezzük a b_i értékeket, és legyen y a rendezés szerinti $\lceil n/2 \rceil$ szám.

Az algoritmus lépésszáma, pl. összefésüléses rendezés esetén $O(n \log n)$.

14. Adott a számegyenesen n intervallum, $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$. Azt akarjuk tudni, hogy együtt milyen hosszú részt fednek le a számegyenesből (azaz, hogy mennyi $\cup_{i=1}^n [a_i, b_i]$ összhossza). Adjon $O(n \log n)$ lépéses algoritmust ennek a hosszának a meghatározására!

Megoldás: Egy intervallum hossza $b_i - a_i$, de az unió lehet ezek összegénél kevesebb, ha az intervallumok metszik egymást. Ezeket az átfedéseket kell valahogy kezelni, pontosabban megtalálni azokat a diszjunkt intervallumokat, amik az uniót alkotják.

Rendezzük a végpontokat (mind a $2n$ számot) úgy, hogy tároljuk, melyik volt egy intervallum kezdőpontja és melyik egy intervallum végpontja. Az unió első része a legkisebb értéknél kezdődik (és ez szükségszerűen egy intervallum a_j kezdete). Menjünk a rendezett sorozatban addig, amíg először megegyezik a kezdő és végpontok száma. Ez egy végpontnál következik be (b_k), és vegyük észre, hogy itt ér véget az unió első része, ennek a résznek a hossza $b_k - a_j$. Ha még maradtak a sorozatban elemek, ugyanígy folytathatjuk.

A lépésszámhoz azt kell látni, hogy a rendezés után már csak végig kell menni a sorozaton, számlálva a kezdő- és végpontokat. A hossz meghatározásához legfeljebb n kivonás kell, majd ezek eredményét kell összeadni. A rendezés lépésszáma $O(2n \log(2n)) = O(n \log n)$, az utána következőké $O(n)$, tehát ez összesen $O(n \log n)$.

15. Adjon minél kevesebb összehasonlítást használó algoritmust, ami n elem közül megtalálja a legkisebbet és a legnagyobbat is!

Megoldás: Külön a legkisebbet és a legnagyobbat is meg lehet találni $n - 1$ összehasonlítással, azaz megoldható $2n - 2$ összehasonlítással. (Sőt $(2n - 3)$ -mal is. Miért?)

Ennél jobb a következő: előbb hasonlítsuk össze az elsőt a másodikkal, a harmadikat a negyedikkel, stb. Ez után vegyük minden párból a kisebb elemet. A legkisebb közülük kerül ki. Használjuk ezekre a minimumot kereső algoritmust. Hasonlóan a páronkénti nagyobb elemek között találjuk meg a maximumot. Ha páratlan sok elem van, akkor az utolsó pár helyett 3 elemből határozzuk meg a kicsit és nagyot.

A lépésszám: $\lfloor n/2 \rfloor + 2 + 2(\lfloor n/2 \rfloor - 1)$, ami kb. $1,5n$. Pontosabban, ha n páros, akkor $1,5n - 2$, páratlan esetben pedig $(n - 1)/2 + 2 + 2(n - 1)/2 - 2 = 1,5(n - 1)$.

Megjegyzés: meggondolható, hogy $1,5n - 2$ kell is. Legyen B azoknak az elemeknek a száma, amelyek még lehetnek legkisebbek és legnagyobbak is, I , ami már csak legkisebb lehet (volt már nála nagyobb), A , ami már csak legnagyobb lehet (volt nála kisebb, E pedig a többi, aminél már volt kisebb és nagyobb is. Kezdetben $|B| = n$, a többi üres, a végén B üres, $|I| = |A| = 1$.

Két B -beli összehasonlításakor B kettővel csökken, I és A eggyel-eggyel nő. Ha egy B -belit nem B -belivel hasonlítunk, akkor B csökken és mindig lehet olyan eredmény, amikor I és A egyike nő, a másik nem csökken. Ha két I -belit vagy két A -belit hasonlítunk, akkor egyikük átkerül az E -be. A többi esetben mindig lehet olyan válasz, hogy sem I sem A nem változik. Ahhoz, hogy a B kiürüljön ezek szerint kell legalább $n/2$ összehasonlítás. A B -ből minden elem előbb az I -be vagy A -ba kerül, ahonnan viszont egyszerre csak egy tud kikerülni, tehát ezek (majdnem) kiürítéséhez kell összesen legalább $n - 2$ összehasonlítás. Tehát együtt van legalább $1,5n - 2$.

16. Az $A[1 : n]$ tömbben levő elemekről tudjuk, hogy $A[1] \neq A[n]$. Adjon $O(\log n)$ összehasonlítást használó algoritmust, amely talál egy olyan i indexet, hogy $A[i] \neq A[i + 1]$.

Megoldás: Bináris keresést használunk: legyen $i = \lceil n/2 \rceil$. Ha $A[i] \neq A[1]$, akkor az $A[1 : i]$ tömb is ugyanolyan tulajdonságú, mint az eredeti, elég ebben keresni. Ha viszont $A[i] = A[1]$, akkor nyilván $A[i] \neq A[n]$, és akkor a továbbiakban az $A[i : n]$ tömbben kereshetünk.

Az eljárás végén a tömb leszűkül egy 2 eleműre, azaz két szomszédos nem egyenlő elemre, ekkor készen vagyunk.

A lépésszám, ahogy a bináris keresésnél $O(\log n)$.