1. Adjon Karp-redukciót a PARTÍCIÓ problémáról a RH problémára!

   (Az RH eldöntési problémában egy $(s_1, s_2, \dots, s_n; b)$ inputról kell eldönteni, hogy ki lehet-e választani pár olyan s_i-t, amiknek összege b (minden s_i és b is pozitív egész). A PARTÍCIÓ problémában pedig egy $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ inputról kell eldönteni, hogy szét lehet-e osztani az s_i értékeket két halmazba úgy, hogy a két rész összege ugyanaz legyen (minden s_i pozitív egész).)

   Megoldás: Legyen $f : (s_1, s_2, \dots, s_n) \mapsto (s_1, s_2, \dots, s_n; b)$, ahol $b = \sum s_i/2$, ha ez a b egész szám, különben meg pl. $(2, 2; 1)$. Ez az f egy megfelelő Karp-redukció, mert csak lineárisan sok összeadás kell hozzá, hogy a b-t kiszámoljuk, és az RH megoldása megegyezik a PARTÍCIÓ megoldásával.

2. A HÁTIZSÁK eldöntési problémában egy $(s_1, \dots, s_m; v_1, \dots, v_m; b; k)$ inputról kell eldönteni, hogy van-e olyan $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ részhalmaza az indexeknek, amire $\sum_{i \in I} s_i \le b$ és $\sum_{i \in I} v_i \ge k$ is teljesül. Bizonyítsa be, hogy a HÁTIZSÁK feladat NP-teljes!

   Megoldás: Mivel egy megfelelő I részhalmaz polinom méretű és polinom időben ellenőrizhető, ezért a probléma NP-ben van.

   Megadunk egy RH $\prec$ HÁTIZSÁK Karp-redukciót. Legyen

   $$f(s_1, \dots, s_m; b) = (s_1, \dots, s_m; s_1, \dots, s_m; b; b).$$

   Ha valamely I-re teljesül, hogy $\sum_{i \in I} s_i = b$, akkor nyilván teljesülnek a HÁTIZSÁK feladat feltételei is. Ha viszont Ha valamely I-re teljesül, hogy $\sum_{i \in I} s_i \le b$ és $\sum_{i \in I} s_i \ge k$, akkor nyilván $\sum_{i \in I} s_i = b$. Tehát ez egy jó Karp-redukció.

   Informálisan: Az RH feladat a HÁTIZSÁK feladatnak speciális esete, méghozzá az az eset, amikor minden i-re igaz, hogy $v_i = s_i$ valamint $k = b$. Mivel már a speciális eset is NP-nehéz, ezért az általánosítása is az.

3. A TÖBBSÉGI-SAT nyelv olyan Boole formulákból áll, amik a változók lehetséges értékadásainak több mint a felére igazak. (Ha k változó van benne, akkor 2^k lehetséges értékadás van, ezek közül több mint 2^{k-1}-re igaz.) Bizonyítsa be, hogy a TÖBBSÉGI-SAT nyelv NP-nehéz.

   Megoldás: Megadunk egy SAT $\prec$ TÖBBSÉGI-SAT Karp-redukciót. Legyen $\phi' = \phi \vee y$, ahol y egy ϕ-ben nem szereplő változó. Ez nyilván polinom időben kiszámolható.

   Ha ϕ kielégíthető, akkor ϕ' igaz lesz abban az esetben, ha vesszük ϕ egy kielégítését és y-nak a hamis értéket adjuk, valamint az összes olyan értékadásra, amikor y igaz. Ez több mint a a lehetséges értékadások fele.

   Fordítva, ha ϕ' igaz az értékadások több mint felére, akkor ezek között kell lenni olyannak is, amikor y hamis. Ez egy olyan értékadás lesz, amikor ϕ igaz.

   Megjegyzés: Ennél a nyelvnél nem firtatjuk, hogy NP-ben van-e. De azt vegyük észre, hogy az értékadások több mint felének megadása nem jó tanú, mert lehetséges, hogy nem polinom méretű.

4. P-beli vagy NP-teljes az a feladat, ahol adottak az $a_1, \dots, a_n$ egész számok és az a kérdés, hogy ez a számhalmaz szétosztható-e három részre úgy, hogy mindhárom rész összege ugyanannyi legyen?

   Megoldás: Megmutatjuk, hogy NP-teljes. Az, hogy NP-ben van világos, hiszen tanú lehet egy jó szétosztás (pl. $\Theta(n)$ bittel megadjuk melyik szám melyik osztályba kerüljön), amiről $\Theta(n)$ lépésben ellenőrizzük, hogy tényleg 3 felé osztás, és az összegek megegyeznek.

   A teljességhez megadunk egy PARTÍCIÓ $\prec L$ Karp-redukciót. A PARTÍCIÓ egy $b_1, b_2, \dots, b_m$ bemenetéből ($b_i > 0$) képezzük az $a_i = b_i$ $(1 \le i \le m)$, $a_{m+1} = \sum b_i/2$ sorozatot, ha ez az összeg páros. (Így $n = m+1$.) Ha az összeg nem páros, akkor legyen például $n = 3$, $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2$. Ez polinom időben számolható. A b_i-k kétfelé osztása adja az a_i-knek egy 3 felé osztását (a 3. osztály egy elemű, az a_{m+1} van csak benne). Másrészt csak úgy lehet az a_i-ket 3 felé osztani, ha az a_{m+1} egymaga lesz, a másik két osztály meg a b_i-k egy jó partíciója.

5. Egy n emberből álló szervezetben b féle bizottság működik. Bizottsági ülések időpontját akarjuk kitűzni. Két különböző bizottság ülése akkor lehet azonos napon, ha nincs olyan ember, aki mindkét bizottságnak tagja. Legyen adott egy k pozitív egész szám és minden bizottsághoz a tagok névsora. Azt szeretnénk eldönteni, hogy az összes bizottság ülése lebonyolítható-e k napon belül. Vagy adjon egy, a kívánt beosztást megtaláló polinomiális algoritmust, vagy mutassa meg, hogy a feladathoz tartozó nyelv NP-teljes!

   Megoldás: Ötlet: tekintsük azt a G gráfot, melynek csúcsai a bizottságok, kettő akkor legyen összekötve, ha van közös tagjuk. Így azoknak a bizottságoknak lehet egy napon az ülése, amelyek független halmazt alkotnak. Akkor elég k nap, ha k független halmazra felbonthatók a csúcsok, azaz a gráf kiszínezhető k színnel.

   Ezután nem nehéz egy visszavezetést adni a 3SZÍN nyelvről: a csúcsoknak feleljenek meg a bizottságok, minden élnek megfelel egy ember, aki pontosan abban a két adott bizottságban van benne, $k = 3$.

6. A TSP *(Travelling Salesman Problem)* feladatban azt kell eldönteni egy élsúlyozott **teljes** G gráfról és egy k egész számról, hogy van-e G-ben olyan Hamilton-kör, melynek súlya legfeljebb k. Lássa be, hogy a TSP feladat NP-teljes.

   Megoldás: TSP NP-ben van, mert jó tanú a jó Hamilton-kör, ami megadható például a csúcsok jó sorrendben való felsorolásával. A tanú hossza $O(v \log v)$, mert v csúcsot kell felsorolni, mindegyik leírható $O(\log v)$ bittel. A tanú ellenőrzése során megnézzük, hogy mindegyik csúcs egyszer szerepel (ez megtehető a tanú egyszeri végignézésével és annak nyilvántartásával, hogy melyik csúcsot láttuk már), illetve megnézzük, hogy a szomszédos csúcsok között valóban van él a szomszédossági mátrix szerint (ehhez is csak egyszer kell végigmennünk a csúcsok sorrendjén), eközben össze is adjuk az élek súlyát, ez az eljárás a tanú hosszával arányos lépésszámú.

   Az NP-teljesség ezután abból jön ki, hogy HAM visszavezethető TSP-re a következő módon: minden G gráfhoz rendeljük azt a G-vel azonos csúcsszámú élsúlyozott teljes gráfot, melyben a G-ben szereplő élek súlya 1, a G-ben nem szereplő élek súlya 2. Legyen továbbá a TSP-ben így kapott gráfhoz tartozó k értéke G csúcsszáma, amit jelöljünk v-vel.

   Ez a hozzárendelés $O(v^2)$ lépéssben megtehető.

   Ha G-ben van H-kör, akkor ezen H-kör minden éle 1 súlyú a teljes gráfban, vagyis itt van v súlyú H-kör.

   Ha a teljes gráfban van v súlyú H-kör, akkor az csak G-beli éleket tartalmazhat (mert v darab élet kell kiválasztanunk és mindegyik súlya 1 vagy 2 lehet csak), vagyis ekkor G-ben is van H-kör.

7. Tudjuk, hogy $L_1 \prec L_2$ és hogy az L_2 komplementere Karp-redukálható a PARTÍCIÓ nyelvre. Igazolja, hogy ekkor $L_1 \in \text{co}\,\text{NP}$!

   Megoldás: A második feltétel szerint $\overline{L_2} \prec$ PARTÍCIÓ, és mivel PARTÍCIÓ NP-teljes (és így NP-beli), ezért $\overline{L_2} \in$ NP. Az első feltétel szerint $L_1 \prec L_2$, amiből $\overline{L_1} \prec \overline{L_2}$ következik. Ezért $\overline{L_1}$ is NP-ben van, ami a co NP definíciója miatt ekvivalens az $L_1 \in \text{co}\,\text{NP}$ tulajdonsággal.

8. Bizonyítsa be, hogy ha P = NP, akkor az $\emptyset$ és a Σ^* nyelvek kivételével minden P-beli nyelv NP-teljes.

   Megoldás: Ha $L \in$ P, akkor nyilván $L \in$ NP is teljesül. Ha $L' \in$ NP = P, akkor megadunk egy $L' \prec L$ Karp-redukciót. Mivel $L \neq \emptyset$ és a $L \neq \Sigma^*$, ezért van olyan a szó, amire $a \in L$ és van olyan b szó, amire $b \notin L$.

   Legyen
$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{ha } x \in L' \\ b, & \text{ha } x \notin L'. \end{cases}$$

   Mivel $L' \in$ P, ezért a függvény polinom időben kiszámolható és teljesíti a szükséges feltételt.

9. Tegyük fel, hogy van egy eljárásunk, ami egy tetszőleges n csúcsú gráfról polinom időben megmondja, hogy van-e benne Hamilton-kör. Hogyan lehet ezt felhasználva polinom időben megtalálni egy adott G gráfban egy Hamilton-kört?

   Megoldás: Először adjuk be az eljárásnak a G gráfot. Ha az a válasz, hogy nincs benne Hamilton-kör, akkor készen vagyunk.

   Különben legyenek a G gráf élei $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Az $i = 1, 2, \ldots m$ értékekre sorban csináljuk a következőt:

   Hagyjuk el a gráfból az f_i élet, jelölje a kapott gráfot G'. Adjuk be ezt a gráfot az eljárásnak. Amennyiben az a válasz, hogy van benne Hamilton-kör, akkor $G = G'$-vel folytatjuk az eljárást. Ha nincs benne, akkor viszont nem változtatjuk meg G-t.

   Vegyük észre, hogy az aktuális G-ben mindig lesz Hamilton-kör, de elhagyunk minden élet, ami ehhez „nem fontos”. A végén a gráfban kizárólag egy Hamilton-kör élei maradnak meg, így itt már könnyű ezt „megtalálni”.

   Lépésszám: Legyen az eredeti eljárás lépésszáma az n csúcsú gráfokon $O(n^c)$. Ezt m-szer hívjuk meg, $m < n^2$. Egy él elhagyása megoldható $O(n)$ lépésben, tehát az egész együtt $O(m(n^c+n))$, azaz polinomiális.

   Megjegyzés: Lehet, hogy eredetileg több Hamilton-kör is van a gráfban. Mindig azt ellenőrizzük, hogy marad-e az f_i elhagyása után is Hamilton-kör, és ha igen, akkor egy kevesebb élű gráffal folytatjuk.

10. Egy hivatal egy új, E emeletes épületbe fog költözni. Az épület minden emeletén ugyanakkora terület használható fel irodák kialakítására. Minden részleg megmondta, hogy összesen mekkora irodaterületre tart igényt. Azt akarjuk eldönteni, hogy megoldható-e a költözés úgy, hogy egyetlen részleg se legyen kettévágva, azaz egy részleg teljes egészében egy emeleten legyen (de egy emeletre kerülhet több részleg is). Mi lesz a problémához tartozó nyelv? Ez a nyelv P-ben van vagy NP-teljes?

    Megoldás: A nyelv elemei: $(a_1, a_2, \ldots, a_n; E, T)$, ahol $a_i > 0$, $E > 0$, $T > 0$ egész számok, és az a_i számok szétoszthatók E csoportba, hogy minden csoport összege legfeljebb T. (Itt T a szintek területe, a_i-k az igények.)

    Ötlet: NP-teljes, pl. a PARTÍCIÓ visszavezethető rá, $E = 2$ esetén két emeletre kell elrendezni a „számokat”. A PARTÍCIÓ egy $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bemenetéhez rendeljük az $(a_1, a_2, \ldots, a_n; 2, \lfloor \sum a_i/2 \rfloor)$ bemenetet.

11. Az L nyelv az olyan G egyszerű gráfokból áll, melyeknél a csúcsok színezéséhez kell legalább 4 szín. Igazolja, hogy a PRÍM $\prec L$ Karp-redukció létezik!

    Megoldás: A PRÍM $\prec L$ Karp-redukció létezéséhez elegendő megmutatni, hogy a komplementerek között van Karp-redukció, $\overline{\text{PRÍM}} \prec \overline{L}$. Tudjuk, hogy $\overline{\text{PRÍM}} =$ ÖSSZETETT $\in$ NP. Azt fogjuk belátni, hogy $\overline{L}$ egy NP-teljes nyelv, és akkor az NP-teljesség definíciója miatt készen vagyunk. Ehhez elegendő azt észrevenni, hogy a „kell legalább 4 szín” komplementer tulajdonsága az, hogy „3 szín elég”, azaz lényegében a 3SZÍN nyelvről van szó, ami valóban NP-teljes.

    Kicsit pontosabban, $\overline{L}$ a 3SZÍN nyelvnek és a nem gráfokat leíró bemeneteknek az uniója, amire a 3SZÍN nyelv könnyen Karp-redukálható úgy, hogy először ellenőrizzük, hogy a bemenet gráfot ír le. Ha nem, akkor megfeleltetjük neki a 4 pontú teljes gráfot, amihez nyilván kell 4 szín, egyébként meg, ha gráfot ír le, akkor saját magát.

    Megjegyzés: A komplementer nyelv helyett általában elegendő a komplementer tulajdonsággal foglalkozni, hiszen az ez által meghatározott nyelv csak a formálisan nem jó bemenetekben különbözik a komplementer nyelvtől.