

Algoritmuselmélet

Mit tegyünk, ha nehéz a probléma?

Katona Gyula Y. / Vizer Máté

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Elágazás és korlátozás

Mit tegyünk ha kiderül, hogy a megoldandó probléma NP-teljes?

Legtöbbször van c^n -es algoritmus, de nem mindegy mekkora c .

Bontsunk esetekre, azt a esetekre, ... $\Rightarrow$ fa

Értékeljük az eseteket $\Rightarrow$ bizonyos irányokban nem kell továbbmenni. $\Rightarrow$ (korlátozó heurisztika)

Pl. sakkállások

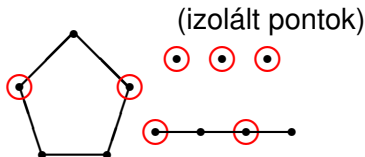
Feladat: Keressünk maximális méretű független ponthalmazt egy adott G gráfban.

NP-teljes

Minden részhalmazt végignézzünk $\Rightarrow \Omega(2^n)$ lépés

Jobb algoritmus

Észrevétel: Ha G -ben minden pont foka legfeljebb kettő, akkor a feladat lineáris időben megoldható $\implies G$ izolált pontok, utak és körök diszjunkt uniója. $\implies$ komponensenként minden „második” pontot bevesszük a halmazba.



MF(G)

1. Ha G -ben minden pont foka ≤ 2 , akkor MF(G) az előbbi eljárás által adott maximális független halmaz, és a munkát befejeztük.
2. Legyen $x \in G$, $\text{fok}(x) \geq 3$.
 $S_1 := \text{MF}(G \setminus \{x\})$
 $S_2 := \{x\} \cup \text{MF}(G \setminus \{x \text{ és szomszédai}\})$.
3. Legyen S az S_1 és S_2 közül a nagyobb méretű, illetve akármelyik, ha $|S_1| = |S_2|$.
4. MF(G) := S .

Legyen $T(v)$ az $MF(G)$ -n ($|V(G)| \leq v$) belüli MF hívások maximális száma, beleértve $MF(G)$ -t magát is.

Tétel

Van olyan c állandó, hogy $T(v) \leq c\gamma^v$, tetszőleges v természetes számra, ahol γ a $\gamma^4 - \gamma^3 - 1 = 0$ egyenlet pozitív gyöke ($\gamma \approx 1,381$).

Bizonyítás.

Legyen $t(v) := T(v) + 1$. $\implies T(v) = t(v) - 1$

$T(v) \leq T(v-1) + T(v-4) + 1$, ha $v > 4$. $\implies$

$t(v) \leq t(v-1) + t(v-4)$, ha $v > 4$.

Indukcióval: $t(v) \leq c\gamma^v$

$v < 5$ -re elég nagy c -vel ✓

$\implies$ Ezután, ha $v \geq 5$, indukciós feltevésből:

$$\begin{aligned} t(v) &\leq t(v-1) + t(v-4) \leq c\gamma^{v-1} + c\gamma^{v-4} = \\ &= c\gamma^{v-4}(\gamma^3 + 1) = c\gamma^{v-4}\gamma^4 = c\gamma^v. \end{aligned}$$

Összköltség: $O(v^d T(v)) = O(v^d \gamma^v) = O(1,381^v)$.

3-színezés keresése

Feladat: Adott G , keressünk egy 3-színezést.

NP-teljes

Minden lehetséges színezést végignézzünk $\implies \Omega(3^n)$ lépés

Ötlet: Bizonyos csúcsokat kiszínezünk **pirosra**, a többről polinom időben el tudjuk dönteni, hogy kiszínezhetők-e **kékkel** és **sárgával**.

Összköltség: $O(2^n n^c)$.

Jobb modellezés

Lehet, hogy a probléma NP-teljes, ha az input bármilyen gráf lehet, viszont van polinomiális algoritmus, ha az input csak valamilyen speciális gráf lehet. Pontosabb modell felállításával kiderülhet, hogy ez a helyzet.

Példák:

- Van-e Hamilton-kör fában?
- Van-e Hamilton-kör soros-párhuzamos gráfban?
- Van-e Hamilton-kör ha a „favastagság” konstans?
- Maximális klikk keresése intervallum gráfban.
- Kromatikus szám meghatározása páros gráfban, vagy ha a maximális foksám ≤ 3 .
- 4-színezhetőség eldöntése síkbarajzolható gráfban.
- Maximális független ponthalmaz keresése páros gráfban. (König+Gallai)
- Élkromatikus szám meghatározása páros gráfban.

Átlagosan gyors algoritmusok

- Gyorsrendezés.
- Hashelés.
- Annak eldöntése, hogy G színezhető-e 3 színnel átlagosan $O(1)$ lépés.

Közelítő algoritmusok

Hátha nem szükséges pontos megoldás, elég az optimumtól nem túl messze levő is, ha az polinom időben kiszámolható.

Közelítés additív konstanssal: $OPT - c \leq APPR \leq OPT + c$

Ilyen ritkán van.

Tétel

NP-teljes annak eldöntése, hogy az élkromatikus szám $\leq k$ teljesül-e.

Tétel (Vizing)

$$\Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Tehát $\Delta(G)$ egy jó közelítés, ami gyorsan kiszámolható.

Közelítő algoritmusok

C-KÖZÚT

Bemenet: G

Kérdés: Van-e legalább $v(G) - c$ hosszú út G -ben?

Tétel

C-KÖZÚT $\in$ NP-teljes.

Bizonyítás.

C-KÖZÚT $\in$ NP, tanú egy út. ✓

H-ÚT $\preceq$ C-KÖZÚT: $G \implies G' = G + c$ db izolált pont.

Ha G -ben van Hamilton-út, ez G' -ben egy $v(G') - c$ hosszú út. ✓

Ha G' -ben van egy $v(G') - c$ hosszú út, akkor az G minden pontját tartalmazza, tehát Hamilton-út. ✓



Közelítő algoritmusok

Közelítés multiplikatív konstanssal: $\frac{1}{c}OPT \leq APPR \leq c \cdot OPT$

Ilyen sokszor van. Keressünk 1-hez minél közelebbi konstanst.

Közelítő algoritmusok

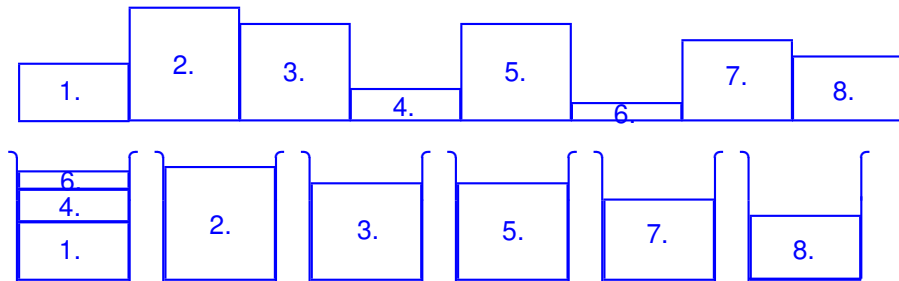
Ládapakolás: Adottak az $s_1, \dots, s_m$ (racionális) súlyok, $0 \leq s_i \leq 1$. A cél a súlyok elhelyezése minél kevesebb 1 súlykapacitású ládába.

NP-nehéz, a PARTÍCIÓ probléma visszavezethető rá.

Ládapakolás

FF-módszer (*first fit*): Vegyünk először üres ládákat, és számozzuk meg őket az $1, 2, \dots, m$ egészekkel.

Tegyük fel, hogy az $s_1, \dots, s_{i-1}$ súlyokat már elhelyeztük. Ekkor s_i kerüljön az első (legkisebb sorszámú) olyan ládába, amelybe még befér.



First Fit

Tétel

Jelölje a Ládapakolás probléma egy I inputjára $OPT(I)$ az optimális (minimálisan elegendő), $FF(I)$ pedig az FF-módszer által eredményezett ládaszámot. A probléma tetszőleges I inputjára teljesül, hogy $FF(I) \leq 2OPT(I) + 1$.

Bizonyítás.

$\left\lceil \sum_{i=1}^m s_i \right\rceil \leq OPT(I)$
 $FF(I) \leq \left\lceil 2 \sum_{i=1}^m s_i \right\rceil + 1 \iff$ nincs két olyan láda, amely nincs félig kitöltve.

Felhasználjuk, hogy $\lceil 2x \rceil \leq 2 \lceil x \rceil$:

$$FF(I) \leq \left\lceil 2 \sum_{i=1}^m s_i \right\rceil + 1 \leq 2 \left\lceil \sum_{i=1}^m s_i \right\rceil + 1 \leq 2OPT(I) + 1.$$



First Fit

Tétel (D. S. Johnson és munkatársai, 1976)

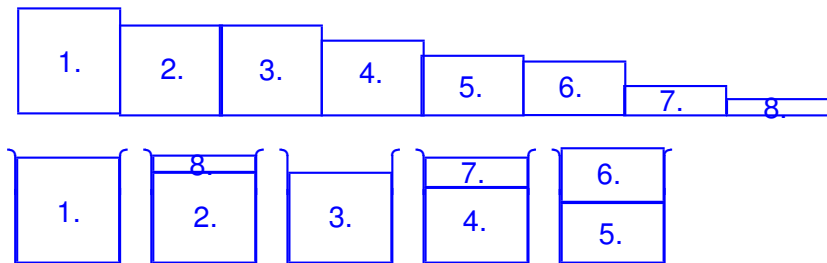
*A probléma tetszőleges I inputjára teljesül, hogy $FF(I) \leq \lceil 1.7OPT(I) \rceil$.
Továbbá vannak tetszőlegesen nagy méretű I inputok, melyekre $FF(I) \geq 1.7(OPT(I) - 1)$.*

Tétel (Dósa, Sgall, 2013)

*A probléma tetszőleges I inputjára teljesül, hogy $FF(I) \leq \lfloor 1.7OPT(I) \rfloor$.
Továbbá vannak tetszőlegesen nagy méretű I inputok, melyekre $FF(I) = \lfloor 1.7OPT(I) \rfloor$.*

First Fit Decreasing

FFD-módszer (first fit decreasing): először rendezzük a súlyokat nem növekvő sorrendbe, utána alkalmazzuk az *FF*-módszert.



Tétel (D. S. Johnson, 1973)

Tetszőleges I inputra teljesül, hogy $FFD(I) \leq \frac{11}{9} OPT(I) + 4$, és tetszőlegesen nagy méretű I inputok vannak, melyekre $FFD(I) \geq \frac{11}{9} OPT(I)$. ($\frac{11}{9} = 1.222\dots$)

Tétel (W. Fernandez de la Vega, G. S. Lueker)

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan P lineáris algoritmus, amire $P(I) \leq (1 + \varepsilon)OPT(I) + 1$.

Futásideje: $O(n) + 2^{2^{O((1/\varepsilon) \log(1/\varepsilon))}}$

Animáció 1

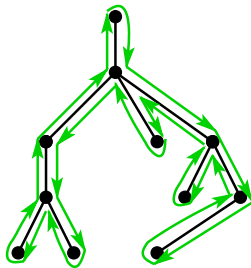
Animáció 2

Euklideszi utazó ügynök probléma

Az n pontú K_n teljes gráf élein adott a nemnegatív értékű d súlyfüggvény. Erre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség: tetszőleges különböző u, v, w csúcsokra érvényes a $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ egyenlőtlenség (az euklideszi feltétel).

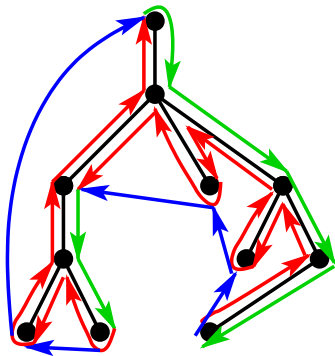
A cél egy minimális összsúlyú Hamilton-kör keresése.

Keresünk egy minimális összsúlyú feszítőfát (pl. Kruskal), megkettőzzük az éleit és „körbejárjuk” egy Euler-körsétával.



A minimális feszítőfa összsúlya legyen $s \implies$ Euler-séta hossza $2s$.

Ez nem Hamilton-kör $\implies$ levágjuk a fölösleges részeket, közben rövidítünk is.



Ha az optimális Hamilton-körből elhagyunk egy élet $\implies$ egy legalább s súlyú feszítőfát kapunk.

A módszer legfeljebb 2-szer akkora utat ad, mint az optimális.

Animáció 1 Animáció 2

Véletlent használó módszerek

Előny: Gyorsabb lehet.

Hátrány: Kis valószínűséggel hibás választ kapunk.

Probléma: Adott behelyettesítéssel (**fekete dobozzal**) egy n -változós $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ egész együtthatós polinom. Tudjuk, hogy $\deg f \leq d$. El akarjuk dönteni, hogy f azonosan nulla-e.

Példa: $f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \cdots (x_{2n-1} + x_{2n})$

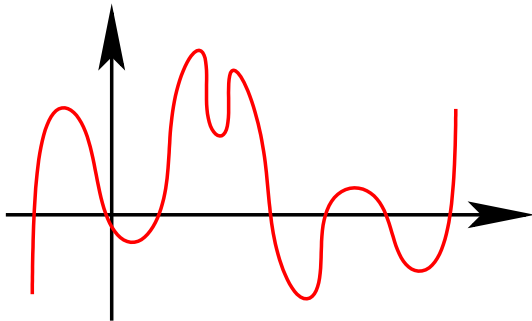
Példa:

$$D = \det \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Minél hamarabb szeretnénk találni egy $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ -t, amire $f(\alpha) \neq 0$.

Pl. egy változóra jól látszik.

Schwartz lemma



Tétel (J. Schwartz lemmája)

Ha $\deg f \leq d$, és $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ egyenletes eloszlású, egymástól független véletlen elemei az $\{1, \dots, N\}$ számhalmaznak, akkor $f \not\equiv 0$ esetén $\text{Prob}(f(\alpha) = 0) \leq \frac{d}{N}$.

A Schwartz lemma következménye

Tétel

Az $\{1, 2, \dots, 2d\}$ halmazból vett véletlen n -komponensű α vektor esetén $\text{Prob}(f(\alpha) \neq 0) \geq 1/2$, ha $f \neq 0$. Ekkora halmazból választva tehát legalább $1/2$ valószínűséggel adódik tanú. Ha t -szer függetlenül választunk ilyen helyettesítést, akkor legalább $1 - \frac{1}{2^t}$ valószínűséggel kapunk tanút.

Alkalmazás

Randomizált módszer teljes párosítás keresésére páros gráfban.

Legyen $G = (L, U; E)$ páros gráf, $L = \{l_1, \dots, l_n\}$ és $U = \{u_1, \dots, u_n\}$
 $M = (m_{ij})$ n -szer n -es mátrix $\implies$

$$m_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{ha } (l_i, u_j) \in E, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az x_{ij} -ket változóként kezeljük.

Tétel

G -ben akkor és csak akkor van teljes párosítás ha $\det M$ nem az azonosan 0 függvény.

Bizonyítás.

A determináns egy tagja: $\pm m_{1\pi(1)} m_{2\pi(2)} \cdots m_{n\pi(n)}$.

Ha nem 0 $\implies (l_i, u_{\pi(i)}) \in E, i = 1, \dots, n, \implies$ teljes párosítás.

Ha tehát G -ben nincs teljes párosítás, $\implies \det M = 0$.

Ha viszont van G -ben teljes párosítás $\implies \exists$ nem 0 kifejtési tag.

A determináns tagjai nem ejthetik ki egymást, mert bármely kettőben van két különböző változó.

Az előző módszerrel eldönthetjük, hogy $\det M = 0$ igaz-e. □

Hasonlóan megy nem páros gráfokra is.

Véletlent használó algoritmusok

Bemenő adatként adott (binárisan) egy m páratlan egész; szeretnénk eldönteni, hogy m prímszám-e.

Fermat-teszt (m)

1. Válasszunk egy véletlen a egészet az $[1, m)$ intervallumból.
2. Ha $\text{Inko}(a, m) \neq 1$, akkor a válasz „ m összetett”.
3. Ha $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$, akkor a válasz „ m valószínűleg prím”, különben a válasz „ m összetett”.

2. Euklideszi algoritmussal gyorsan végrehajtható.

3. Gyors hatványozással gyorsan végrehajtható.

Ha azt kapjuk, hogy „ m összetett” $\implies$ ez biztos igaz.

Pl.: $m = 21 = 7 \cdot 3$ és $a = 2 \implies a$ az m Fermat-tanúja, hiszen $2^{20} \equiv 4 \pmod{21}$.