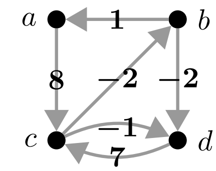
1. Határozzunk meg az alábbi gráfban a Bellman–Ford-algoritmussal az a csúcsból az összes többibe menő egy-egy legrövidebb utat.



---

2. Éllistájával adott egy irányított G gráf, melynek minden csúcsa színes: piros, fehér vagy zöld színű. Adott továbbá a gráfban egy a csúcs, ami piros és egy b csúcs, ami zöld. Adjunk $O(n+m)$ lépésszámú algoritmust, ami megtalálja a legkevesebb élből álló olyan utat a-ból b-be, amiben az első néhány csúcs piros, majd néhány (legalább egy) fehér csúcs után csupa zöld csúcs következik. (zh, 2015.)

3. Adott egy n-csúcsú kör, melynek minden pontjába egy n-nél kisebb, pozitív egész szám van írva. Ha egy csúcsba a d érték van írva, akkor ebből a csúcsból egyetlen ugrással vagy balra vagy jobbra lehet lépni, pontosan d csúccsal arrébb. Adott a körben egy a és egy b csúcs, és azt szeretnénk meghatározni, hogy el lehet-e jutni a-ból b-be, és ha igen, akkor legkevesebb hány ugrással. Adjunk erre a feladatra $O(n)$ lépésszámú algoritmust. (pzh1, 2023.)

4. Egy $n \times k$ méretű táblázatban van néhány megjelölt elem. A táblázat bal alsó sarkából akarunk eljutni a jobb felső sarkába úgy, hogy minden lépésben a táblázat egy eleméről vagy a közvetlen felette vagy a tőle jobbra levő elemre mehetünk (ha van ilyen). Adjunk $O(nk)$ idejű algoritmust, amely a megjelölt elemek helyét ismerve meghatározza, hogy egy ilyen út során maximálisan hány alkalommal tudunk megjelölt elemre lépni. (zh, 2010.)

5. Szomszédossági mátrixával adott egy ország úthálózatának irányítatlan, élsúlyozott gráfja: a csúcsok a városok (n város van), az élek a városok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig az útszakasz megtételéhez szükséges várható időtartam. Adott az országban néhány város, ahol van mentőállomás és szeretnénk eldönteni, hogy igaz-e, hogy az ország bármely városa elérhető legalább egy mentőállomásról legfeljebb M perc alatt. Melyik tanult algoritmus alkalmazásával, hogyan és miért lehet $O(n^2)$ lépésben megoldani ezt a feladatot? (pzh1, 2023.)

6. Éllistával adott egy n-csúcsú, m-élű, élsúlyozott $G = (V, E)$ irányított gráf, valamint adott a G egy $s \in V$ csúcsa. Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz izolált pontokat és negatív összhosszúságú irányított kört, továbbá azt, hogy a G-beli irányított utak legfeljebb 25 élből állnak. Javasoljunk $O(m)$ lépésszámú algoritmust az s csúcsból a gráf összes további csúcsába vivő legrövidebb utak hosszának meghatározására.

---

7. Változtassuk meg az 1. feladatban a dc él súlyát 7-ről 3-ra, és futtassuk így is a Bellman–Ford-algoritmust.

8. Egy középkori királyság úthálózata egy n-csúcsú irányítatlan gráf szomszédossági mátrixával adott (a csúcsok a városok, az élek a köztük vezető utak). Az a városból szeretnénk a b városba árut vinni, de bizonyos városok csak akkor engednek át minket a terményünkkel, ha vámot fizetünk nekik (az a és b városban nem kell vámot fizetni). A vám összege fix, nem függ az áru mennyiségétől, de a vám városonként más és más lehet. Adjunk algoritmust, ami a városonkénti vámok és a gráf szomszédossági mátrixának ismeretében $O(n^2)$ lépésben talál olyan útvonalat, amin a legkevesebb sarcot szedik be tőlünk. (zh, 2015.)

9. Adjunk algoritmust, mely egy éllistával megadott irányítatlan gráfban vagy talál egy kört, vagy igazolja a gráf körmentességét $O(n)$ időben.

10. Szomszédossági mátrixával adott n-csúcsú, irányított G gráf élei között van egy negatív súlyú él, a többi él súlya pozitív. A gráfban nincs negatív összsúlyú irányított kör. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust az $s \in V(G)$ pontból az összes többi pontba vezető legrövidebb utak meghatározására. (vizsga1, 2004.)

11. Forintot szeretnénk különféle valutákra átváltani. Külföldön élő ismerőseink révén számos valutát közvetlenül át tudunk váltani bizonyos valutákra. Ehhez elkészítettük egy irányított gráf éllistáját, amiben a csúcsok az egyes valutáknak, az élek pedig az egyes közvetlen tranzakcióknak felelnek meg. Minden uv élhez ismert az adott váltásnál alkalmazott árfolyam, azaz, hogy hány egységet kell fizetnünk az u pénznemben a v pénznem egy egységéért. Adjunk hatékony módszert arra, hogy meghatározzuk, legfeljebb mennyit kaphatunk az egyes valutákból 1 Ft-ért, illetve határozzuk meg azt is, milyen átváltásokat kell ehhez végeznünk. (vizsga4, 2003. alapján)

12. A húsvéti nyúl belefáradt, hogy mindenki ajándékot vár tőle. Ezentúl úgy jár el, hogy az első helyen, ahova megy, nem ad ajándékot, a második helyen ad, a következő helyen megint nem ad, és így tovább. Adott egy $G = (V, E)$ egyszerű irányított gráf, ami azt mutatja, hogy az x csúcsnak megfelelő helyről a nyúl következő lépése mely y csúcsokba vihet, az él súlya jelzi az átjutáshoz szükséges időt. Tegyük fel, hogy szomszédossági mátrixával adott a gráf, tudjuk, hogy a nyúl az $s \in V$ fészkéből indul, a mi helyzetünket az $t \in V$ csúcs jelzi. Adjunk $O(|V|^3)$ idejű algoritmust, amellyel meghatározhatjuk, hogy mi az a legkorábbi időpont, amikor a nyúl ajándékozó kedvvel érhet hozzánk. (A nyúl az útja során egy csúcsot többször is meglátogathat és nem kell minden csúcsba eljutnia.) (zh, 2010.)