1. Éllistájukkal adottak az alábbi G_1 és G_2 élsúlyozott, irányított gráfok.

   G_1: ***a***: $b\,(2)$, $c\,(3)$, $d\,(0)$; ***b***: $d\,(-1)$; ***c***: $d\,(4)$; ***d***: $e\,(1)$; ***e***: $a\,(-3)$;

   G_2: ***a***: $f\,(-1)$, $g\,(2)$; ***b***: $a\,(4)$, $g\,(1)$; ***c***: – ; ***d***: – ; ***e***: $c\,(7)$, $d\,(5)$; ***f***: $e\,(0)$; ***g***: $e\,(3)$, $f\,(3)$

   (a) Döntsük el, hogy a G_1 és G_2 gráfok aciklikusak-e.
   (b) Amelyik gráfnak van topologikus sorrendje, abban adjunk meg egyet.
   (c) Amelyik gráfra használható az órán tanult algoritmus, abban határozzunk meg a segítségével az a csúcsból a többi csúcsba vezető egy-egy legrövidebb, illetve leghosszabb utat, valamint azok hosszát.

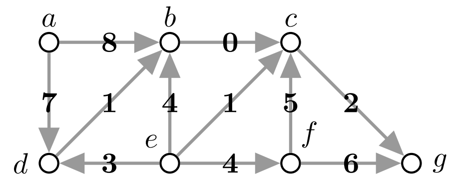
2. Van b darab borítékunk, melyeknek adott a hossza és a magassága: az i-edik hossza h_i, a magassága m_i. Az i-edik borítékba pontosan akkor tudjuk berakni a j-edik borítékot, ha $h_j < h_i$ és $m_j < m_i$ is teljesül (azaz nem forgatjuk és nem is hajtogatjuk a borítékokat). Adott még továbbá egy $L > 0$ egész. Hogyan lehet $O(b^2)$ lépésben eldönteni, hogy ki tudunk-e alakítani a borítékokból egy L-hosszú láncot úgy, hogy ezen borítékok mindegyikét bele tudjuk rakni a láncban utána következő borítékba? (zh, 2011. alapján)

---

3. Éllistájával adott az alábbi G gráf. Igaz-e, hogy a b, c, d, a, e, f sorrend egy topologikus sorrendje G-nek?

   a: e, f; ***b***: c, d, e; ***c***: a, e; ***d***: e, f; ***e***: f; ***f***: –

4. A jobboldali ábrán látható G gráf egyes éleire írt számok azt jelentik, hogy hány kincset tudunk összegyűjteni az adott élen. Határozzuk meg, mennyi az összesen összegyűjthető kincsek maximális száma, ha a gráf tetszőleges pontjából indulhatunk, bármelyikben megállhatunk, és csak irányított élek mentén haladhatunk.



5. Cirkuszi akrobaták egymás vállára állva minél nagyobb tornyot szeretnének létrehozni (a toronyban minden szinten csak egy akrobata lesz). Esztétikai és gyakorlati szempontok miatt egy ember vállára csak olyan állhat, aki nála alacsonyabb és könnyebb is. A cirkuszban n akrobata van, adott mindegyikük magassága és súlya. (zh, 2005.)
   (a) Adjunk algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legtöbb emberből álló torony összeállítását.
   (b) Adjunk algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legmagasabb torony összeállítását.

6. Egy adott időszakra több megbízatást is kaphatnánk. Mindegyik megbízatás olyan munkát jelent, ami néhány egymást követő napot foglal le. Adott, hogy melyik megbízatás melyik nap kezdődik és meddig tart. Továbbá adott mindegyikhez, hogy mennyi pénzt keresnénk vele. Adjunk hatékony algoritmust annak meghatározására, hogy legfeljebb mennyi pénzt kereshetünk úgy, hogy egy napon csak egyféle munkát tudunk elvégezni. (Fizetés az adott megbízatások teljes elvégzéséért jár csak.)

---

7. Legfeljebb hány éle lehet az egyszerű, irányított G gráfnak, ha a, b, c, d, e és d, b, c, a, e is topologikus sorrendje?

8. Egy hatalmas kastélyban a belső tereket lépcsők bonyolult hálózata köti össze. A kastély lépcsőrendszerét egy éllistával adott irányított gráf írja le, melynek csúcsai a kastély különböző belső terei, az irányított élek pedig az irányításnak megfelelően felfelé haladó lépcsősorok. A kastélynak n darab belső tere és m darab lépcsősora van. Adott a gráf egy s, illetve egy t csúcsa, amik a kastély bejáratát, illetve a csillagvizsgáló torony tetejét jelölik. Úgy szeretnénk a bejárattól feljutni a csillagvizsgáló torony tetejére, hogy mindig csak felfelé lépcsőzzünk, és eközben minél több belső teret csodálhassunk meg. Adjunk $O(n + m)$ lépésszámú algoritmust egy megfelelő útvonal meghatározására.

9. Bizonyítsuk be, hogy minden $G = (V, E)$ hurokélmentes, irányított gráf felbontható két aciklikus gráfra; pontosabban az élhalmazának van olyan E_1, E_2 partíciója ($E = E_1 \cup E_2$ és $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), hogy a $G_1 = (V, E_1)$ és a $G_2 = (V, E_2)$ gráfok aciklikusak.

10. Egy irányított G gráfban hagyjuk el a forrásokat (olyan csúcsokat, amiknek a befoka 0), a maradék gráfban ismét hagyjuk el a forrásokat, és ezt ismételjük, amig lehet. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor kapunk üres gráfot, ha G-ben nincs irányított kör.

11. Éllistájával adott egy G irányított gráf, amiben nincsen irányított kör. Adott továbbá a gráf egy s csúcsa és szeretnénk meghatározni a gráf összes v csúcsa esetén az s-ből v-be vezető utak számát. Adjunk erre a feladatra $O(n + m)$ lépésszámú algoritmust.

12. Éllistával adott az n-pontú irányított $G = (V, E)$ gráf, melynek minden e éle egy $c(e) > 0$ élsúllyal van ellátva. Egy adott $s \in V$ csúcsból akarunk egy adott $t \in V$ csúcsba eljutni a legolcsóbb módon, de az út költségét a szokásostól eltérően számoljuk: ha az e él az út s-től számított k-adik éle, akkor $k \cdot c(e)$ költséggel járul hozzá az út költségéhez. Adjon algoritmust, amely meghatározza az ilyen értelemben vett legolcsóbb út költségét $O\big(n(n + m)\big)$ lépésben. (vizsga1, 2005. alapján)