1. Legyen adott egy G irányított gráf, és legyen G' az az irányított gráf, amit G-ből az élek irányításának megfordításával kapunk. Adjunk hatékony eljárást a G' gráf
   (a) éllistájának előállítására, ha G éllistával adott;
   (b) szomszédossági mátrixának előállítására, ha G szomszédossági mátrixszal adott.
   Határozzuk meg az eljárások lépésszámát.
2. Éllistájával adott a következő G_1 irányított gráf: $\boldsymbol{a}$: b, c, d; $\boldsymbol{b}$: d; $\boldsymbol{c}$: d; $\boldsymbol{d}$: e; $\boldsymbol{e}$: a.
   (a) Futtassuk le a mélységi bejárást a gráfon úgy, hogy minden döntési helyzetben az ábécé szerint választunk.
   (b) Adjuk meg a csúcsok mélységi és befejezési számát.
   (c) Osztályozzuk a gráf éleit.
3. Éllistával adott egy irányított G gráf és annak egy v csúcsa. Adjunk $O(n+m)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza G összes olyan csúcsát, melyekből v elérhető irányított úton.

---

4. Az egyszerű, irányítatlan, G gráf minden csúcsának a fokszáma 3. A gráf szomszédossági mátrixának bizonyos elemei kitörlődtek, csupán a jobbra látható mátrix maradt meg.
   (a) Rajzoljuk le a G gráfot.
   (b) Adjuk meg a gráf éllistáját.

$$\begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & 1 & . & 1 & 0 & . \\ . & . & 1 & 0 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & 1 & . \end{pmatrix}$$

5. Oldjuk meg a 2. feladatot a G_2 gráfra is: $\boldsymbol{a}$: f, g; $\boldsymbol{b}$: a, g; $\boldsymbol{c}$: $-$; $\boldsymbol{d}$: $-$; $\boldsymbol{e}$: c, d; $\boldsymbol{f}$: e; $\boldsymbol{g}$: e, f.
6. Legyen adott egy G irányítatlan gráf, valamint annak egy e éle, illetve egy v csúcsa. Adjunk hatékony eljárást a $G-e$, illetve a $G-v$ gráfok (azaz az e él, illetve a v csúcs törlésével kapott gráfok)
   (a) éllistájának előállítására, ha G éllistával adott;
   (b) szomszédossági mátrixának előállítására, ha G szomszédossági mátrixszal adott.
   Határozzuk meg az eljárások lépésszámát.
7. Egy kezdő autóvezető a városban való közlekedése során szeretne gyakorlatának megfelelő útvonalat választani. Az úthálózat egy irányítatlan gráfként van éllistával megadva: a csúcsok a kereszteződések, az élek az utak, valamint a csúcsoknál adott, hogy nehéz-e számára az a kereszteződés. (Az hogy nehéz, a kereszteződés tulajdonsága és nem azon múlik, hogy merről érkezik oda és merre akar rajta áthaladni.) Adjunk $O(n+m)$ lépésszámú algoritmust, amivel meg lehet határozni, hogy az autós az egyik adott kereszteződésnél lévő otthonából mely kereszteződésekbe tud autóval úgy eljutni, hogy útja során két nehéz kereszteződés soha nem jön közvetlenül egymás után.

---

8. Legyen adott egy olyan G irányított gráf, amelyben bármely két csúcs között legfeljebb az egyik irányba vezet él. Legyen továbbá G' az az irányítatlan gráf, amit a G-beli élek irányításának elfelejtésével kapunk. Adjunk hatékony eljárást a G' gráf
   (a) éllistájának előállítására, ha G éllistával adott;
   (b) szomszédossági mátrixának előállítására, ha G szomszédossági mátrixszal adott.
   Határozzuk meg az eljárások lépésszámát.
9. A 6-pontú, irányított, egyszerű G gráf csúcsait jelölje x, y, z, u, v, w. A gráf egy mélységi bejárásánál a mélységi, illetve a befejezési számok a következők. x: 1, 6; y: 2, 4; z: 6, 5; u: 3, 3; v: 4, 1; w: 5, 2
   (a) Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit.
   (b) Legfeljebb mennyi lehet az y csúcs be-, illetve kifoka a G gráfban?
   (c) Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, ha G irányítatlan.
10. Egy éllistával adott irányított G gráfban mindegyik csúcs színes: vagy piros vagy zöld, és ez az információ egy, a csúcsokkal indexelt C tömbben adott). Adott továbbá a gráfban két piros csúcs, s és t. Adjunk algoritmust annak eldöntésére, hogy van-e az s-ből a t-be olyan út, ami
    (a) csak piros csúcsokon megy át, és az algoritmus lépésszáma legyen $O(n+m)$;
    (b) legfeljebb egy zöld csúcson megy át, és az algoritmus lépésszáma legyen $O\big(n(n+m)\big)$;
    (c) legfeljebb egy zöld csúcson megy át, és az algoritmus lépésszáma legyen $O(n+m)$.
11. Egy $2k \geq 4$ csúcsú, egyszerű, irányítatlan gráf mélységi bejárása során azt tapasztaltuk, hogy minden csúcsra a befejezési és a mélységi szám különbsége kisebb, mint k. Bizonyítsuk be, hogy a gráf nem összefüggő és minden komponensben legfeljebb k csúcs van. (pzh1, 2024.)
12. Éllistával adott egy irányított G gráf. A gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy 1 és 100 közötti egész szám, azaz egy címke (természetesen több csúcsnak is lehet ugyanaz a címkéje). Találjunk (ha létezik) olyan utat a gráfban, amelyben minden címke pontosan egyszer fordul elő. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n+m)$.