1. Mutassuk meg, hogy az alábbi probléma P-beli.
   Bemenet: egy irányítatlan G gráf.
   Kérdés: összefüggő-e G?

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák NP-beliek.
   (a) Bemenet: egy G páros gráf és egy $k \in \mathbb{Z}_+$ szám.
   Kérdés: van-e G-ben legalább k-élű párosítás?
   (b) Bemenet: egy G és egy H irányítatlan gráf.
   Kérdés: izomorf-e G és H?

3. Mutassuk meg, hogy az alábbi probléma coNP-beli.
   Bemenet: egy $n \geq 2$ egész szám.
   Kérdés: prímszám-e n?

---

4. Mutassuk meg, hogy az alábbi probléma P-beli.
   Bemenet: egy irányítatlan G gráf.
   Kérdés: kiszínezhető-e 2 színnel G?

5. Mutassuk meg, hogy az alábbi probléma NP-beli.
   Bemenet: egy G gráf és egy $k \in \mathbb{Z}_+$ szám.
   Kérdés: van-e G-ben legalább k-méretű klikk?

6. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák coNP-beliek.
   (a) Bemenet: egy G páros gráf és egy $k \in \mathbb{Z}_+$ szám.
   Kérdés: van-e G-ben legalább k-élű párosítás?
   (b) Bemenet: egy $n \geq 2$ egész szám.
   Kérdés: prímhatvány-e n?

7. Mutassuk meg, hogy az alábbi probléma NP-beli.
   Bemenet: egy G gráf.
   Kérdés: igaz-e, hogy $\chi(G) \leq \omega(G)$? (zh2, 2025. alapján)

8. Tegyük fel, hogy van egy olyan $\mathcal{A}$ eljárásunk, ami egy bemenetként kapott G gráfra és k pozitív egész számra egy lépés alatt megmondja, hogy van-e G-ben legalább k-méretű független ponthalmaz.
   (a) Tervezzünk olyan, az $\mathcal{A}$ eljárást használó algoritmust, ami polinomidőben kiszámolja $\alpha(G)$-t.
   (b) Tervezzünk olyan, az $\mathcal{A}$ eljárást használó algoritmust, ami polinomidőben talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt.

---

9. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák P-beliek.
   (a) Bemenet: egy G páros gráf és egy $k \in \mathbb{Z}_+$ szám.
   Kérdés: igaz-e, hogy $\alpha(G) \geq k$?
   (b) Bemenet: egy G gráf.
   Kérdés: van-e G-ben Euler-körséta?

10. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák NP-beliek.
    (a) Bemenet: egy G gráf és egy $k \in \mathbb{Z}_+$ szám.
    Kérdés: igaz-e, hogy $\chi_e(G) \leq k$?
    (b) Bemenet: $s_1, s_2, \ldots, s_m$ és b pozitív egészek.
    Kérdés: van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, amire $\sum_{i \in I} s_i = b$?

11. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák coNP-beliek.
    (a) Bemenet: $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ egész végpontú intervallumok és egy $k \in \mathbb{Z}_+$ szám.
    Kérdés: igaz-e, hogy az intervallumok által meghatározott G intervallumgráfra $\chi(G) \leq k$?
    (b) Bemenet: egy G gráf és egy $w\colon E(G) \to \mathbb{Z}$ súlyfüggvény.
    Kérdés: igaz-e, hogy G minden körének az összsúlya legalább 2015? (vizsga3, 2015.)

12. Legyen π_1 és π_2 két olyan P-beli eldöntési probléma, melyek bemenete megegyezik (de a feltett kérdésük különböző). Legyen továbbá π az az eldöntési probléma, hogy az π_1 és π_2 probléma kérdésének valamelyikére igen-e a válasz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\pi \in \mathrm{P}$.

13. Tegyük fel, hogy van egy $\mathcal{A}$ eljárásunk, amely egy bemenetként kapott G gráfról egy lépés alatt megmondja, hogy kiszínezhető-e 3 színnel. Tervezzünk olyan, az $\mathcal{A}$ eljárást használó algoritmust, ami polinomidőben megtalálja G egy 3 színnel való színezését (ha van ilyen egyáltalán).