

1. Bizonyítsuk be, hogy (a) $n^2 - 4n + 7 \in \Theta(n^2)$; (b) $2^{2n} \notin O(2^n)$.

2. Jobbra látható a buborékrendezés pszeudokódja, melynek bemenete egy $n \geq 2$ darab egész számot tartalmazó T tömb, és egy lépésnek az összehasonlításokat és a cseréket tekintjük.

```

for j = n-1 to 1:
  for i = 0 to j-1:
    if T[i] > T[i+1]:
      csere(T[i], T[i+1])

```

(a) Mutassuk meg, hogy a buborékrendezés lépésszáma $\Theta(n^2)$.

(b) Igaz-e, hogy a buborékrendezés lépésszáma $O(n^3)$?

3. Alkalmas c konstans és n_0 küszöbérték megadásával lássuk be, hogy $f \in O(g)$ teljesül az alábbi függvényekre.

$$f(n) = 2023 \cdot n^2 \cdot \log_2 n - 27 \cdot \sqrt{n} \quad g(n) = \frac{1}{10^{10}} \cdot n^3 + n \cdot \log_2 n \quad (\text{zh1, 2023.})$$

4. Legyen

$$f(n) = \begin{cases} 2024, & \text{ha } n < 15, \\ n \cdot 2^{n+10}, & \text{különben,} \end{cases} \quad \text{és} \quad g(n) = \begin{cases} 2023, & \text{ha } n < 42, \\ n^2 \cdot 2^n, & \text{különben.} \end{cases}$$

Igaz-e, hogy (a) $f(n) \in O(g(n))$; (b) $g(n) \in O(f(n))$? (zh1, 2024.)

5. Legyenek f_1, f_2, g_1, g_2 pozitív értékészletű függvények. Bizonyítsuk be, hogy ha $f_1 \in O(g_1)$ és $f_2 \in O(g_2)$ fennáll, akkor (a) $f_1 + f_2 \in O(\max(g_1, g_2))$; (b) $f_1 \cdot f_2 \in O(g_1 \cdot g_2)$.

6. Jobbra látható a beszűrösös rendezés lineáris keresést használó változatának pszeudokódja, melynek bemenete egy $n \geq 2$ darab egész számot tartalmazó T tömb, és egy lépésnek az összehasonlításokat és a cseréket tekintjük. Mutassuk meg, hogy az algoritmus lépésszáma $\Theta(n^2)$.

```

for j = 1 to n-1:
  i := j
  while T[i-1] > T[i] and i > 0:
    csere(T[i-1], T[i])
  i := i-1

```

7. Alkalmas c konstans és n_0 küszöbérték megadásával lássuk be, hogy $37n^2 \log n + 17\sqrt{n} + 7 \in O(n^2)$ vagy bizonyítsuk be, hogy ez nem igaz. (pzh1, 2023.)

8. Tekintsük az $f(n) = 2009 \cdot n!$ és $g(n) = 100 \cdot (n-1)!$ függvényeket. Igaz-e, hogy (a) $f \in O(g)$; (b) $g \in O(f)$; (c) $f \in \Omega(g)$; (d) $g \in \Omega(f)$? (zh, 2009.)

9. Bizonyítsuk be, hogy (a) $1+2+3+\dots+n \in \Theta(n^2)$; (b) $1+2+4+\dots+2^n \in \Theta(2^n)$; (c) $n^2 \in O(2^n)$.

10. Legyenek f és g pozitív értékészletű függvények. Bizonyítsuk be, hogy ha $f \in O(g)$, akkor $g \in \Omega(f)$ is teljesül.

11. Ugyanarra a feladatra van két algoritmusunk, A és B . Jelölje az algoritmusok maximális lépésszámát leíró függvényeket f_A és f_B . Tudjuk, hogy $f_A \in O(f_B)$. Következik-e ebből, hogy

(a) A minden bemeneten legalább olyan gyors, mint B ;

(b) A véges sok bemenet kivételével legalább olyan gyors, mint B ;

(c) A megfelelően nagy bemenetekre legalább olyan gyors, mint B ?

12. Legyen

$$f(n) = \frac{3n^2}{\log_2 n} - 2n + 5 \quad \text{és} \quad g(n) = 100n \log_2 n + 4n^{4/3}.$$

Melyik helyes az alábbiak közül?

(i) $f(n) \in O(g(n))$, mert például $f(10) < g(10)$.

(ii) $f(n) \in O(g(n))$, mert $n^{4/3} > n^2 / \log_2 n$.

(iii) $g(n) \in O(f(n))$, mert $f(n) < 3n^2$ és $g(n) \in O(n^2)$.

(iv) $g(n) \in O(f(n))$, mert $n \log_2 n \in O(n^{4/3})$ és $n^{4/3} \in O(f(n))$.

(v) A többi állítás egyike sem helyes.

(zv, 2020. tavasz)