

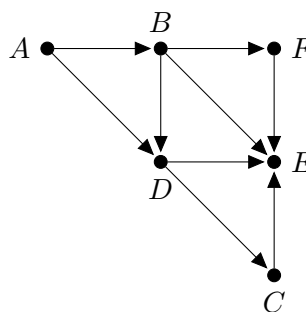
A munkaidő 90 perc. A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL.
Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Alkalmass c konstans és n_0 küszöbérték megadásával lássa be, hogy $f(n) \in O(g(n))$ teljesül az alábbi függvényekre.

$$f(n) = 2023n^2 \cdot \log n - 27 \cdot \sqrt{n} \qquad g(n) = \frac{1}{10^{10}} \cdot n^3 + n \cdot \log n$$

2. Egy reklámkampányban n különféle módon tudunk embereket elérni. Ismert, hogy az egész kampányra legfeljebb M petát tudunk költeni és a szóba jövő módszerek mindegyikéről tudjuk, hogy mennyibe kerül a megvalósítása (az i . módszer esetén ez p_i peták) és ismert az is, hogy melyik módszerrel hány embert tudunk elérni (e_i embert az i . módszerrel). Tegyük fel, hogy a különböző módszerekkel elérhető emberek halmaza páronként diszjunkt, azaz nincsen olyan ember, akit két módszerrel is el tudunk érni. Hogyan lehet meghatározni az M, p_1, p_2, \dots, p_n és e_1, e_2, \dots, e_n pozitív egész számok ismeretében $O(Mn)$ lépésben, hogy legfeljebb hány embert tudunk elérni legfeljebb M peták felhasználásával?

3. Az alábbi gráfban DFS-t (mélységi bejárást) futtatunk úgy, hogy az első három bejárt csúcs A, B, F ebben a sorrendben.



- (a) Milyen sorrendben jártuk be a többi csúcsot?
(b) Határozza meg a gráf összes csúcsára az ehhez a futáshoz tartozó befejezési számot.

4. Adott egy n -szer n -es táblázat, amelynek minden mezőjében egy pozitív egész szám áll, a számok között lehetnek egyformák. Ebben a táblázatban egy tetszőleges x számot tartalmazó mezőről egy vele közös oldallal rendelkező, $(x + 1)$ -et tartalmazó másik mezőre szabad lépni. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami megadja a leghosszabb (legtöbb lépésből álló) szabályos út hosszát a táblázatban.

5. Dijkstra algoritmusát futtatjuk egy **irányított** gráfon, ahol minden élsúly pozitív, az alábbi táblázat az $D[]$ tömb változását mutatja a futás közben.

A	B	C	E	F	G
0	∞	9	∞	2	5
0	∞	5	7	2	3
0	8	4	5	2	3
0	7	4	5	2	3
0	6	4	5	2	3

- (a) Lehetséges-e, hogy van él az F csúcsból a B csúcsba? Ha lehetséges, akkor mi lehet ezen él súlya?
(b) Lehetséges-e, hogy van él a B csúcsból az F csúcsba? Ha lehetséges, akkor mi lehet ezen él súlya?

6. Matrixával adott egy ország úthálózatának irányítatlan, élsúlyozott gráfja: a csúcsok a városok (n város van), az élek a városok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig az útszakasz megtételéhez szükséges várható időtartam. Az útszakaszoknak csak egy része ingyenes, az egy másik mátrixban adott, hogy mely szakaszokért kell fizetni.

Az A városból szeretnénk eljutni a B városba és arra vagyunk kíváncsiak, hogy tovább tart-e az út és ha igen, mennyivel, ha csak ingyenes szakaszokat használunk. Melyik tanult algoritmus (esetleg többszöri) alkalmazásával és hogyan lehet $O(n^2)$ lépésben megoldani ezt a feladatot?

7. Adott egy pozitív egész számokból álló a_1, a_2, \dots, a_n számsorozat. Ebben egy $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_k}$ monoton növekvő részsorozat ($i_1 < i_2 < \dots < i_k$) értéke $a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_k} + a_{i_k}$, azaz összeszorozzuk a részsorozatban szereplő összes számot és hozzáadjuk az utolsó értékét. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú dinamikus programozást használó algoritmust a legnagyobb értékű monoton növekvő részsorozat értékének megkeresésére.

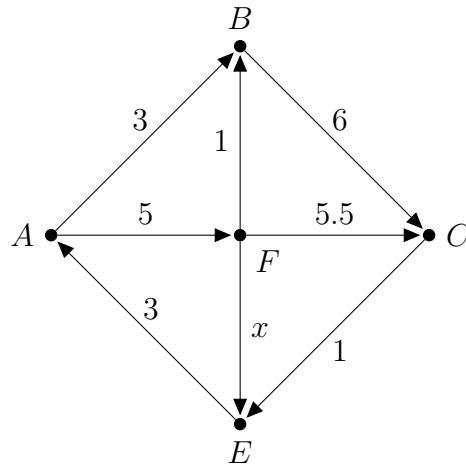
(Például a 2, 5, 1, 3, 10, 7, 9 sorozatban a 2, 5, 7, 9 a legjobb részsorozat, ennek értéke $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + 9 = 639$.)

Algoritmuskészítés - Pótzárthelyi
2023. május 11.

A munkaidő 100 perc. A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL.

Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Alkalmas c konstans és n_0 küszöbérték megadásával lássa be, hogy $37n^2 \log n + 17\sqrt{n} + 7 \in O(n^2)$ vagy pedig bizonyítsa be, hogy ez nem igaz.
2. Adott egy n csúcsú kör, melynek minden pontjába egy n -nél kisebb pozitív egész szám van írva. Ha egy csúcsba a d érték van írva, akkor ebből a csúcsból egyetlen ugrással vagy balra vagy jobbra lehet lépni, pontosan d csúccsal arrébb. Adott a körben egy A és egy B csúcs és azt szeretnénk meghatározni, hogy el lehet-e jutni A -ból kiindulva B -be és ha igen, akkor legkevesebb hány ugrással. Adjon erre a feladatra $O(n)$ lépésszámú algoritmust.
3. Egy nyolc csúcsú egyszerű, irányítatlan G gráfban DFS-t (mélységi bejárást) futtatunk és eközben az alábbi éleket választjuk be a DFS-fába ebben a sorrendben: $ab, be, ac, cd, dg, dh, cf$. Mennyi a c csúcs G -beli fokszámának lehetséges legkisebb értéke és mennyi a lehetséges legnagyobb értéke?
4. Szomszédossági mátrixával adott egy élsúlyozott, n csúcsú egyszerű, irányított gráf, amiben nincsen irányított kör. A gráf néhány csúcsára egy-egy tábla óriási csokoládé van rárakva. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami a gráf minden csúcsára meghatározza, hogy milyen messze van a csúcstól a legközelebbi csokoládé (egy csokoládé távolsága a legrövidebb oda vezető út hosszával egyezik meg).
5. Dijkstra-algoritmussal határozza meg az alábbi gráfban az A pontból az összes többi pontba menő legrövidebb utak hosszát az x pozitív valós paraméter függvényében. Indokolni nem kell, de látszódjon, hogy lépésenként hogyan változik a $D[\]$ tömb és a KÉSZ halmaz.



6. Mátrixával adott egy ország úthálózatának irányítatlan, élsúlyozott gráfja: a csúcsok a városok (n város van), az élek a városok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig az útszakasz megtételéhez szükséges várható időtartam. Adott az országban néhány város, ahol van mentőállomás és szeretnénk eldönteni, hogy igaz-e, hogy az ország bármely városa elérhető legalább egy mentőállomástól legfeljebb M perc alatt. Melyik tanult algoritmus alkalmazásával és hogyan lehet $O(n^2)$ lépésben megoldani ezt a feladatot?
7. Egy $n \times n$ méretű táblázat mezőin lépkedünk a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba úgy, hogy egy lépésben a táblázatban vagy lefelé vagy jobbra egyet lépünk. A táblázat néhány mezője veszélyes (ismerjük, hogy melyek ezek) és az a szabály, hogy az út során legfeljebb egy veszélyes mezőt érinthetünk. A táblázat minden cellájában egy egész szám áll és egy út értéke az úton található számok összege.

Adjon $O(n^2)$ lépésszámú dinamikus programozást használó eljárást, ami meghatározza, hogy mekkora a legnagyobb értékű, a fenti szabályokat betartó út értéke.

Algoritmuselmélet - 2. zárthelyi
2023. június 1.

A munkaidő 90 perc. A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL.

Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

- Egy kupac tömbös reprezentációja 3, 5, y , x , 12, 10, 100, 7, 16, 21.
 - Rajzolja fel a kupacot bináris fa alakban. (Itt indokolni nem kell.)
 - Egy MINTÖR végrehajtása után a gyökérbe y kerül. Rajzolja fel ezt a MINTÖR utáni kupacot is bináris fa alakban. (Itt sem kell indokolni.)
 - Határozza meg x és y összes lehetséges értékét, ha tudjuk, hogy a tárolt elemek mind különböző egész számok (és az eredeti kupacon végrehajtott MINTÖR után y van a gyökérben). (Itt viszont már kell indokolni.)
- Egy bináris keresőfában, melyben csupa különböző egész számot tárolunk, a 11-es szám keresése során a 3, 17, 8, z , 11 kulcsokat látjuk ebben a sorrendben. Adja meg z összes lehetséges értékét.
- Egy kezdetben üres, 11 méretű hash táblába nyílt címzéssel, lineáris próbával szűrünk be hét különböző egész számot, a $h(x) = x \pmod{11}$ hash függvényvel. A beszúrások után egy számot kitöröltünk a táblából, a törölt elem helyét * jelzi, az eljárás végén az alábbi táblát kaptuk:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		14	3		6	18	*	9	20	

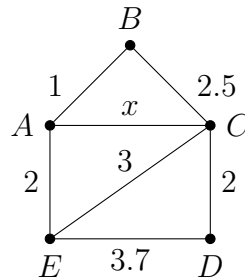
- Hogyan zajlik a 19 keresése ebben a táblában? Mely cellákat vizsgáljuk meg a keresés során?
 - Mi lehetett a törölt szám értéke, ha tudjuk, hogy 20-nál kisebb pozitív egész szám volt?
- Egy nagyvárosban jelenleg egyáltalán nincsenek bicikliutak, de a városvezetés szeretné elérni, hogy néhány út külső sávjában biciklisávok kerüljenek felfestésre az út mindkét oldalán, azaz a bicikliutak mindkét irányba használhatóak lesznek. Ez csak úgy lehetséges, hogy ezen utak mentén néhány, de legalább egy parkolóhely megszűnik. A város vezetése szeretné úgy megtervezni a bicikliutakat, hogy a főtérről a város minden csomópontjába el lehessen jutni bicikliúton, de ehhez a lehető legkevesebb parkolóhelyet kelljen megszüntetni (tartva az autósok haragjától). Szomszédossági mátrixával adott a város úthálózatának összefüggő, élsúlyozott, irányítatlan gráfja: a csúcsok a csomópontok (a főtér a T jelű csomópontban van), az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi parkolóhely szűnik meg, ha ezen a szakaszon bicikliút készül. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust erre a feladatra (a szokásos módon n a csomópontok számát jelöli).
 - A 42-KÖR problémában azt kell eldönteni egy egyszerű, irányítatlan G gráfról, hogy G csúcsait le lehet-e fedni pontosan 42 darab páronként pontdiszjunkt körrel (azaz semelyik két körnek nincsen közös pontja). Lásza be, hogy ez a probléma NP-ben van.
 - Lásza be, hogy a 42-KÖR probléma NP-teljes. (Az felhasználható az előző feladatból, hogy NP-beli.)
 - Diákok pontszámait szeretnék nyilvántartani egy többfordulós verseny során, a diákok Neptun-kóddal vannak azonosítva. Tervezzen adatszerkezetet, amiben a következő műveleteket kell tudni elvégezni:
BESZÚR_DIÁK(x): beilleszt az adatszerkezetbe egy új, x Neptun-kódú diákot 0 ponttal
PONT_NÖVELES(x,y): az x Neptun-kódú diák pontjait y -nal növeli
HÁNY_PONT(x): megadja, hogy az x Neptun-kódú diáknak hány pontja van
KLA_LEGJOBB: visszaadja az összes olyan diák Neptun-kódját, akinek a pontszáma a legmagasabb
A KLA_LEGJOBB művelet lépésszáma $O(k)$ legyen, ahol k a legtöbb ponttal rendelkező diákok száma, a többi művelet lépésszáma $O(\log n)$ legyen, ahol n a résztvevő diákok száma.

Algoritmuselmélet - 2. pótzárthelyi
2023. június 8.

A munkaidő 90 perc. A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL.
Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

- (a) Egy kezdetben üres bináris keresőfába a tanult eljárással beszúrjuk a 3, 2, 1, 8, 5, 7, 6 számokat. Rajzolja fel a fát minden egyes lépés után.
(b) Kiegészítve a fát a számokat nem tároló levelekkel ki lehet-e színezni az (a) pontban kapott fa csúcsait úgy, hogy piros-fekete fát kapjunk?
- Egy 2-3 fában a 2, 5, 8, 10, 12, 14, 15, 19, 21 számokat tároljuk, a fában minden nem-levél csúcsnak három gyereke van.
(a) Rajzolja fel ezt a fát, beleértve a belső csúcsokban található útjelző értékeket is. Itt indokolni nem kell.
(b) Szűrje be ebbe a fába 11-et a tanult eljárással. Indokolni itt sem kell, de látszódnak a beszúrás részlépései.
- Adott két tömb, mindegyikben n darab különböző egész számot tárolunk. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy van-e legalább $\frac{n}{2}$ olyan elem, ami mindkét tömbben benne van.
- Tervezzen adatstruktúrát különböző egész számok tárolására úgy, hogy az alábbi műveletek lépésszáma $O(\log n)$ legyen, ha n elemet tárolunk:
BESZÚR(i): az i számot beszúrjuk
MELYIK(K): megmondja, hogy a tárolt elemek között a nagyság szerinti növekvő rendezésben melyik elem a K -adik

5. Az alábbi gráfban (ahol x értéke nem feltétlenül egész szám) Prim algoritmusát futtattuk az A csúcsból és eközben az x súlyú él nem került be a minimális feszítőfába.



- (a) Melyik éleket választotta be a Prim algoritmus és milyen sorrendben? Indoklasképpen röviden írja le a Prim algoritmus általános lépését (maximum 1-2 mondatban).
(b) Mi lehet x értéke és miért?

6. Láss be, hogy az alábbi eldöntési feladat coNP-ben van:

Input: s_1, s_2, \dots, s_n pozitív egész számok

Kérdés: Igaz-e, hogy $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ bármely két különböző részhalmazára más a részhalmazban levő számok összege?

7. Tekintsük az alábbi eldöntési problémát: Adott egy irányítatlan, összefüggő G gráf, melynek páros sok csúcsa van, a csúcsok fele pirosra, a másik fele kékre vannak színezve. Azt szeretnénk eldönteni, hogy van-e G -ben olyan Hamilton-kör, ami egy piros és egy kék ívből áll, azaz a Hamilton-kör mentén haladva a piros és a kék csúcsok egy-egy utat alkotnak.
Láss be, hogy ez a probléma NP-teljes.