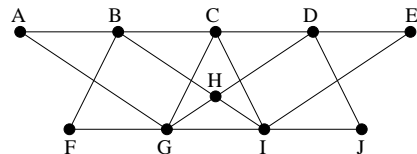


**Adatstruktúrák és algoritmusok**  
**8-9. gyakorlat, 2016. április 15.,22.**  
**Gráfelméleti alapok**

1. Egy  $n$  csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább  $\frac{n}{2}$ . Mutassuk meg, hogy a gráf összefüggő.
2. Adott a  $G$  irányítatlan gráf a következő éllistával: **a:**  $b, c$ ; **b:**  $a, d$ ; **c:**  $a, d$ ; **d:**  $b, c, e, f$ ; **e:**  $d, f, g$ ; **f:**  $d, e, g, h$ ; **g:**  $e, f, h$ ; **h:**  $f, g$ . Keressünk  $G$ -ben  $a$ -ból kiinduló szélességi fesztőfát és határozzuk meg a csúcsok  $a$ -tól való távolságát is.
3. Rajzoljuk fel az összes 3, 4, illetve 5 pontú fát. (Az izomorfakat csak egyszer.)
4. A húsz csúcsú  $G$  egyszerű gráfban tíz csúcs foka legfeljebb 7, a maradék tíz csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van  $G$ -nek?

5. Bejárhatja-e a BFS algoritmus a jobbra látható gráf csúcsait az alábbi sorrendben? Ahol a válasz igen, ott adjuk meg a keletkező BFS-fát is.



- a) H, B, D, G, I, C, A, F, J, E
- b) F, B, A, G, C, H, I, D, E, J

6. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élel úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen.
7. Egy húsz csúcsú egyszerű gráfban tíz pont foka 5, a maradék tíz pont foka 14. Összefüggő-e a gráf komplementere?
8. Egy fában minden pont foka 1, 2 vagy 3. Hány 1 fokú pontja van, ha a 3 fokú pontjainak száma 100?
9. Oldjuk meg az 5. feladatot a csúcsok alábbi sorrendjeire is.
  - a) J, D, I, C, E, G, H, A, F, B
  - b) A, B, G, C, H, F, I, D, E, J
10. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan legalább két csúcsú egyszerű gráf, amelyben bármely két csúcs foka különböző.
11. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám?
12. A  $G$  összefüggő gráfban minden pont foka 3. Az  $s$  csúcsából indított BFS algoritmus a  $v$  csúcsot tizenharmadikként éri el (az elsőként elért csúcsnak  $s$ -et tekintjük). Előfordulhat-e, hogy  $v$  távolsága  $s$ -től
  - a) 2;
  - b) 3;
  - c) 8?
13. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő.
14. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintjük azonosnak.)
15. Adott  $G$  gráf és  $s$  csúcs esetén a feladatunk eldönteni, hogy  $G$ -ben van-e  $s$ -et tartalmazó kör és ha igen, akkor megtalálni az ilyen körök közül a legrövidebbek egyikét. Módosítsuk a BFS algoritmust úgy, hogy ennek a feladatnak a megoldására is alkalmassá váljon.
- 16\*. Mutassuk meg, hogy minden összefüggő gráfban van olyan csúcs, amelyet a gráfból elhagyva (az összes rá illeszkedő éllel együtt) ismét összefüggő gráfot kapunk.